Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 517.54

КВАЗИКОНФОРМНЫЙ АНАЛОГ КРИТЕРИЯ КАРАТЕОДОРИ МЁБИУСОВОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. В. Асеев

Аннотация. В 1937 г. Каратеодори доказал, что инъективное отображение $f : G \to f(G) \subset \overline{\mathbf{C}}$ области $G \subset \overline{\mathbf{C}}$, переводящее окружности в окружности, мёбиусово. В данной статье показано, что если инъективное отображение переводит окружности в k-квазиокружности, то оно K-квазиконформно с $K \leq k + \sqrt{k^2 - 1}$.

Ключевые слова: квазиконформное отображение, мёбиусово отображение, квазиокружность, обратное изодиаметрическое неравенство.

Одним из известных геометрических критериев мёбиусовости отображений на плоскости является критерий Каратеодори.

Теорема Каратеодори [1, теорема 2, замечание]. *Пусть в области $G \subset \overline{\mathbf{C}}$ задано локально инъективное отображение $f : G \to f(G) \subset \overline{C}$. Для того чтобы отображение f было мёбиусовым, необходимо и достаточно, чтобы у любой точки $z_0 \in G$ существовала такая открытая окрестность $U(z_0) \subset G$, что для любой обобщенной окружности $S \subset U(z_0)$ ее образ $f(S)$ был обобщенной окружностью.*

Отметим, что в этой теореме не требуется непрерывности исходного отображения f.

Напомним, что *обобщенная окружность* в $\overline{\mathbf{C}}$ — это либо окружность в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, либо прямая, дополненная точкой ∞.

В теории квазиконформных отображений имеется следующее понятие квазиокружности (или *кривой с ограниченным искривлением*).

Определение [2, с. 9]. Жорданова кривая $\gamma \subset \overline{\mathbf{C}}$ называется *k-квазиокружностью*, если для любой четверки попарно различных точек $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \gamma$, занумерованных в порядке их следования на γ, выполняется неравенство

$$R(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_4| + |z_1 - z_4| \cdot |z_2 - z_3|}{|z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_4|} \leq k, \tag{0}$$

если все точки конечны, и

$$R(z_1, z_2, z_3, \infty) := \frac{|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|}{|z_1 - z_3|} \leq k.$$

В случаях, когда ∞ совпадает с z_1, z_2 или z_3, соответствующую формулу для $R(z_1, z_2, z_3, z_4)$ можно выписать, воспользовавшись ее инвариантностью относительно циклических перестановок в тетраде $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. В любом случае величину $R(z_1, z_2, z_3, z_4)$ можно вычислить по формуле (0), заменив в ней евклидовы расстояния между точками хордовыми расстояниями.

Характеристика тетрады $R(z_1, z_2, z_3, z_4)$ инвариантна при мёбиусовых преобразованиях. Поэтому любое мёбиусово преобразование переводит k-квазиокружности в k-квазиокружности. Любая k-квазиокружность с $k = 1$ является обобщенной окружностью в $\overline{\mathbf{C}}$.

Напомним метрическое определение квазиконформности для гомеоморфизмов областей в $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$.

Определение (см. [3, теорема 34.1]). Гомеоморфизм $f : \Omega \to \Omega^*$ областей в $\mathbb{R}^n$ называется *квазиконформным*, если существует такая константа $K \geq 1$, что для любой точки $x_0 \in \Omega$ выполняется оценка

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\max\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|}{\min\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|} \leq K.$$

Гомеоморфизм $f : \Omega \to \Omega^*$ областей в $\overline{\mathbb{R}}^n$ называется *квазиконформным*, если его ограничение на область $\Omega \setminus (\{\infty\} \cup \{f^{-1}(\infty)\})$ — квазиконформное отображение.

Кроме того, нам потребуется

Теорема Карамана [4, ч. 2, гл. 1, теорема 2]. *Пусть для гомеоморфизма $f : \Omega \to \Omega^*$ областей в $\mathbb{R}^n$ существует такая константа K, что для любой точки $x_0 \in \Omega$ выполняется оценка*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\omega_n \cdot [\max\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|]^n}{\operatorname{mes}_n f(B(x_0, r))} \leq K, \tag{1}$$

где $B(x_0, r)$ — открытый шар с центром x_0 и радиусом r, mes_n — обозначение для n-мерной меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ и $\omega_n = \operatorname{mes}_n(B(0, 1))$.

