Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 512.62+517.54

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ПОЛИНОМОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИХ КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ

В. Н. Дубинин

Аннотация. Для любых фиксированных комплексных чисел a, b и натурального $n \geq 2$ исследуется задача о нахождении верхней грани произведения $|P'(0)P'(1)|$ по множеству всех полиномов P степени n, удовлетворяющих следующим условиям: $P(0) = a, P(1) = b$ и $|P(z)| \leq 1$ для всех z, при которых $P'(z) = 0$. В качестве приложений основного результата работы приводится ряд точных оценок для модулей производных полиномов с учетом их критических значений. В частности, устанавливается новая версия неравенства марковского типа для произвольного компакта.

Ключевые слова: полином Чебышева, критические значения, теоремы искажения, неравенства марковского типа.

§ 1. Введение и формулировка основного результата

В геометрической теории функций хорошо известны так называемые двуточечные теоремы искажения, включающие в себя значения модулей производных однолистных функций в двух заданных точках некоторой области, а также значения этих функций в указанных точках (см., например, [1] и библиографию в ней). Вопрос о доказательстве аналогичных теорем для многолистных функций мало изучен даже в случае полиномов (сравни [2, 3]). Обозначим через $\mathscr{P}_n$ совокупность всех комплексных полиномов степени $n \geq 2$, модули критических значений которых не превосходят единицы. Под критическим значением полинома P понимается, как обычно, значение этого полинома в критической точке, т. е. в точке z, для которой $P'(z) = 0$. Заметим, что принадлежность полинома P классу $\mathscr{P}_n$ равносильна условию связности лемнискаты $\{z : |P(z)| \leq 1\}$. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. *Для любых фиксированных комплексных чисел a, b и натурального $n \geq 2$ определить точную верхнюю границу произведения $|P'(0)P'(1)|$ по множеству всех полиномов P класса $\mathscr{P}_n$, удовлетворяющих условиям $P(0) = a$, $P(1) = b$.*

Принадлежность полинома P классу $\mathscr{P}_n$, т. е. ограничения на степень полинома P и на его критические значения, существенна для задачи 1. Действительно, если положить $a = b = 0$ и $P(z) = (z-1)((z+t)^n - t^n)$ при $t > 1$, то

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 13–01–12404–офи_м2), ДВО РАН (грант № 12–I–ОМН–02) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.A18.21.0353).

$P(0) = P(1) = 0$, а произведение $|P'(0)P'(1)| = nt^{n-1}((1+t)^n - t^n)$ стремится к бесконечности при $n \to \infty$ либо $t \to \infty$. Легко проверить, что в этом случае модули критических значений полинома P стремятся к бесконечности при $n \to \infty$ либо $t \to \infty$. Можно показать, что решение задачи 1 влечет за собой решение задачи 2.

Задача 2. *Для любого фиксированного комплексного числа a и натурального $n \geq 2$ определить точную верхнюю границу модуля производной $|P'(0)|$ по множеству всех полиномов P класса $\mathscr{P}_n$, удовлетворяющих условиям $P(0) = a$, $P^{(n)}(0) = 1$.*

В случае $|a| = 1$ эта задача решена А. Еременко и Лемпертом [4, теорема 1]. Тем самым нашла подтверждение одна из гипотез Эрдеша [5, с. 477]. Обозначим через $T_n(z) = 2^{n-1}z^n + \ldots$ полином Чебышева первого рода степени n, и пусть T_n^{-1} — непрерывная ветвь обратной ему функции, заданная на луче $[0, +\infty]$ и переводящая этот луч на луч $[\cos(\pi/(2n)), +\infty]$. В данной работе методом симметризации [6] доказывается следующая

Теорема 1. *Если полином P принадлежит классу $\mathscr{P}_n$, то справедливо неравенство*

$$|P'(0)P'(1)| \leq T_n'\big(T_n^{-1}(|P(0)|)\big)T_n'\big(T_n^{-1}(|P(1)|)\big)\big[T_n^{-1}(|P(0)|) + T_n^{-1}(|P(1)|)\big]^2. \quad (1)$$

Равенство в (1) *имеет место, например, в случае $P(z) = T_n(\alpha\, z + \beta)$ при любых вещественных α и β, удовлетворяющих условиям $\alpha + \beta \geq \cos(\pi/(2n))$, $\beta \leq -\cos(\pi/(2n))$.*

Неравенство (1) дает конечную верхнюю границу в задачах 1 и 2. При этом из теоремы 1 следует решение задачи 2 для любых a и n, а также решение задачи 1 в случае, когда точки a и $(-1)^n b$ расположены на одном луче, выходящем из начала координат. Более того, из теоремы 1 вытекает неравенство марковского типа для произвольного компакта комплексной плоскости с учетом критических значений полинома, а также точная нижняя оценка максимальных модулей критических значений полинома P степени n, $P(0) = 0, P'(0) \neq 0$. Эти и другие следствия теоремы 1 рассмотрены в § 4. В § 3 приводится доказательство основного результата (теоремы 1), а в § 2 расположен вспомогательный для этого доказательства материал, взятый из [6].

