Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 512.543

О ВЛОЖЕНИИ ГРУПП БАУМСЛАГА — СОЛИТЕРА В ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ БАУМСЛАГА — СОЛИТЕРА

Ф. А. Дудкин

Аннотация. Конечно порожденная группа G, которая действует на дереве так, что все вершинные и реберные стабилизаторы — бесконечные циклические группы, называется *обобщенной группой Баумслага — Солитера* (GBS-*группой*). Пусть p и q — взаимно простые целые числа, не равные $0, 1, -1$. Доказано, что группа Баумслага — Солитера $BS(p,q)$ вкладывается в группу G тогда и только тогда, когда в G разрешимо уравнение $x^{-1}y^px = y^q$ при $y \neq 1$ (т. е. $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$, где Δ — модулярный гомоморфизм).

Ключевые слова: группа Баумслага — Солитера, обобщенная группа Баумслага — Солитера, вложение групп.

Введение

Группа называется *хопфовой*, если всякий ее гомоморфизм на себя имеет тривиальное ядро, т. е. является автоморфизмом. Далее будем считать, что p и q — взаимно простые целые числа, не равные 0, 1, -1. Баумслаг и Солитер [1] впервые предложили серию примеров нехопфовых групп с двумя порождающими элементами и одним соотношением, которые обозначаются через

$$BS(p,q) = \langle a, t \| t^{-1}a^pt = a^q \rangle.$$

Эти группы оказались интересны и с других позиций: геометрических свойств, функций роста, функции Дэна и т. д. (см. [2]).

Будем называть конечно порожденную группу G *обобщенной группой Баумслага — Солитера* (GBS-*группой*), если группа G может действовать на дереве так, что стабилизаторы вершин и ребер — бесконечные циклические группы. По теореме Басса — Серра группа G представима в виде $\pi_1(\mathbb{A})$ — фундаментальной группы некоторого графа групп $\mathbb{A}$ (см., например, [3] или [4]), вершинные и реберные группы которого — бесконечные циклические группы.

Всякой GBS-группе G можно сопоставить граф с метками (Γ, λ), где Γ — конечный граф, а $\lambda : E(\Gamma) \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — метки на ребрах Γ. Метка $\lambda(e)$, написанная на ребре e с началом в вершине v, определяет вложение $\alpha_e : e \to v^{\lambda(e)}$ циклической реберной группы $\langle e \rangle$ в циклическую вершинную группу $\langle v \rangle$ (подробнее о графах с метками и их свойствах см. § 1).

Отметим, что GBS-группы довольно активно исследовались в последнее время [5–7]. В частности, активно обсуждалась проблема изоморфизма GBS-групп: определить алгоритмически, когда два данных графа с метками задают

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–31222, 12–01–33102).

изоморфные GBS-группы. Несмотря на то, что в некоторых частных случаях проблема изоморфизма решена [8–10], в общем случае существование алгоритма не установлено.

Пусть T — дерево, на котором GBS-группа G действует, как описано выше. Элемент $g \in G$ называется *эллиптическим*, если он фиксирует некоторую вершину. Если g не эллиптический, то он *гиперболический*: существует g-инвариантная ось, на которой g действует сдвигами на положительное целое $l(g)$. Определение эллиптичности элемента корректно, не зависит от конкретного действия и дерева и определяется теоретико-групповыми свойствами группы G [11].

Определим модулярный гомоморфизм $\Delta : G \to \mathbb{Q}^*$. Для данного $g \in G$ выберем произвольный нетривиальный эллиптический элемент $a \in G$, тогда для некоторых целых m и n, не равных 0, выполняется равенство $g^{-1}a^m g = a^n$. В этом случае полагаем $\Delta(g) = \frac{m}{n}$. Несложно доказать, что такое определение корректно. Модулярный гомоморфизм играет важную роль в исследовании GBS-групп.

Пусть p и q — взаимно простые целые числа, не равные 0, 1 и -1. Понятно, что если $BS(p,q) \subseteq G$, то $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$. Обратно, если $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$, то в группе G разрешимо уравнение $x^{-1}y^p x = y^q$, однако неясно, верно ли, что в этом случае группа $BS(p,q)$ является подгруппой группы G. В 2007 г. Левитт [10] среди прочих замечаний пишет, что скорее всего неверно то, что группа G содержит $BS(p,q)$, если $\frac{p}{q} \neq \pm 1$ принадлежит $\Delta(G)$. Такие сомнения весьма естественны. Чтобы это увидеть, рассмотрим следующий

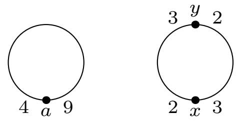

Рис. 1.