Тогда f является квазиконформным отображением.

Основной результат в данной заметке — следующее обобщение теоремы Каратеодори.

Теорема. *Пусть в области $G \subset \overline{\mathbf{C}}$ задано локально инъективное отображение $f : G \to f(G) \subset \overline{\mathbf{C}}$. Для того чтобы отображение f было локально квазиконформным в Ω, необходимо и достаточно существование такого $k \geq 1$, что у любой точки $z_0 \in G$ имеется такая открытая окрестность $U(z_0) \subset G$, что $f|U(z_0)$ инъективно и образ $f(S)$ любой обобщенной окружности $S \subset U(z_0)$ есть k-квазиокружность. При этом справедлива точная оценка для коэффициента квазиконформности: $K[f] \leq k + \sqrt{k^2 - 1}$.*

Доказательство достаточности разобьем на несколько шагов.

1°. Докажем, что f является локальным гомеоморфизмом. Пусть некоторая область $U \subset G$ такова, что отображение $f|U$ инъективно и для любого круга $B \subset \overline{B} \subset U$ множество $f(\partial B)$ есть k-квазиокружность. Покажем, что для любого круга $\overline{B} \subset U$ множество $f(B)$ содержится в одной из двух компонент дополнения к k-квазиокружности $f(\partial B)$. Действительно, через любую пару точек $a, b \in B$ можно провести окружность $S \subset B$. Тогда k-квазиокружность (континуум) $f(S)$ соединяет точки $f(a)$, $f(b)$ и не пересекается с $f(\partial B)$ (в силу инъективности $f|U$). Это означает, что $f(a)$ и $f(b)$ находятся в одной компоненте дополнения к $f(\partial B)$.

Покажем, что в любом круге $\overline{B} \subset U$ отображение $f|\partial B$ непрерывно. Возьмем произвольную точку $a \in \partial B$. Применив вспомогательные мёбиусовы преобразования, можно считать, что ∂B есть действительная ось, дополненная точкой ∞, при этом $a = 0 = f(a)$, $f(\infty) = \infty$. Возьмем произвольную последовательность $x_j \to 0$ на действительной оси, у которой $|x_{j+1}| < |x_j|$, и построим последовательность кругов $B_j = \{z : |z| < |x_j|\}$. Пусть j_0 таково, что $\overline{B}_{j_0} \subset U$. Тогда при всех $j > j_0$ множество $f(\partial B_j)$ есть жорданова кривая, которая ограничивает область D_j, содержащую точку $0 = f(0)$, и пересекает $f(\partial B)$ в двух точках (в силу инъективности) $f(x_j)$ и $f(-x_j)$. Жорданова кривая $f(\partial B) \subset \overline{\mathbf{C}}$ разбивается точками $f(x_j), f(-x_j)$ на две открытые дуги; ту из них, которая содержит 0, обозначим через γ_j. Тогда $f([-|x_j|, |x_j|]) \subset \overline{D}_j \cap f(\partial B) = \bar{\gamma}_j$ и $\bar{\gamma}_{j+1} \subset \bar{\gamma}_j$ при всех $j > j_0$. Положим $\bar{\gamma}_0 = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bar{\gamma}_j$. Для любой точки $c \neq 0$ на действительной оси найдется такой номер $j_1 > j_0$, что $c \notin \overline{B}_j$ при всех $j > j_1$. Это означает, что $f(c) \notin \overline{D}_j$ и, в частности, $f(c) \notin \bar{\gamma}_j$ при всех $j > j_1$. Следовательно, $f(c) \notin \bar{\gamma}_0$. Так как это верно для любой точки $c \in \partial B \setminus \{0\}$, то $f(\partial B) \cap \bar{\gamma}_0 = \varnothing$. Поскольку $\bar{\gamma}_0 \subset f(\partial B)$, в силу сюръективности отображения $f|\partial B$ это означает, что $\bar{\gamma}_0 = \{f(0)\} = \{0\}$. Следовательно, концы дуг γ_j при $j \to \infty$ сходятся к точке 0, т. е. $f(|x_j|) \to 0$ и $f(-|x_j|) \to 0$ при $j \to \infty$.