§ 2. Емкость конденсатора и круговая симметризация

Всюду ниже под римановой поверхностью будем понимать компактную риманову поверхность с краем. Мы представляем такую поверхность лежащей над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$ и «склееной» из плоских областей с естественным определением проекций, локальных параметров и окрестностей для точек на такой поверхности [7]. Нам понадобится описание римановой поверхности $\mathscr{R}(T_n)$ функции, обратной полиному Чебышева T_n. Напомним, что в терминах конформных отображений полином $T_n(z)$ можно определить как суперпозицию обратной функции Жуковского, степенной функции и функции Жуковского:

$$T_n(z) = \frac{1}{2}((z + \sqrt{z^2-1})^n + (z - \sqrt{z^2-1})^n), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_z.$$

Гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 1$, проходящие через критические точки полинома Чебышева $z = \cos(k\pi/n)$, $k = 1, \ldots, n-1$, разбивают z-плоскость на n попарно не пересекающихся областей. Обозначим эти области, пронумерованные справа налево, через $B_1, \ldots, B_n$. Полином T_n отображает область B_1 конформно и однолистно на область D_1 — w-плоскость с разрезом по лучу $L^- := [-\infty, -1]$. Области $B_2, \ldots, B_{n-1}$ отображаются этим полиномом на области $D_2, \ldots, D_{n-1}$ — w-плоскости с разрезом вдоль лучей L^- и $L^+ := [1, +\infty]$. Наконец, область B_n отображается на область D_n — w-плоскость с разрезом по лучу L^- в случае четного n и по лучу L^+ в случае, когда n нечетное. Риманову поверхность $\mathscr{R}(T_n)$ можно получить склеиванием областей D_k, $k = 1, \ldots, n$, следующим образом. Область D_1 склеивается «крест на крест» с областью D_2 по берегам разрезов вдоль луча L^-. Область D_2 склеивается с областью D_3 по берегам разрезов вдоль луча L^+, и т. д. Область D_{n-1} склеивается с областью D_n по берегам разрезов вдоль луча L^- в случае четного n и луча L^+ в случае, когда n нечетное. Склеиваемые области D_k, рассматриваемые как подмножества поверхности $\mathscr{R}(T_n)$, обозначим через $\mathscr{D}_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Будем говорить, что множество $\mathscr{B}$ на произвольной римановой поверхности $\mathscr{R}$ *удовлетворяет условию* (A), если ни для какого ρ, $1 < \rho < \infty$, оно не содержит замкнутой жордановой кривой, лежащей над окружностью $\gamma(\rho) := \{w : |w| = \rho\}$ и не покрывающей эту окружность n-кратно. Например, любое множество на поверхности $\mathscr{R}(T_n)$ с проекцией в $|w| > 1$ удовлетворяет условию (A).

Конденсатором на римановой поверхности $\mathscr{R}$ называется упорядоченная пара $\mathscr{C} = (\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1)$ непустых непересекающихся замкнутых множеств $\mathscr{E}_k \subset \overline{\mathscr{R}}$, $k = 0, 1$. Множества $\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1$ называются *пластинами* конденсатора $\mathscr{C}$. *Емкость* конденсатора $\mathscr{C}$ определяется равенством

$$\operatorname{cap} \mathscr{C} = \inf \int\limits_{\mathscr{R} \setminus (\mathscr{E}_0 \cup \mathscr{E}_1)} |\bigtriangledown \mathscr{V}|^2 \, d\sigma,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\mathscr{V}$, непрерывным в $\overline{\mathscr{R}}$, липшицевым на любом компактном подмножестве множества $\mathscr{R} \setminus (\mathscr{E}_0 \cup \mathscr{E}_1)$ и равным нулю на множестве $\mathscr{E}_0$ и единице — на $\mathscr{E}_1$. Непосредственно из определения емкости конденсатора вытекает свойство монотонности: включения $\mathscr{E}_j^1 \subset \mathscr{E}_j^2$, $j = 0, 1$, влекут неравенство

$$\operatorname{cap}\left(\mathscr{E}_0^1, \mathscr{E}_1^1\right) \le \operatorname{cap}\left(\mathscr{E}_0^2, \mathscr{E}_1^2\right).$$

Из теоремы 1 в [6] следует

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{R}$ — риманова поверхность над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$, покрывающая каждую точку w не более чем n раз, и пусть $\mathscr{C} = (\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1)$ — конденсатор на поверхности $\mathscr{R}$, пластины которого ограничены конечным числом аналитических кривых. Предположим, что пластина $\mathscr{E}_0$ содержит границу $\partial\mathscr{R}$, а множество $\mathscr{R} \setminus \mathscr{E}_0$ удовлетворяет условию (A). Тогда*

$$\operatorname{cap} \mathscr{C} \ge \operatorname{cap} \operatorname{Sym} \mathscr{C},$$

где $\operatorname{Sym} \mathscr{C} = (\operatorname{Sym} \mathscr{E}_0, \operatorname{Sym} \mathscr{E}_1)$, $\operatorname{Sym} \mathscr{E}_k = \{W \in \mathscr{R}(T_n) : \operatorname{Sym} \mathscr{V}(W) = k\}$, $k = 0, 1$, и $\mathscr{V}(W)$ — потенциальная функция конденсатора $\mathscr{C}$, т. е. вещественная функция, непрерывная в $\overline{\mathscr{R}}$, гармоническая в $\mathscr{R} \setminus (\mathscr{E}_0 \cup \mathscr{E}_1)$ и равная k на $\mathscr{E}_k$, $k = 0, 1$.