Пример. Пусть G — GBS-группа, заданная графом с метками Γ (рис. 1, на котором слева — граф с метками группы BS(4,9), справа — граф с метками Γ). Тогда $G \cong \langle x, y, s \mid x^2 = y^3, s^{-1}y^2 s = x^3\rangle$.

Существует естественный гомоморфизм из $BS(4,9) \cong \langle a, t \mid t^{-1}a^4 t = a^9\rangle$ в группу G, заданный на порождающих так:

$$\varphi : \begin{cases} a \to x, \\ t \to s. \end{cases}$$

Однако этот гомоморфизм не является вложением. Действительно, по лемме Бриттона (см. § 1) коммутатор $[a^2, ta^3t^{-1}]$ отличен от 1 в группе Баумслага — Солитера, но его образ в группе G равен $[x^2, sx^3s^{-1}] = [y^3, y^2] = 1$.

Тем не менее вложение удается найти.

Теорема. *Пусть G — GBS-группа и p и q — взаимно простые целые числа, не равные 0, 1 и -1. Группа Баумслага — Солитера $BS(p,q)$ вкладывается в группу G тогда и только тогда, когда $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$.*

Наряду с проблемой изоморфизма GBS-групп, видимо, стоит исследовать проблему вложения GBS-групп: определить алгоритмически, когда два данных графа с метками $\mathbb{A}_1 = (\Gamma_1, \lambda_1)$ и $\mathbb{A}_2 = (\Gamma_2, \lambda_2)$ задают такие GBS-группы, что группа $\pi_1(\mathbb{A}_1)$ вкладывается в группу $\pi_1(\mathbb{A}_2)$.

Гипотеза. *Проблема вложения GBS-групп разрешима.*

В пользу этой гипотезы можно привести результаты работы Басса [12]. В этой работе разработана теория накрытий графов групп и для двух графов групп $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ приведены необходимые и достаточные условия вложения $\pi_1(\mathbb{A}_1)$ в $\pi_1(\mathbb{A}_2)$. С другой стороны, эти условия сформулированы так, что требуется немало усилий для их реализации в конкретных случаях. В 2009 г. в [13] автор успешно использовал теорему Басса для описания всех подгрупп группы $BS(p,q)$ в терминах графов с метками при простых различных p и q, а в 2010 г. в [14] описал подгруппы конечного индекса группы $BS(p,q)$ и соответствующие им графы с метками при взаимно простых p и q.

Когда эта статья была сдана в журнал, Левитт разместил на архиве препринт статьи, в которой (см. [15, утверждение 7.5.]) доказал основную теорему другим способом.

§ 1. Предварительные сведения

Граф Γ — множество вершин $V(\Gamma)$, множество ребер $E(\Gamma)$, отображения $o,w : E(\Gamma) \to V(\Gamma)$ — начало и конец ребра — и инверсия $^{-} : E(\Gamma) \to E(\Gamma)$ такая, что $o(\bar{e}) = w(e)$, $w(\bar{e}) = o(e)$, $\bar{\bar{e}} = e$, $\bar{e} \neq e$. *Реберный путь* $\delta = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ — последовательность ребер такая, что $o(e_{i+1}) = w(e_i)$ для $i = 1, 2, \dots, k-1$. *Петля* — ребро $e \in E(\Gamma)$ такое, что $w(e) = o(e)$.

Пара $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma, \gamma)$ называется *графом групп*, если Γ — связный граф и γ — групповая структура, т. е. всякой вершине v графа Γ сопоставлена группа γ_v, всякому ребру e графа Γ — группа $\gamma_e = \gamma_{\bar{e}}$, и если $v = o(e)$, то задано вложение $\alpha_e : \gamma_e \to \gamma_v$.

Фундаментальную группу графа групп $\mathbf{\Gamma}$, обозначаемую через $\pi_1(\mathbf{\Gamma})$, можно определить с помощью порождающих и определяющих соотношений. Пусть T — максимальное поддерево графа Γ, а $f_1, f_2, \dots$ — ребра, не лежащие в $E(T)$.