Таким образом, для любой последовательности $x_j \to 0$ получаем сходимость $f(x_j) \to f(0)$, что и доказывает непрерывность отображения $f|(\partial B)$ в произвольно заданной точке $a \in \partial B$, т. е. непрерывность отображения $f|\partial B$.

Докажем непрерывность f в любой точке $a \in U$. Использование вспомогательных мёбиусовых преобразований позволяет свести рассмотрение к случаю $a = 0 = f(a)$, $\overline{B}(0,1) \subset U$ и $f(\overline{B}(0,1)) \subset \mathbf{C}$. На окружности $\partial B(0,1)$ отметим точки $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i$, положим $d = \min\{|f(z_j)| : j = 1,2,3,4\}$, $M = \operatorname{diam} f(\overline{B}(0,1))$ и для каждого $j = 1,\ldots,4$ построим круг B_j радиуса $1/2$, ограниченный окружностью $S_j = \partial B_j$, проходящей через точки 0 и z_j. Для произвольно заданного $\varepsilon \in (0, d/3)$, воспользовавшись непрерывностью $f|S_j$, найдем такое $0 < \sigma < 1/2$, что для всех $z \in (S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4) \cap B(0,\sigma)$ выполняется оценка $|f(z)| < \varepsilon$. На каждой окружности S_j отметим дугу $\gamma_j = S_j \cap \overline{B}(0, \sigma/2)$ с концами a_j, b_j, содержащую точку 0, и область $D_j \subset B_j$, ограниченную дугой γ_j и окружностью Σ_j, проведенной через концы дуги γ_j и точку $w_j = -z_j$. Круг $Q_j \subset B(0,1)$, ограниченный окружностью Σ_j, содержит точку 0. Возьмем произвольную точку z на дуге $\tau_j = B_j \cap \Sigma_j$, отличную от точек a_j, b_j — концов этой дуги. Точки $\{w_j, a_j, z, b_j\}$ расположены последовательно на окружности Σ_j, поэтому для их образов, лежащих последовательно на k-квазиокружности $f(\Sigma_j)$, выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
&|f(z) - f(b_j)| \cdot |f(w_j) - f(a_j)| \\
&\qquad \le |f(w_j) - f(a_j)| \cdot |f(z) - f(b_j)| + |f(w_j) - b_j| \cdot |f(z) - f(a_j)| \\
&\qquad\qquad \le k \cdot |f(w_j) - f(z)| \cdot |f(a_j) - f(b_j)|. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Так как $|f(w_j) - f(a_j)| \ge d - \varepsilon > 2d/3$, $|f(a_j) - f(b_j)| \le 2\varepsilon$ и $|f(w_j) - f(z)| \le M$, из (2) следует, что $(2d/3)|f(z) - f(b_j)| \le 2kM\varepsilon$. Поэтому

$$|f(z)| \le |f(b_j)| + |f(z) - f(b_j)| \le \varepsilon + (3kM/d)\varepsilon.$$

Это означает, что $f(\tau_j) \subset \overline{B}(0, (1 + 3kM/d)\varepsilon) = \overline{B}'$ и $f(\gamma_j) \subset \overline{B}(0,\varepsilon)$. Следовательно, $f(\partial D_j) = f(\gamma_j \cup \tau_j) \subset \overline{B}'$. Но тогда $f(D_j) \subset \overline{B}'$ и (так как это верно для каждого $j = 1, \ldots, 4$) $f(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4) \subset \overline{B}'$. Таким образом, получаем открытую окрестность $V = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup \{0\}$ точки 0 такую, что для любого $z \in V$ верна оценка $|f(z)| \leq (1 + 3kM/d)\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает непрерывность отображения f в точке 0.