Ниже дается определение симметризованной функции $\operatorname{Sym} \mathscr{V}$ по заданной функции $\mathscr{V}$ в несколько этапов. Напомним сначала определения круговой симметризации множеств и функций, заданных в круге $\overline{U}$, $U := \{w : |w| < 1\}$

(см., например, [8, 9]). Пусть B — открытое в $\overline{U}$ множество. Круговая симметризация относительно вещественной положительной полуоси сопоставляет множеству B кругосимметричное множество B^*, определенное следующим образом. Если при данном ρ, $0 \leq \rho \leq 1$, окружность $\gamma(\rho)$ не пересекается с множеством B, то она не пересекается и с множеством B^*. Если $\gamma(\rho) \subset B$, то $\gamma(\rho) \subset B^*$. В остальных случаях множество B^* пересекается с $\gamma(\rho)$ по открытой дуге с центром на вещественной положительной полуоси и линейной меры, равной мере пересечения множества B с $\gamma(\rho)$. Нетрудно видеть, что множество B^* открыто в $\overline{U}$. Рассмотрим вещественнозначную функцию v, непрерывную в $\overline{U}$, и открытые в $\overline{U}$ множества $B_a = \{w \in \overline{U} : v(w) > a\}$, $-\infty < a < +\infty$. *Результатом круговой симметризации* (относительно вещественной положительной полуоси) функции v называют функцию

$$v^*(w) = \sup\{a : w \in B_a^*\}, \quad w \in \overline{U}.$$

Пусть $\mathscr{R}$ — риманова поверхность, лежащая над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$ и покрывающая каждую точку w не более чем n раз, и пусть $\mathscr{B}$ — множество на $\mathscr{R}$, открытое относительно $\mathscr{R}_e := \{W \in \mathscr{R} : |\operatorname{pr} W| \geq 1\}$ и удовлетворяющее условию (А). Обозначим через $\mathscr{U}$ n-листный круг, лежащий на поверхности $\mathscr{R}(T_n)$ над множеством $|w| > 1$, и пусть $\mathscr{L}$ — луч на $\overline{\mathscr{U}}$, который лежит над L^+ и принадлежит области $\mathscr{D}_1$. Круговая симметризация относительно луча $\mathscr{L}$ сопоставляет множеству $\mathscr{B}$ кругосимметричное множество $\mathscr{B}^* \subset \overline{\mathscr{U}}$, определенное следующим образом. Если при данном ρ, $1 \leq \rho \leq \infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{B}$, то над ней нет также и точек множества $\mathscr{B}^*$. Если множество $\mathscr{B}$ содержит замкнутую кривую, n-кратно лежащую над $\gamma(\rho)$, то $\mathscr{B}^*$ содержит замкнутую кривую, n-кратно лежащую над $\gamma(\rho)$. В остальных случаях часть множества $\mathscr{B}^*$, лежащая над $\gamma(\rho)$, представляет собой открытую дугу на $\overline{\mathscr{U}}$, симметричную относительно луча $\mathscr{L}$ (с центром на $\mathscr{L}$) и линейной меры, равной суммарной мере всех дуг на $\mathscr{B}$, лежащих над $\gamma(\rho)$. Рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию $\mathscr{V}$ в $\mathscr{R}_e$, для которой множества $\mathscr{B}_a(\mathscr{V}) \equiv \mathscr{B}_a := \{W \in \mathscr{R}_e : \mathscr{V}(W) > a\}$, $0 \leq a \leq +\infty$, удовлетворяют условию (А) и которая в точках границы поверхности $\mathscr{R}$ обращается в нуль. *Результатом круговой симметризации* (относительно $\mathscr{L}$) функции $\mathscr{V}$ назовем функцию

$$\mathscr{V}^*(W) = \begin{cases} \sup\{a \geq 0 : W \in \mathscr{B}_a^*\}, & \text{если } \{a \geq 0 : W \in \mathscr{B}_a^*\} \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad W \in \overline{\mathscr{U}}.$$

Пусть вновь $\mathscr{R}$ — риманова поверхность над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$, покрывающая каждую точку w не более чем n раз, и пусть $\mathscr{V}$ — неотрицательная непрерывная функция на $\overline{\mathscr{R}}$, для которой множество $\mathscr{B}_0(\mathscr{V})$ удовлетворяет условию (А) и которая в точках границы поверхности $\mathscr{R}$ обращается в нуль. *Результатом симметризации функции* $\mathscr{V}$ назовем функцию $\operatorname{Sym}\mathscr{V}$, заданную на поверхности $\mathscr{R}(T_n)$, которая в круге $\overline{\mathscr{U}}$ совпадает с функцией $\mathscr{V}^*$:

$$\operatorname{Sym}\mathscr{V}(W) := \mathscr{V}^*(W), \quad W \in \overline{\mathscr{U}}. \tag{2}$$