Порождающие группы $\pi_1(\mathbf{\Gamma})$:

1) порождающие вершинных групп γ_v для всех $v \in V(\Gamma)$;

2) символы t_i для всех $f_i \in E(\Gamma) \setminus E(T)$.

Определяющие соотношения группы $\pi_1(\mathbf{\Gamma})$:

1) определяющие соотношения всех вершинных групп;

2) соотношения $\alpha_e(g) = \alpha_{\bar{e}}(g)$ для всех $g \in \gamma_e$ и $e \in E(T)$;

3) соотношения $t_i^{-1}\alpha_e(g)t_i = \alpha_{\bar{e}}(g)$ для всех $g \in \gamma_e$ и $f_i \in E(\Gamma) \setminus E(T)$.

Это определение корректно и не зависит от выбора поддерева T.

Если G — GBS-группа, то по теореме Басса — Серра она является фундаментальной группой графа групп с бесконечными циклическими вершинными и реберными группами. Вложения реберных групп в вершинные в этом случае удобно обозначать целочисленными метками, написанными на началах и концах ребер соответствующего графа. Это задает групповую структуру на графе.

Дадим второе эквивалентное определение *модулярного гомоморфизма*. Фиксируем вершину v_0 графа Γ. Каждому элементу g GBS-группы G можно поставить в соответствие такой цикл $\delta_g = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, что $o(e_1) = w(e_n) = v_0$. Для этого нужно рассмотреть g как слово от порождающих группы G и читать это слово. Начать можно с любого ребра $e_1 \in E(T)$. Если при чтении встречается элемент из стабилизатора вершины v, то составленный ранее реберный путь $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ надо дополнить до пути $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_l)$ так, что $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_l \in E(T)$ и $w(e_l) = v$. Если при чтении встретился символ $t_i^{\pm 1}$, то новая часть пути имеет вид $(e_{k+1}, \dots, e_l, f_i(\bar{f}_i))$ и $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_l \in E(T)$. После прочтения слова надо по ребрам дерева T вернуться в начальную вершину v_0. Тогда эквивалентное определение $\Delta(g)$ таково:

$$\Delta(g) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda(\bar{e}_i)}{\lambda(e_i)}. \tag{1}$$

Для данного цикла $\delta_g = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ произведение, как в (1), будем обозначать через $\Delta(\delta_g) = \Delta(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Рассмотрим некоторые преобразования графа с метками, которые не меняют его фундаментальную группу (в общем случае см. [8], для GBS-групп см. [9]), а именно схлопывания, расширения и скольжения (рис. 2–4). Заметим, что скольжение является композицией расширения и схлопывания. Преобразования графов с метками подробно изучены в [5].

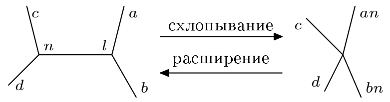

Рис. 2.

Рис. 3.

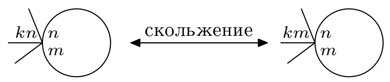

Рис. 4.

На GBS-группу иногда полезно смотреть как на группу, полученную следующим образом: начинаем с группы $\mathbb{Z}$, выполняем последовательные свободные произведения с объединением, руководствуясь метками на максимальном поддереве, наконец, несколько раз (по количеству ребер вне максимального поддерева) применяем конструкцию HNN-расширения. При таком подходе применима вся стандартная теория свободных произведений с объединением и HNN-расширений. В частности, в GBS-группах есть нормальная форма элемента (см., например, [7, гл. 4, п. 2]). Там же определена приведенная последовательность элементов в HNN-расширении с базой G, проходной буквой t и связанными подгруппами A и B.

Последовательность (или соответствующее слово) $g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n$, $(n \geqslant 0)$ называется *приведенной*, если в ней не встречаются подряд t^{-1}, g_i, t, где $g_i \in A$ и t, g_j, t^{-1}, где $g_j \in B$. Для группы $BS(p,q)$ получается, что слово $w(a,t)$ приведено, если в нем нет подслов $t^{-1}a^{\alpha \cdot p}t$ и $ta^{\beta \cdot q}t^{-1}$.

Лемма Бриттона [7, с. 249]. *Если последовательность* $g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n$ *приведена и* $n \geqslant 1$, *то* $g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} \ldots t^{\varepsilon_n} g_n \neq 1$ *в* H_m.