Итак, установлена непрерывность отображения f на множестве U. Следовательно, для любого круга $\overline{B} \subset U$ отображение $f|\overline{B}$ является гомеоморфизмом множества $\overline{B}$ на множество $f(\overline{B})$. По теореме Брауэра (см., например, [5, гл. 5, § 6]) f осуществляет гомеоморфизм открытого круга B на область $f(B)$. Тем самым $U^* = f(U)$ — область и $f : U \to U^*$ — гомеоморфизм областей.

Таким образом, у любой точки $z_0 \in \Omega$ имеется такая окрестность $U = U(z_0) \subset \Omega$, в которой $f|U$ является гомеоморфизмом областей. Значит, f — локальный гомеоморфизм в области Ω.

2°. Докажем, что для любой области $D \subset \mathbf{C}$, ограниченной k-квазиокружностью $\gamma = \partial D \subset \mathbf{C}$, выполняется *обратное изодиаметрическое неравенство*:

$$[\operatorname{diam} \gamma]^2 \leq 3k \cdot \operatorname{mes}_2 D. \tag{3}$$

Пусть точки $a, b \in \gamma$ выбраны так, что $|a - b| = \operatorname{diam} \gamma = d$. Пара точек a, b разбивает γ на две дуги γ_1 и γ_2 с концами в этих точках, при этом $D \subset B(a, d) \cap B(b, d)$. Для любой прямой $L(t)$, $0 < t < 1$, проведенной через точку $a + t(b - a)$ перпендикулярно прямолинейному отрезку с концами a и b, множество $L \cap D$ состоит из не более чем счетного числа открытых интервалов на прямой $L(t)$. Среди этих интервалов найдется такой, концы которого $c_1(t)$ и $c_2(t)$ лежат на разных дугах γ_1 и γ_2. Действительно, замкнутое множество $L(t) \cap \overline{D}$ разбивает область D на компоненты, среди которых найдутся две различные компоненты D_a и D_b такие, что $a \in \partial D_a$ и $b \in \partial D_b$. Тогда D_a содержит точки области D, сколь угодно близкие к a, и соответственно D_b содержит точки области D, сколь угодно близкие к b. Значит, мы находимся в условиях утверждения [6, гл. 5, § 3, упр. 2]), в силу которого в множестве $L(t) \cap \overline{D}$ имеется компонента F, пересекающаяся с каждой из дуг γ_1 и γ_2. Множество F является отрезком на прямой $L(t)$, непустые замкнутые множества $F \cap \gamma_1$ и $F \cap \gamma_2$ не пересекаются. Поэтому существуют такие точки $c_1 \in F \cap \gamma_1$ и $c_2 \in F \cap \gamma_2$, что

$$\lambda(t) = |c_1 - c_2| = \operatorname{dist}(F \cap \gamma_1, F \cap \gamma_2) > 0. \tag{4}$$

Так как интервал $J(t) = (c_1, c_2)$ не содержит точек $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \partial D$, то $J \subset D$.

Точки $\{a, c_1, b, c_2\}$ расположены последовательно на k-квазиокружности ∂D, поэтому

$$|a - c_1| \cdot |b - c_2| + |a - c_2| \cdot |b - c_1| \leq k \cdot |c_1 - c_2| \cdot |a - b|.$$

Учитывая, что $|a - c_1| \geq td$, $|a - c_2| \geq td$, $|b - c_1| \geq (1 - t)d$, $|b - c_2| \geq (1 - t)d$ и $|a - b| = d$, получаем оценку $|c_1 - c_2| \geq (2d/k)t(1 - t)$. Таким образом, для каждого $t \in (0, 1)$

$$\operatorname{mes}_1(L(t) \cap D) \leq (2d/k)t(1 - t).$$

Следовательно, для площади области D получаем оценку

$$\operatorname{mes}_2(D) = d \int_{t=0}^{1} \operatorname{mes}_1(L(t) \cap D)\, dt \geq \frac{d^2}{3k},$$

из которой вытекает требуемое неравенство (3): $d^2 \leq 3k \cdot \operatorname{mes}_2(D)$.