В остальных точках поверхности $\mathscr{R}(T_n)$ функция $\operatorname{Sym}\mathscr{V}$ определяется следующим образом. Пусть w — произвольная фиксированная точка круга $\overline{U}$. Значения функции $\mathscr{V}$ в точках W с проекцией $\operatorname{pr} W = w$ обозначим через

$$v_1(w) \geq v_2(w) \geq \cdots \geq v_n(w), \quad w \in \overline{U}. \tag{3}$$

Если для данной точки w не существует точки $W \in \mathscr{R}$ с $\operatorname{pr} W = w$ либо указанных выше значений (с учетом кратности) меньше чем n, то соответствующие значения $v_k(w)$ полагаем равными нулю. Поступая так в каждой точке $w \in \overline{U}$, определим в $\overline{U}$ n непрерывных функций $v_k(w)$, $k = 1, \dots, n$. Для каждой пары функций (v_k, v_l), $1 \le k < l \le n$, определим F-преобразование, которое сопоставляет этой паре пару других функций (v'_k, v'_l):

$$v'_k(w) = (\max(v^*_k(w), v^*_l(-w)))^*, \quad v'_l(w) = (\min(v^*_k(w), v^*_l(-w)))^*, \quad w \in \overline{U},$$

где * означает круговую симметризацию относительно вещественной положительной полуоси. Проведем F-преобразование над парой (v_1, v_2), затем над парами (v'_1, v_3), $((v'_1)', v_4)$ и т. д. В результате получим совокупность функций

$$(\dots((v'_1)')' \dots)', v'_2, v'_3, \dots, v'_n,$$

которую переименуем вновь соответственно как $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$, считая при этом, что

$$M(v_1) \ge m(v_1) \ge M(v_2) \ge M(v_3) \ge \dots \ge M(v_n).$$

Здесь

$$M(v) = \max\{v(w) : |w| = 1\}, \quad m(v) = \min\{v(w) : |w| = 1\}.$$

Далее повторим предыдущую процедуру с набором функций $v_2, \dots, v_n$. Затем с $v_3, \dots, v_n$, пока, наконец, не получим совокупность функций $v_1, v_2, \dots, v_n$, удовлетворяющих неравенствам

$$M(v_k) \ge m(v_k) \ge M(v_{k+1}) \ge m(v_{k+1}), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Перераспределяя значения функций $v_k(w)$ в каждой точке внутри круга U, можно считать, что выполняются неравенства (3) и $v_k = v^*_k$, $k = 1, \dots, n$. Доопределим функцию $\operatorname{Sym}\mathscr{V}$ в точках поверхности $\mathscr{R}(T_n)$, лежащих над кругом $\overline{U}$, по правилу

$$\operatorname{Sym}\mathscr{V}(W) := v_k((-1)^{k+1} \operatorname{pr} W), \quad W \in \overline{\mathscr{D}_k}, \ |\operatorname{pr} W| \le 1, \ k = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Над окружностью $|w| = 1$ функция $\operatorname{Sym}\mathscr{V}$ определялась нами разными способами. Однако оба способа приводят к одним и тем же значениям функции $\operatorname{Sym}\mathscr{V}$ над $|w| = 1$ [6]. Таким образом, функция $\operatorname{Sym}\mathscr{V}$ определяется соотношениями (2) и (4).

§ 3. Доказательство теоремы 1

Случай равенства в соотношении (1) проверяется непосредственным вычислением, исходя из определения полинома Чебышева. Для доказательства неравенства (1) достаточно рассмотреть ситуацию, когда модули всех критических значений полинома P строго меньше единицы и выполняются неравенства $|P(0)| \ne 1$, $|P(1)| \ne 1$, $P'(0) \ne 0$, $P'(1) \ne 0$. Обозначим через $\mathscr{P}^{-1}$ аналитическую функцию, обратную полиному P и рассматриваемую как однозначную функцию на своей римановой поверхности $\mathscr{R}(P)$. Пусть $\mathscr{P} : \overline{\mathbb{C}}_z \to \mathscr{R}(P)$ — отображение, обратное $\mathscr{P}^{-1}$ в этом представлении. Соответствующие функции для полинома T_n будем обозначать через $\mathscr{T}_n^{-1}$ и $\mathscr{T}_n$. При достаточно малом $r > 0$ рассмотрим конденсатор C на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$:

$$C = (\{z : |z| \le r\}, \{z : |z-1| \le r\}).$$

Известно, что емкость этого конденсатора удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\operatorname{cap} C = -\frac{\pi}{\log r} + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0$$

(см., например, [10, теорема 2.5]). С другой стороны, конформная инвариантность емкости дает

$$\operatorname{cap}\ C = \operatorname{cap}(\mathscr{P}(\{z : |z| \le r\}), \mathscr{P}(\{z : |z-1| \le r\})).$$