§ 2. Доказательство теоремы

Граф с метками $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma, \lambda)$ называется *приведенным*, если схлопываний в нем не может быть, а значит, метка на ребре графа Γ может быть равна единице только в том случае, когда она написана на $(1, n)$-петле. Обозначим $G = \pi_1(\mathbf{\Gamma})$.

Лемма. *Если $\Delta(G) \supseteq \left\langle \frac{p}{q} \right\rangle$, то существует такой граф $\mathbf{\Gamma}_1 = (\Gamma_1, \lambda_1)$ с метками, что $G \cong \pi_1(\mathbf{\Gamma}_1)$, и в Γ_1 есть цикл $\gamma = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ такой, что $\Delta(\gamma) = \frac{p}{q}$ и для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ метки $\lambda(e_i)$ и $\lambda(\bar{e}_{i-1})$ обе не равны 1.*

Доказательство. В силу того, что $\Delta(G) \supseteq \left\langle \frac{p}{q} \right\rangle$, в графе Γ найдется цикл $t_1, t_2, \dots, t_s$ такой, что $\Delta(t_1, t_2, \dots, t_s) = \frac{p}{q}$. Если в нем есть вершина с нужными свойствами, то доказывать нечего. Если нет, то рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть найдется такое ребро t_i, что $\lambda(t_i) = \lambda(\bar{t}_{i-1}) = 1$ или $\lambda(t_i) = \lambda(\bar{t}_i) = 1$, тогда используем скольжение ребра $\bar{t}_{i-1}$ по ребру t_i. Далее будем рассматривать цикл $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_s$.

Случай 2. Для каждого i либо $\lambda(t_i) = 1$, либо $\lambda(\bar{t}_{i-1}) = 1$. Из того, что цикл замкнут, легко понять, что для всех i либо $\lambda(t_i) = 1$, либо $\lambda(\bar{t}_{i-1}) = 1$. Однако это невозможно из-за условия $\Delta(t_1, t_2, \dots, t_s) = \frac{p}{q}$ и того, что p, q оба не равны 1; противоречие. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть G — GBS-группа, а p и q — взаимно простые целые числа, не равные 0, 1 и -1. Группа Баумслага — Солитера $BS(p,q)$ вкладывается в группу G тогда и только тогда, когда $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Используя лемму, будем искать вложение группы $BS(p,q)$ в $\mathbf{\Gamma}_0$ — цикл с метками, построенный на ребрах $e_1, e_2, \dots, e_n$. При этом будем считать, что a_i — начало ребра e_i и a_1 — вершина с соседними метками, не равными 1. Кроме того, будем обозначать через a_i одновременно и вершины графа Γ_0, и порождающие соответствующих циклических вершинных групп.

Среди ребер $e_1, e_2, \dots, e_n$ есть ребра (не менее одного), не лежащие в максимальном поддереве графа Γ_0, обозначим соответствующие им порождающие группы $\pi_1(\mathbf{\Gamma}_0)$ через $t_1, t_2, \dots, t_k$. В соответствии с определением фундаментальной группы графа групп этим ребрам будут соответствовать соотношения HNN-расширения, а остальным — свободного произведения с объединением.

Известно (см., например, [16, гл. 4, § 2]), что $\pi_1(\mathbf{\Gamma}_0)$ — подгруппа группы $\pi_1(\Gamma)$.

Обозначим через s минимальное натуральное число такое, что в $\pi_1(\mathbf{\Gamma}_0)$ выполнено равенство

$$t_k^{-1} \dots t_2^{-1} t_1^{-1} a_1^{sp} t_1 t_2 \dots t_k = a_1^{sq}. \tag{2}$$

Тогда если $t_k^{-1} \dots t_2^{-1} t_1^{-1} a_1^{mp} t_1 t_2 \dots t_k = a_1^{mq}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то s делит m. Так как в $\pi_1(\mathbf{\Gamma}_0)$ выполняется (2), отображения

$$\varphi_h : \begin{cases} a \to a_1^s, \\ t \to t_1 t_2 \dots t_k h, \quad h \in C\big(a_1^{sq}\big), \end{cases}$$

задают гомоморфизмы $BS(p,q) \to \pi_1(\mathbf{\Gamma}_0)$. Положим $g = t_1 t_2 \dots t_k$. Из (2) видно, что a_1 и $g^{-1} a_1 g \in C\big(a_1^{sq}\big)$, значит, $[a_1, g] \in C\big(a_1^{sq}\big)$.