3°. Покажем квазиконформность отображения f в любой области $D \subset \Omega$, в которой f является гомеоморфизмом. Пусть $x_0 \in D$ и $x_0 \neq \infty \neq f(x_0)$. Для достаточно малых $r > 0$ замкнутый круг $\overline{B}(x_0, r)$ содержится в $D \setminus \{\infty\}$ и $f(\overline{B}(x_0, r)) \subset \mathbf{C}$. Так как его образ есть область, ограниченная k-квазиокружностью, в силу обратного изодиаметрического неравенства, установленного в 2°, имеем оценку

$$[\operatorname{diam} f(\overline{B}(x_0, r))]^2 \leq 3k \cdot \operatorname{mes}_2 f(B(x_0, r)),$$

из которой следует, что

$$\frac{\pi[\max\limits_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|]^2}{\operatorname{mes}_2 f(B(x_0, r))} \leq \frac{\pi[\operatorname{diam} f(\overline{B}(x_0, r))]^2}{\operatorname{mes}_2 f(B(x_0, r))} \leq 3\pi k$$

при всех достаточно малых $r > 0$. Следовательно, для любой точки x_0 в области $D \setminus (\{\infty\} \cup \{f^{-1}(\infty)\})$ выполняется оценка (1) с константой $3\pi k$. По теореме Карамана отсюда следует квазиконформность отображения f в области $D \setminus (\{\infty\}, \{f^{-1}(\infty)\})$. В силу устранимости одноточечного множества для квазиконформного отображения (см., например, [3, теорема 17.3]) f квазиконформно в D.

4°. Так как у каждой точки $z_0 \in \Omega$ существует открытая связная окрестность (область) $D(z_0)$, удовлетворяющая условиям, рассмотренным в 3°, то $f|D(z_0)$ квазиконформно. Таким образом, получаем локальную квазиконформность f во всей области Ω.

5°. Докажем следующее вспомогательное утверждение. Пусть последовательность односвязных областей $D_N \subset \mathbf{C}$ такова, что любой замкнутый круг $\overline{B} \subset \mathbf{C}$ содержится в D_N при всех достаточно больших N. Пусть последовательность гомеоморфизмов $f_N : D_N \to D_N^*$ равномерно на компактах в $\mathbf{C}$ сходится к невырожденному аффинному отображению $f_0 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Если каждое отображение f_N переводит окружности из D_N в k-квазиокружности, то f_0 переводит окружности в эллипсы с отношением полуосей, не превосходящим $k + \sqrt{k^2 - 1}$. Действительно, пусть задан круг $B \subset \mathbf{C}$, ограниченный окружностью $\Sigma \subset \mathbf{C}$, и пусть $\overline{B} \subset D_N$ при всех $N > N_0$. Тогда имеем топологическую сходимость последовательности k-квазиокружностей $\{f_N(\Sigma)\}$ к эллипсу $L = f_0(\Sigma)$. Пусть $0 < a < b$ — полуоси эллипса L, точки $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ — его вершины, занумерованные в порядке их расположения на кривой L, и $\alpha_j = f_0^{-1}(\beta_j)$, $j = 1, \ldots, 4$, — прообразы этих вершин на окружности Σ. Так как при каждом N справедливо неравенство (см. (0)) $R(f_N(\alpha_1), f_N(\alpha_2), f_N(\alpha_3), f_N(\alpha_4)) \leq k$ и выполняется сходимость $f_N(\alpha_j) \to \beta_j$ при $N \to \infty$, $j = 1, \ldots, 4$, в пределе при $N \to \infty$ получаем неравенство

$$|\beta_1 - \beta_2| \cdot |\beta_3 - \beta_4| + |\beta_1 - \beta_4| \cdot |\beta_2 - \beta_3| \leq k|\beta_1 - \beta_3| \cdot |\beta_2 - \beta_4|.$$

Тем самым $2(a^2 + b^2) \leq 4kab$, значит, $(b/a) \leq k + \sqrt{k^2 - 1}$, что и утверждалось.