Обозначим через $\mathscr{C} = (\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_1)$ некоторый конденсатор на поверхности $\mathscr{R}(P)$, у которого пластина $\mathscr{E}_0$ представляет собой круг, однолистно лежащий над кругом вида $\{w : |w - P(0)| \le |P'(0)| r_0(r)\}$, а пластина $\mathscr{E}_1$ — однолистный круг над кругом $\{w : |w - P(1)| \le |P'(1)| r_1(r)\}$, причем $\mathscr{E}_0$ принадлежит множеству $\mathscr{P}(\{z : |z| \le r\})$, $\mathscr{E}_1$ принадлежит множеству $\mathscr{P}(\{z : |z-1| \le r\})$ и $r_0(r) \sim r_1(r) \sim r$ при $r \to 0$. Из монотонности емкости следует, что

$$\operatorname{cap}\ (\mathscr{P}(\{z : |z| \le r\}), \mathscr{P}(\{z : |z-1| \le r\})) \ge \operatorname{cap} \mathscr{C}.$$

Заметим, что при фиксированном $\rho \ge 1$ часть поверхности $\mathscr{R}(P)$, лежащая над областью $|w| > \rho$, представляет собой риманову поверхность, n-кратно покрывающую эту область. Так как полином P принадлежит классу $\mathscr{P}_n$, единственная точка ветвления указанной поверхности расположена в бесконечности и имеет порядок $n-1$. По формуле Гурвица эта поверхность имеет только одну граничную кривую, n-кратно покрывающую окружность $|w| = \rho$. Поэтому множество $\mathscr{R}(P) \backslash \mathscr{E}_0$ удовлетворяет условию (A). Легко проверить другие условия леммы 1, согласно которой

$$\operatorname{cap} \mathscr{C} \ge \operatorname{cap} \operatorname{Sym} \mathscr{C} \quad (\mathscr{R} = \mathscr{R}(P)).$$

Наконец, рассмотрим конденсатор C^*, конформно эквивалентный конденсатору $\operatorname{Sym} \mathscr{C}$:

$$C^* = (\{z : \mathscr{T}_n(z) \in \operatorname{Sym} \mathscr{E}_0\}, \{z : \mathscr{T}_n(z) \in \operatorname{Sym} \mathscr{E}_1\}),$$

для которого

$$\operatorname{cap} C^* = \operatorname{cap} \operatorname{Sym} \mathscr{C}.$$

Суммируя выписанные соотношения, получаем

$$\operatorname{cap} C^* \le -\frac{\pi}{\log r} + o\biggl(\Bigl(\frac{1}{\log r}\Bigr)^2\biggr), \quad r \to 0. \tag{5}$$

Покажем теперь, что первая пластина конденсатора C^* содержит круг вида

$$\left\{z : \left|z + T_n^{-1}(|P(0)|)\right| \le \frac{|P'(0)| \tilde{r}_0(r)}{T_n'\bigl(T_n^{-1}(|P(0)|)\bigr)}\right\},$$

а вторая пластина содержит круг вида

$$\left\{z : \left|z - T_n^{-1}(|P(1)|)\right| \le \frac{|P'(1)| \tilde{r}_1(r)}{T_n'\bigl(T_n^{-1}(|P(1)|)\bigr)}\right\}, \tag{6}$$

где $\tilde{r}_0(r) \sim \tilde{r}_1(r) \sim r$ при $r \to 0$. Для этого достаточно убедиться, что пластина $\operatorname{Sym} \mathscr{E}_0$ конденсатора $\operatorname{Sym} \mathscr{C}$ содержит круг на листе $\mathscr{D}_n$ с проекцией

$$U_0(r) := \{w : |w - (-1)^n |P(0)|| \le |P'(0)| r_0(r)\},$$

а пластина $\operatorname{Sym} \mathscr{E}_1$ содержит круг на листе $\mathscr{D}_1$ с проекцией

$$U_1(r) := \{w : |w - |P(1)|| \le |P'(1)| r_1(r)\}$$

(на самом деле эти пластины совпадают с указанными кругами на $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}_n$). Начнем с пластины $\operatorname{Sym} \mathscr{E}_1 = \{W \in \mathscr{R}(T_n) : \operatorname{Sym} \mathscr{V}(W) = 1\}$, где $\mathscr{V}$ — потенциальная функция конденсатора $\mathscr{C}$. Пусть $|P(1)| > 1$ и W_1 — точка на листе $\mathscr{D}_1$

с проекцией $|P(1)|$. Тогда значения функции $\operatorname{Sym}\mathscr{V}$ в окрестности точки W_1 определятся формулой (2). Так как $\mathscr{V}=1$ на $\mathscr{E}_1$, для любого числа a, $0<a<1$, множество $\mathscr{B}_a$ содержит пластину $\mathscr{E}_1$ (см. § 2). Следовательно, множество $\mathscr{B}_a^*$ содержит круг на листе $\mathscr{D}_1$ с центром в точке W_1 радиуса $|P'(1)|r_1(r)$. По определению симметризованной функции $\mathscr{V}^*=1$ в точках этого круга, и требуемое включение доказано. Пусть $|P(1)|<1$ и точка W_1 определена выше. Согласно (4) значения функции $\operatorname{Sym}\mathscr{V}$ в окрестности точки W_1 определяются формулой $\operatorname{Sym}\mathscr{V}(W)=v_1(\operatorname{pr}W)$. Поскольку $\mathscr{V}=1$ на $\mathscr{E}_1$ и проекция пластины $\mathscr{E}_1$ содержит круг $\{w:|w-P(1)|\le|P'(1)|r_1(r)\}$, на первом этапе преобразований (3) совокупности функций $\{v_k\}_{k=1}^n$ в U функция v_1 равна единице на указанном круге. Преобразование F переводит пару функций (v_1,v_2) в пару (v_1',v_2') так, что