Докажем от противного, что $\varphi_{[a_1,g]}$ является вложением. Пусть это не так, тогда найдется приведенное слово $w = w(a,t) \neq 1$ в $BS(p,q)$ такое, что $w\big(a_1^s, g[a_1,g]\big) = 1$ в $\pi_1(\mathbf{\Gamma}_0)$.

Тогда $\Delta\big(w\big(a_1^s, g[a_1,g]\big)\big) = 1$, а с другой стороны, $\Delta(w(a,t)) = \big(\frac{p}{q}\big)^k$, где k — сумма показателей степеней, с которыми t входит в запись слова $w(a,t)$. Значит, $k = 0$ и $w(a,t) = w(t^{-i} a t^i \mid i \in \mathbb{Z})$, т. е. $w(a,t)$ лежит в нормальном замыкании элемента a. Следовательно, $w = w(x_i \mid i \in \mathbb{Z})$, где $x_i = (g[a_1,g])^{-i} a_1^s (g[a_1,g])^i$.

Итак, по предположению существуют такие целые числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $i_1, \ldots, i_m$, что $i_{j-1} \neq i_j$ и

$$(t^{-i_1} a^{\alpha_1} t^{i_1})(t^{-i_2} a^{\alpha_2} t^{i_2}) \ldots (t^{-i_m} a^{\alpha_m} t^{i_m}) \neq 1 \qquad (3)$$

в группе $BS(p, q)$, но при этом

$$x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_m}^{\alpha_m} = 1 \qquad (4)$$

в группе $\pi_1(\mathbf{\Gamma}_0)$.

Докажем, что из (4) следует существование такого j, что $p \mid \alpha_j$ или $q \mid \alpha_j$, и это будет противоречить приведенности слова w в группе $BS(p, q)$. Для этого надо воспринимать $\pi_1(\mathbf{\Gamma}_0)$ как последовательное свободное произведение с объединением циклических групп и последующими несколькими HNN-расширениями получившейся группы.

Исследуем структуру элемента из (4) на стыке x_{i_j} и $x_{i_{j+1}}$. Если $i_j - i_{j+1} > 0$, то на стыке получаем

$$(g[a_1, g])^{i_j - i_{j+1}} = \big(g a_1^{-1} g^{-1} a_1 g\big)\big(g a_1^{-1} g^{-1} a_1 g\big) \ldots \big(g a_1^{-1} g^{-1} a_1 g\big)$$

— приведенное слово в $\pi_1(\mathbf{\Gamma}_0)$, как в HNN-расширении. Это обеспечивается выбором a_1 из леммы. Случай $i_j - i_{j+1} > 0$ аналогичен рассмотренному.

Но ввиду равенства (4) левая часть не может быть приведена, значит, сокращения должны начаться в середине какого-то x_{i_j}.

Если $i_{j-1} > i_j$ и $i_{j+1} < i_j$, то

$$x_{i_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} x_{i_j}^{\alpha_j} x_{i_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} = \ldots \big(g a_1^{-1} g^{-1} a_1 g\big) a_1^{\alpha_j} \big(g a_1^{-1} g^{-1} a_1 g\big) \ldots,$$

сокращений нет.

Если $i_{j-1} < i_j$ и $i_{j+1} > i_j$, то

$$x_{i_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} x_{i_j}^{\alpha_j} x_{i_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} = \ldots \big(g a_1^{-1} g^{-1} a_1 g\big)^{-1} a_1^{s\alpha_j} \big(g a_1^{-1} g^{-1} a_1 g\big)^{-1} \ldots,$$

сокращений нет.

Значит, сокращения начнутся, только если ($i_{j-1} > i_j$ и $i_{j+1} > i_j$) или ($i_{j-1} < i_j$ и $i_{j+1} < i_j$). Рассмотрим подробно первый случай, второй проверяется аналогично.