6°. Получим точную оценку квазиконформности отображения f. Из квазиконформности вытекает, что отображение f почти всюду дифференцируемо в Ω и его якобиан почти всюду отличен от нуля. Поэтому достаточно получить оценку квазиконформности для касательного отображения $T_f(x_0)$ в произвольно взятой точке $x_0 \in \Omega \setminus \{\infty\}$, в которой $f(x_0) \neq \infty$, отображение f дифференцируемо и имеет ненулевой якобиан. Касательное отображение в такой точке является невырожденным аффинным отображением, и последовательность отображений $f_N(x) := x_0 + N \cdot f(x_0 + (x - x_0)/N)$ сходится при $N \to \infty$

к $T_f(x_0)$ равномерно на компактах в $\mathbf{C}$. В силу формулы, полученной в 5°, $K[T_f(x_0)] \leq k + \sqrt{k^2 - 1}$. Это означает, что f локально K-квазиконформно в Ω с оценкой квазиконформности $K \leq k + \sqrt{k_2 - 1}$. Эта оценка обращается в равенство в случае аффинного отображения f, переводящего круг в эллипс с отношением полуосей, равным $k + \sqrt{k^2 - 1}$.

Итак, достаточность в теореме доказана.

Доказательство необходимости. Нужно доказать, что при любом локально K-квазиконформном отображении $f : \Omega \to \Omega^* \subset \overline{\mathbf{C}}$ области $\Omega \subset \overline{\mathbf{C}}$ каждая точка $z_0 \in \Omega$ имеет такую окрестность U, что $f|U$ инъективно и для любого замкнутого круга $\overline{B} \subset U$ множество $f(\partial B)$ является k-квазиокружностью с некоторым k, зависящим только от K.

Пусть задана точка $a \in \Omega \setminus \{\infty\}$, в которой $f(a) \neq \infty$. В силу локальной гомеоморфности отображения f существует открытый круг $B(a, r)$, в котором ограничение $f|B(a, r)$ является инъективным K-квазиконформным отображением. Построим круг $B(a, r/2)$ и положим $D = B(a, r) \setminus \overline{B}(a, r/2)$. Применив теорему [7, II, § 8, с. 100] о квазиконформном продолжении с компакта, построим квазиконформное отображение $f^* : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$, совпадающее с f в круге $B(a, r/2)$. При этом коэффициент квазиконформности отображения f^* имеет верхнюю оценку $K[f^*] \leq K^*$, зависящую только от K (так как в нашем случае область $B(x_0, r)$ и компакт $\overline{B}(x_0, r/2)$, от которых зависит оценка K^*, фиксированы с точностью до преобразований подобия).

Для произвольно заданной окружности $\Sigma \subset B(a, r/2)$ имеем равенство $f(\Sigma) = f^*(\Sigma)$. Пусть точки $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ расположены последовательно на жордановой кривой $f(\Sigma)$ и $z_j = f^{-1}(w_j)$, $j = 1, \ldots, 4$, — их прообразы на окружности Σ. Так как $R(z_1, z_2, z_3, z_4) = 1$, то

$$\frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_4|}{|z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_4|} \leq 1, \quad \frac{|z_1 - z_4| \cdot |z_2 - z_3|}{|z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_4|} \leq 1.$$

Тогда (см. [8, лемма 16]) существует k^*, зависящее только от $K[f^*]$, такое, что

$$\frac{|w_1 - w_2| \cdot |w_3 - w_4|}{|w_1 - w_3| \cdot |w_2 - w_4|} \leq k^*, \quad \frac{|w_1 - w_4| \cdot |w_2 - w_3|}{|w_1 - w_3| \cdot |w^2 - w_4|} \leq k^*.$$

Отсюда $R(w_1, w_2, w_3, w_4) \leq 2k^*$. Следовательно, жорданова кривая $f(\Sigma)$ является $(2k^*)$-квазиокружностью, где k^* зависит только от K.

Случай, когда $a = \infty$ или $f(a) = \infty$, сводится к случаю $a = 0 = f(a)$ использованием мёбиусовых преобразований $\mu, \nu : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ таких, что $\mu(a) = 0$, $\nu(f(a)) = 0$, и рассмотрением отображения $g = \nu \circ f \circ \mu^{-1}$ (мёбиусовы преобразования не влияют на квазиконформность и переводят h-квазиокружности в h-квазиокружности).