$$v_1'(w)=(\max(v_1^*(w),v_2^*(-w)))^*,\quad w\in U.$$

Отсюда, как и выше, видно, что $v_1'=1$ на круге $U_1(r)$. Аналогично $(v_1')'=1$ на $U_1(r)$ и т. д. Следовательно, окончательное представление функции v_1 равно единице в круге $U_1(r)$. Поэтому $\operatorname{Sym}\mathscr{V}=1$ в окрестности точки W_1 с проекцией $U_1(r)$, т. е. пластина $\operatorname{Sym}\mathscr{E}_1$ содержит такую окрестность. Рассмотрим теперь пластину $\operatorname{Sym}\mathscr{E}_0$. Обозначим через W_0 точку на листе $\mathscr{D}_n$ с проекцией $(-1)^n|P(0)|$. Пусть $|P(0)|>1$, тогда в окрестности точки W_0 функция $\operatorname{Sym}\mathscr{V}$ вновь определяется формулой (2). Так как $\mathscr{V}=0$ на $\mathscr{E}_0$, множество $\mathscr{R}(P)\backslash\mathscr{B}_0$ содержит пластину $\mathscr{E}_0$. Следовательно, множество $\mathscr{R}(T_n)\backslash\mathscr{B}_0^*$ содержит круг на $\mathscr{D}_n$ с центром в точке W_0 радиуса $|P'(0)|r_0(r)$. По определению симметризованной функции $\mathscr{V}^*=0$ в точках этого круга, и требуемое включение выполняется. В случае $|P(0)|<1$ согласно (4) в окрестности точки W_0 имеем

$$\operatorname{Sym}\mathscr{V}(W)=v_n((-1)^{n+1}\operatorname{pr}W).$$

Поскольку $\mathscr{V}=0$ на $\mathscr{E}_0$ и проекция пластины $\mathscr{E}_0$ содержит круг $\{w:|w-P(0)|\le|P'(0)|r_0(r)\}$, ввиду (3) на первом этапе преобразований совокупности функций $\{v_k\}_{k=1}^n$ на указанном круге $v_n\equiv0$. Преобразование F над какой-либо парой функций $(\tilde v,v_n)$ дает пару $(\tilde v',v_n')$, где

$$v_n'(w)=(\min(\tilde v^*(w),v_n^*(-w)))^*,\quad w\in U.$$

Отсюда видно, что $v_n'\equiv0$ на круге $\{w:|w+|P(0)||\le|P'(0)|r_0(r)\}$. Следовательно, окончательное представление функции v_n равно тождественно нулю на этом круге. Поэтому $v_n((-1)^{n+1}w)\equiv0$ в круге $U_0(r)$. Следовательно, $\operatorname{Sym}\mathscr{V}=0$ в окрестности точки W_0, лежащей над $U_0(r)$, т. е. пластина $\operatorname{Sym}\mathscr{E}_0$ содержит такую окрестность. Итак, принадлежность кругов (6) пластинам конденсатора C^* доказана. Вновь из монотонности емкости конденсатора и асимптотической формулы для емкости [10, теорема 25] вытекает

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}C^*\ge-\frac{\pi}{\log r}+\pi\biggl\{\frac12\log\frac{|P'(0)P'(1)|}{T_n'\bigl(T_n^{-1}(|P(0)|)\bigr)T_n'\bigl(T_n^{-1}(|P(1)|)\bigr)}\\ -\log\bigl|T_n^{-1}(|P(0)|)+T_n^{-1}(|P(1)|)\bigr|\biggr\}\left(\frac{1}{\log r}\right)^2+o\biggl(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\biggr),\quad r\to0.\end{aligned}$$

Сравнивая это неравенство с (5), получаем неравенство (1). Теорема доказана.

§ 4. Следствия теоремы 1

Рассмотрим сначала решение задачи 1 в одном частном случае.

Следствие 1. *Если точки a и $(-1)^n b$ расположены на одном луче, выходящем из начала координат, то верхняя грань произведения $|P'(0)P'(1)|$ в задаче 1 равна*

$$T_n'\big(T_n^{-1}(|a|)\big)T_n'\big(T_n^{-1}(|b|)\big)\big[T_n^{-1}(|a|)+T_n^{-1}(|b|)\big]^2. \tag{7}$$

Доказательство. Можно считать, что b — вещественное неотрицательное число. Согласно неравенству (1) величина (7) является верхней границей произведения $|P'(0)P'(1)|$. Кроме того, она достигается в случае полинома $P(z) = T_n(\alpha z+\beta)$ при $\alpha = T_n^{-1}(|a|) + T_n^{-1}(b)$ и $\beta = -T_n^{-1}(|a|)$. Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть полином P принадлежит классу $\mathscr{P}_n$, и пусть z_1 и z_2 — произвольные нули этого полинома. Тогда*

$$|z_1-z_2|^2|P'(z_1)P'(z_2)| \le 4n^2\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Равенство достигается для полинома T_n и его нулей $z_1 = -\cos(\pi/(2n))$ и $z_2 = \cos(\pi/(2n))$.

Доказательство. Применяем теорему 1 к полиному $P((z_2-z_1)z+z_1)$, модули критических значений которого также не превосходят единицы. Следствие доказано.

Следствие 3. *Если все критические значения полинома*

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \quad c_n \ne 0,\ n \ge 2,$$

лежат в круге $|w|\le 1$, то для любой точки z выполняется неравенство

$$|P'(z)| \le 2^{\frac{1-n}{n}}|c_n|^{\frac{1}{n}}T_n'\big(T_n^{-1}(|P(z)|)\big). \tag{8}$$

Равенство в (8) достигается, например, в случае $P = T_n$ при любых вещественных z, $|z|\ge\cos(\pi/(2n))$.

Доказательство. Фиксируем произвольные числа z_1 и $x>0$ и применяем теорему 1 к полиному $P((x-z_1)z+z_1)$. В результате получаем неравенство

$$\begin{aligned}&|P'(z_1)P'(x)||x-z_1|^2\\ &\qquad\le T_n'\big(T_n^{-1}(|P(z_1)|)\big)T_n'\big(T_n^{-1}(|P(x)|)\big)\big[T_n^{-1}(|P(z_1)|)+T_n^{-1}(|P(x)|)\big]^2.\end{aligned}$$

Осталось показать, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{T_n'\big(T_n^{-1}(|P(x)|)\big)\big[T_n^{-1}(|P(z_1)|)+T_n^{-1}(|P(x)|)\big]^2}{|P'(x)||x-z_1|^2} = 2^{\frac{1-n}{n}}|c_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Последнее равенство легко проверяется, если учесть асимптотические формулы

$$|P(x)| = |c_n|x^n|1+o(1)|,\ x\to+\infty; \quad |P'(x)| = n|c_n|x^{n-1}|1+o(1)|,\ x\to+\infty;$$

$$T_n^{-1}(y) = 2^{\frac{1-n}{n}}\sqrt[n]{y}|1+o(1)|, \quad y>0,\ \sqrt[n]{y}>0,\ y\to+\infty;$$

$$|T_n'(z)| = n2^{n-1}|z|^{n-1}|1+o(1)|, \quad z\to\infty.$$

Случай равенства проверяется непосредственно. Следствие доказано.

Полученный результат дает решение задачи 2 при любом a и $n\ge 2$. Именно, справедливо

Следствие 4. *Верхняя грань в задаче 2 равна*

$$2^{\frac{1-n}{n}}(n!)^{-\frac{1}{n}}T_n'\bigl(T_n^{-1}(|a|)\bigr).$$

Доказательство. Нормировка $P^{(n)}(0)=1$ означает, что старший коэффициент полинома P равен $1/n!$. Поэтому неравенство (8) дает оценку

$$|P'(0)|\le 2^{\frac{1-n}{n}}(n!)^{-\frac{1}{n}}T_n'\bigl(T_n^{-1}(|a|)\bigr),$$

которая достигается в случае $P(z)=T_n\bigl(2^{\frac{1-n}{n}}(n!)^{-\frac{1}{n}}z+T_n^{-1}(|a|)\bigr)$. Следствие доказано.

Другим следствием теоремы 1 является неравенство марковского типа на произвольном компакте комплексной плоскости. В [11] А. Еременко показал, что для любого континуума E и любого полинома P степени n справедливо неравенство

$$\operatorname{cap}E\sup_E|P'|\le 2^{\frac{1-n}{n}}n^2\sup_E|P|. \tag{9}$$

Здесь $\operatorname{cap}E$ означает логарифмическую емкость множества E [12, гл. 7, § 3]. Ранее Поммеренке получил более слабую версию неравенства (9), в которой вместо множителя $2^{(1-n)/n}$ стоит множитель $e/2$ [13]. Любопытна роль критических точек полинома P в неравенствах марковского типа. Если для произвольного множества E неравенство (9), вообще говоря, неверно, то добавление к E всех критических точек полинома P делает его справедливым. Действительно, в этом случае можно расширить E без увеличения величины $\sup\limits_E|P|$ до связного множества. Тем самым представляет интерес изучение неравенств марковского типа с учетом максимума модуля полинома P в критических точках. Введем обозначения:

$$M=M(P,E)=\sup\{|P(z)|:z\in E\},\quad M_c=M_c(P)=\sup\{|P(z)|:P'(z)=0\}.$$

Следствие 5. *Для любого замкнутого ограниченного множества E и любого полинома P степени $n\ge 2$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap}E\sup_E|P'|\le\left(\frac{2M}{M_c}\right)^{\frac{1-n}{n}}T_n'\left(T_n^{-1}\left(\frac{M}{M_c}\right)\right)M. \tag{10}$$

Доказательство. Множество E принадлежит лемнискате $E(P,M){:=}\{z: |P(z)|\le M\}$, емкость которой по теореме Фекете равна $\sqrt[n]{M/|c_n|}$, где c_n — старший коэффициент полинома P. Таким образом,

$$\operatorname{cap}\ E\ \sup_E|P'|\le\operatorname{cap}E(P,M)\sup_E|P'|\le\left(\frac{M}{|c_n|}\right)^{\frac{1}{n}}\sup_{E(P,M)}|P'|.$$

Так как максимум модуля производной достигается в граничной точке лемнискаты, применяя неравенство (8) к полиному P/M_c в этой точке, получаем

$$\sup_{E(P,M)}|P'|\le 2^{\frac{1-n}{n}}\left|\frac{c_n}{M_c}\right|^{\frac{1}{n}}T_n'\left(T_n^{-1}\left(\frac{M}{M_c}\right)\right)M_c.$$

Суммируя выписанные соотношения, приходим к неравенству (10). Следствие доказано.

При фиксированных P и M левая часть неравенства (10) достигает своего наибольшего значения, когда множество E совпадает с лемнискатой $E(P,M)$. Равенство в (10) в этом случае достигается при любых M и M_c для полинома M_cT_n. Сравнивая неравенства (9) и (10) при $E = E(P,M)$, заметим, что в случае $M_c \leq M$ лемниската E связна. Поскольку равенство в (9) достигается только тогда, когда $M_c = M$ [11, теорема 2], оценка (10) сильнее (9) для $M_c < M$. При $M_c = M$ эти оценки совпадают, а при $M_c > M$ имеем дело с оценками разных величин. Правая часть неравенства (10) в этом случае больше, чем правая часть в (9). Однако в левой части (10) при любом $E = E(P,M)$ стоит заведомо большая величина, чем в (9).

С оценкой модуля производной (8) тесно связана экстремальная задача, двойственная задаче, рассмотренной в [14]. Согласно теореме 1 этой работы имеет место равенство

$$\max_{P} \min_{\substack{z \\ P'(z)=0}} |P(z)| = (n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left|\frac{c_1^n}{c_n}\right|^{\frac{1}{n-1}},$$

где максимум берется по всем полиномам вида $P(z) = c_1z + \cdots + c_nz^n$, при фиксированных $c_1 \neq 0$, $c_n \neq 0$, $n \geq 2$. Тем самым в [14] решена одна из задач Смейла [15]. Применяя оценку (8) к полиному P/M_c в точке $z = 0$, приходим к следующему результату.

Следствие 6. *Справедливо равенство*

$$\min_{P} \max_{\substack{z \\ P'(z)=0}} |P(z)| = 2\left(\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left|\frac{c_1^n}{c_n}\right|^{\frac{1}{n-1}}, \tag{11}$$

где минимум берется по всем полиномам вида $P(z) = c_1z + \cdots + c_nz^n$, *при фиксированных* $c_1 \neq 0$, $c_n \neq 0$, $n \geq 2$.

Минимум в (11) достигается для полинома вида $P(z) = aT_n(bz - \cos(\pi/(2n)))$ при подходящих комплексных значениях a и b, зависящих от c_1 и c_n. Следствие 6 можно получить также из четырехточечной теоремы искажения для комплексных полиномов [16]. Следствия 3, 5 и 6 анонсированы автором в [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kraus D., Roth O.* Weighted distortion in conformal mapping in Euclidean, hyperbolic and elliptic geometry // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2006. V. 31. P. 111–130.
2. *Milovanovic G. V., Mitrinovic D. S., Rassias Th. M.* Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. River Edge, NJ: Singapore World Sci. Publ., 1994.
3. *Rahman Q. I., Schmeisser G.* Analytic theory of polynomials. Oxford: Clarendon Press; Oxford Univ. Press, 2002. (London Math. Soc. Monogr. (N. S.); V. 26).
4. *Eremenko A., Lempert L.* An extremal problem for polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122, N 1. P. 191–193.
5. *Erdös P.* Some of my favorite unsolved problems // A tribute to Paul Erdös / Ed. by A. Baker, B. Bollobas, A. Hajnal. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. P. 467–478.
6. *Дубинин В. Н.* Новая версия круговой симметризации с приложениями к p-листным функциям // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 7. С. 79–94.
7. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968.
8. *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
9. *Hayman W. K.* Multivalent functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. (Cambridge Tracts Math.; V. 100).

10. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. Владивосток: Дальнаука, 2009.
11. *Eremenko A.* A Markov-type inequality for arbitrary plane continua // Proc. Amer. Math. Soc. 2007. V. 135, N 5. P. 1505–1510.
12. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
13. *Pommerenke Ch.* On the derivative of a polynomial // Michigan Math. J. 1959. V. 6. P. 373–375.
14. *Дубинин В. Н.* Неравенства для критических значений полиномов // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 8. С. 63–72.
15. *Smale S.* The fundamental theorem of algebra and complexity theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1981. V. 4, N 1. P. 1–36.
16. *Dubinin V. N.* Four-point distortion theorem for complex polynomials // Complex Variables Elliptic Equations (to appear).
17. *Дубинин В. Н.* Неравенство марковского типа и нижняя оценка модулей критических значений полиномов // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 5. С. 495–497.

Статья поступила 2 апреля 2013 г.

Дубинин Владимир Николаевич
Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова, 8, Владивосток 690000;
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
`dubinin@iam.dvo.ru`