Если $i_{j-1} > i_j$ и $i_{j+1} > i_j$, то

$$\begin{aligned} x_{i_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} x_{i_j}^{\alpha_j} x_{i_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} &= \ldots (g[a_1, g]) a_1^{s\alpha_j} ([a_1, g]^{-1} g^{-1}) \ldots \\ &= \ldots g a_1^{-1} g^{-1} a_1 \underline{g a_1^{s\alpha_j} g^{-1}} a_1^{-1} g a_1 g^{-1} \ldots, \end{aligned} \qquad (5)$$

сокращения могут начаться только в месте подчеркивания. Пусть t_1 соответствует ребру e_r, тогда для некоторого рационального δ верно равенство

$$t_1 t_2 \ldots t_k a_1^{s\alpha_j} t_k^{-1} \ldots t_2^{-1} t_1^{-1} = a_r^{s\alpha_j \cdot \delta},$$

продолжим равенство (5):

$$= \ldots g a_1^{-1} g^{-1} a_1 a_r^{s\alpha_j \cdot \delta} a_1^{-1} g a_1 g^{-1} \ldots.$$

Если $a_r^{s\alpha_j \cdot \delta}$ не является степенью a_1, то дальнейшее сокращение невозможно, так как $(t_1 t_2 \ldots t_k)^{-1} a_1 a_r^{s\alpha_j \cdot \delta} a_1^{-1} t_1 t_2 \ldots t_k$ не удовлетворяет лемме Бриттона. Поэтому $a_r^{s\alpha_j \cdot \delta}$ является степенью a_1, значит, использованы все соотношения по циклу $e_1, e_2, \ldots, e_n$, и из второго определения модулярного гомоморфизма вытекает, что

$$t_1 t_2 \ldots t_k a_1^{s\alpha_j} (t_1 t_2 \ldots t_k)^{-1} = a_1^{s\alpha_j \cdot \frac{p}{q}}.$$

Следовательно, $q | s\alpha_j$.

Пусть $m = \frac{s\alpha_j}{q}$, тогда $g^{-1} a_1^{mp} g = a_1^{mq}$. Как замечено ранее, это влечет $s|m$, стало быть, $q|\alpha_j$. Так как предполагалось, что $i_{j-1} > i_j$ и $i_{j+1} > i_j$, в записи левой части (3) получаем подслово $ta^{\alpha_j}t^{-1}$; противоречие с приведенностью w. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68, N 3. P. 199–201.
2. *Дудкин Ф. А.* Группы Баумслага — Солитера и их подгруппы // Итоги науки. Юг России. Математический форум. Т. 6. Группы и графы. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. С. 21–28.
3. *Serre J.-P.* Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1980.
4. *Чуркин В. А.* К теории групп, действующих на деревьях // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 2. С. 218–225.
5. *Clay M., Forester M.* Whitehead moves for G-trees // Bull. London Math. Soc. 2009. V. 41, N 2. P. 205–212.
6. *Forester M.* On uniqueness of JSJ decompositions of finitely generated groups // Comm. Math. Helv. 2003. V. 78. P. 740–751.
7. *Clay M.* Deformation spaces of G-trees and automorphisms of Baumslag–Solitar groups // Groups Geom. Dyn. 2009. V. 3. P. 39–69.
8. *Forester M.* Splittings of generalized Baumslag–Solitar groups // Geom. Dedicata. 2006. V. 121, N 1. P. 43–59.
9. *Clay M., Forester M.* On the isomorphism problem for generalized Baumslag–Solitar groups // Algebr. Geom. Topol. 2008. V. 8. P. 2289–2322.
10. *Levitt G.* On the automorphism group of generalized Baumslag–Solitar groups // Geom. Topol. 2007. V. 11. P. 473–515.
11. *Forester M.* Deformation and rigidity of simplicial group actions on trees // Geom. Topol. 2002. V. 6. P. 219–267.
12. *Bass H.* Covering theory for graphs of groups // J. Pure Appl. Algebra. 1993. V. 89, N 1. P. 3–47.
13. *Дудкин Ф. А.* Подгруппы групп Баумслага — Солитера // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 1. С. 3–30.
14. *Дудкин Ф. А.* Подгруппы конечного индекса в группах Баумслага — Солитера // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 331–345.
15. *Levitt G.* Quotients and subgroups of Baumslag–Solitar groups // preprint, arXiv:1308.5122.
16. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

Статья поступила 21 марта 2013 г.

Дудкин Федор Анатольевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
DudkinF@ngs.ru