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. В частном случае, при $k = 1$, получаем в качестве следствия теорему Каратеодори. Действительно, обобщенные окружности — 1-квазиокружности, 1-квазиконформное отображение — это либо конформное, либо антиконформное отображение, 1-квазиконформное отображение круга на круг — это либо дробно-линейное отображение, либо комплексно сопряженное к дробно-линейному. Пусть локально инъективное отображение $f : G \to f(G) \subset \overline{\mathbf{C}}$ области $G \subset \overline{\mathbf{C}}$ удовлетворяет условию: у каждой точки $z_0 \in G$ имеется такая окрестность $U(z_0) \subset G$, что для любой обобщенной окружности $S \subset U(z_0)$

ее образ $f(S)$ есть обобщенная окружность. Тогда из основной теоремы следует, что отображение f является локально 1-квазиконформным отображением в области G. Тем самым у каждой точки $z_0 \in G$ имеется окрестность $U(z_0)$, в которой отображение f однолистно и переводит некоторый круг в круг, т. е. реализуется либо дробно-линейной функцией, либо функцией, комплексно сопряженной к дробно-линейной. В силу внутренней теоремы единственности для аналитических функций отображение f совпадает на всей области G либо с дробно-линейным отображением, либо с отображением, комплексно сопряженным к дробно-линейному, т. е. является мёбиусовым отображением в области G.

Отметим также очевидное

Следствие. *Пусть инъективное отображение $f : G \to f(G) \subset \overline{\mathbf{C}}$ области $G \subset \overline{\mathbf{C}}$ переводит окружности $S \subset G$ в k-квазиокружности. Тогда f является однолистным K-квазиконформным отображением с коэффициентом квазиконформности $K[f] \leq k + \sqrt{k^2 - 1}$.*

Замечание 2. Если отображение $f : S \to f(S) \subset \overline{\mathbf{C}}$ обобщенной окружности $S \subset \overline{\mathbf{C}}$ ω-квазимёбиусово с функцией искажения $\omega(t)$, то жорданова кривая $f(S)$ является k-квазиокружностью, где k зависит только от ω. Поэтому любое локально инъективное отображение $f : D \to f(D) \subset \overline{\mathbf{C}}$ области $D \subset \overline{\mathbf{C}}$, являющееся ω-квазимёбиусовым на малых окружностях (в терминах работы [9]), удовлетворяет условиям основной теоремы и, следовательно, является локально гомеоморфным квазиконформным отображением. Поэтому в доказательстве теоремы 1.4 из [9, § 3] (доказательство квазиконформности отображения) можно заменить ссылкой на основную теорему данной заметки.

Замечание 3. Имеется многомерный аналог теоремы Каратеодори (см. [10, теорема 6.1]). Любое инъективное отображение $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^n$ области $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ $(n \geq 3)$, локально переводящее сферы в сферы, является мёбиусовым (т. е. 1-квазиконформным) отображением. Естественно возникнет вопрос о квазиконформности отображений, локально переводящих сферы в k-квазисферы, или пространственных отображений, локально переводящих окружности в k-квазиокружности. Однако автор не видит какого-либо подхода к решению этих проблем.

Автор признателен рецензенту за весьма полезные замечания по тексту этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carathéodory C.* The most general transformations of plane regions which transform circles into circles // Bull. Amer. Math. Soc. 1937. V. 43. P. 537–579.
2. *Rickman S.* Characterization of quasiconformal arcs // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I Math. 1966. V. 395. P. 1–30.
3. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. V. 229. P. 1–144.
4. *Caraman P.* n-Dimensional quasiconformal (QCf) mappings. Nubbridge Wells, Kent, England: Editura Acad. Române and Abacus Press, 1974.
5. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
6. *Newman M. H. A.* Elements of the topology of plane sets of points. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1939.
7. *Lehto O., Virtanen K.* Quasikonforme Abbildungen. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1965.

8. *Ahlfors L., Bers L.* Riemann's mapping theorem for variable metrics // Ann. Math. 1960. V. 72. P. 385–404.

9. *Асеев В. В.* Квазимёбиусовость на малых окружностях и квазиконформность // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 258–269.

10. *Beardon A. F., Minda D.* Sphere-preserving maps in inversive geometry // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 130, N 4. P. 987–998.

Статья поступила 31 мая 2013 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru