Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 512.54

О ВТОРЫХ КОММУТАНТАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП АЛЬПЕРИНА

Б. М. Веретенников

Аннотация. *Группой Альперина* назовем группу, в которой коммутант любой 2-порожденной подгруппы цикличен. Альперин доказал, что при нечетном простом p все конечные p-группы с указанным свойством метабелевы. Однако конечные 2-группы Альперина могут быть и неметабелевыми. Доказано, что для любой конечной абелевой группы H существует конечная группа Альперина G, для которой G'' изоморфен H.

Ключевые слова: группа Альперина, коммутант, задание группы образующими и определяющими соотношениями.

Введение

Произвольная группа, конечная или бесконечная, называется *группой Альперина*, если любая 2-порожденная подгруппа этой группы имеет циклический коммутант. В [1] Альперин доказал, что конечные p-группы с таким свойством при нечетном простом p метабелевы, т. е. имеют абелев коммутант.

Однако конечные 2-группы Альперина могут быть и неметабелевыми: в [2] построен пример 2-группы Альперина порядка 2^{10}, порожденной тремя инволюциями, в которой второй коммутант имеет порядок 2, а в [3] приведены независимые одна от другой серии конечных 2-групп Альперина со вторыми циклическими коммутантами порядков 2 и 4 и доказано, что второй коммутант конечной 2-группы Альперина, порожденной тремя инволюциями, цикличен. Далее, в [4, 5] построены примеры конечных 2-групп Альперина с циклическими и элементарными абелевыми вторыми коммутантами сколь угодно большого порядка (соответствующие результаты анонсированы в тезисах конференций [6, 7]). В тезисах конференции [8] анонсирован также результат о существовании бесконечных групп Альперина с бесконечными циклическим и элементарным абелевым вторым коммутантом соответственно. Отметим также для полноты, что в [9] доказана метабелевость конечной 2-группы Альперина с 2-порожденным коммутантом.

В настоящей статье доказано, что второй коммутант конечной группы Альперина может быть любой конечной абелевой группой, а второй коммутант конечной 2-группы Альперина может быть любой конечной абелевой 2-группой. Эти два результата легко следуют из основной теоремы 1 статьи, в которой построена конечная группа Альперина G, порожденная n инволюциями, где $n \geq 3$, с $G'' \simeq Z_m \times \dots \times Z_m$, где m — произвольное натуральное число, ранг G'' равен C_{n-1}^2 и $G'' < Z(G)$.

Используемые в статье обозначения и определения стандартны (см., например, [10]).

Будем использовать следующие обозначения: $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ — коммутатор элементов a и b в группе G; $d(G)$ — минимальное число порождающих группы G; $\prod$ — знак прямого произведения групп; G_m — m-й член нижнего центрального ряда группы G, в частности, $G_3 = [G', G]$; $\exp(G)$ — экспонента, или период, конечной группы G, т. е. наименьшее общее кратное порядков всех элементов группы G; Z_m — циклическая группа порядка m; $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; id_G — тождественное преобразование группы G; $G = A \leftthreetimes B$ — полупрямое произведение групп A и B, т. е. $A \trianglelefteq G$, $A \cap B = \{1\}$.

Напомним, что конечная группа называется *гомоциклической ранга* k, если она изоморфна прямому произведению k экземпляров одной и той же циклической группы: $G \simeq Z_m \times \cdots \times Z_m$, где m — натуральное число.

Условимся считать все встречающиеся ниже индексы i, j, k, l, s, t положительными целыми числами, если не оговаривается противное.

В статье доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть m, n — положительные целые числа, $n \geq 3$, группа G задана образующими a_i, f_{ij}, τ_{ijk}, где $1 \leq i, j, k \leq n$, и определяющими соотношениями:*

(1) $a_i^2 = 1$,
(2) $[a_i, a_j] = f_{ij}$,
(3) $[f_{ij}, a_k] = f_{jk}^2 f_{ki}^2 \tau_{ijk}^{-2}$,
(4) $[\tau_{ijk}, a_s] = 1$,
(5) $f_{ij}^{4m} = 1$,
(6) $\tau_{ijk}^m = 1$,
(7) $[f_{ij}, f_{ks}] = \tau_{kjs}\tau_{ksi}$,
(8) $(f_{ij} f_{jk} f_{ki})^4 = \tau_{ijk}$,
(9) $\tau_{sij}\tau_{sjk}\tau_{ski} = \tau_{ijk}$,

где для всех соотношений индексы i, j, k, s — любые натуральные числа из $[1, n]$.

Тогда имеют место следующие утверждения.

I. *Группа G имеет нормальный ряд*

$$\begin{aligned} 1 < \langle \tau_{ijk} \mid 1 \leq i,j,k \leq n \rangle = G'' < G''\langle f_{12}\rangle < G''\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle \\ < \cdots < G''\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle \ldots \langle f_{1n}\rangle = H < H\langle f_{23}\rangle < H\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle \\ < \cdots < H\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle \ldots \langle f_{n-1,n}\rangle = G' < G'\langle a_1\rangle < G'\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle \\ < \cdots < G'\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle \ldots \langle a_n\rangle = G, \end{aligned}$$

в котором первая фактор-группа имеет порядок $m^{C_{n-1}^2}$, следующие $n-1$ фактор-групп циклические порядка $4m$, затем C_{n-1}^2 фактор-групп циклические порядка 4 и последние n фактор-групп циклические порядка 2.

II. *$d(G) = n$, $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $|a_i| = 2$ для всех i, $|G| = m^{C_n^2} 2^{n^2}$, $d(G') = C_n^2$, $G' = \langle f_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle$, $|G'| = m^{C_n^2} 2^{n^2 - n}$, $G'' = \prod\limits_{2 \leq i < j \leq n} \langle \tau_{1ij} \rangle$ — гомоциклическая группа периода m и ранга C_{n-1}^2, $G'' < Z(G)$.*

III. *G — группа Альперина, причем для произвольных элементов x, y из G выполняется хотя бы одно из двух равенств: $[x, y, y] = 1$ или $[x, y, y] = [x, y]^{-2}$.*

Теорема 2. *Для любой конечной абелевой группы H существует конечная группа Альперина G, порожденная инволюциями, для которой G'' изоморфен H и $G'' < Z(G)$.*

Теорема 3. *Для любой конечной абелевой 2-группы H существует конечная 2-группа Альперина G, порожденная инволюциями, для которой G'' изоморфен H и $G'' < Z(G)$.*

В вычислениях автор использует основные коммутаторные тождества $[ab, c] = [a, c]^b[b, c]$, $[a, bc] = [a, c][a, b]^c$ и тождество $[a, b, c][b, c, a][c, a, b] = 1$, выполняемое в любой метабелевой группе. Кроме того, часто будет использоваться тот факт, что если в группе G выполняется условие $[G_2, G_3] = 1$, то для любых $x \in G$, $t \in G'$ и любого целого числа k верно равенство $[t, x]^k = [t^k, x]$.

Особо выделяем следующие предложения.

Предложение 1. *Если в группе G выполняется условие $G' \leq Z(G)$, то для любых $x, y \in G$ и любого целого числа k выполняется $(xy)^k = x^k y^k [y, x]^{\frac{k(k-1)}{2}}$.*

Доказательство. При $k \geq 0$ эта формула отмечена в [10, с. 214], а для $k < 0$ см. лемму 3 в [4].

Предложение 2. *Пусть G — группа, конечная или бесконечная. Тогда G — группа Альперина тогда и только тогда, когда для любых элементов a, b из G тройные коммутаторы $[a, b, a], [a, b, a^{-1}], [a, b, b], [a, b, b^{-1}]$ — степени коммутатора $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть G — группа Альперина и $a, b \in G$. Обозначим $\langle a, b\rangle = H$. Тогда $\langle [a, b]\rangle \trianglelefteq H$, так как H' цикличен. Поскольку, как известно, $H' = \langle [a, b]^x \mid x \in H\rangle$, то $H' = \langle [a, b]\rangle$, и необходимость доказана.

Обратно, если $[a, b]^a$, $[a, b]^{a^{-1}}$, $[a, b]^b$, $[a, b]^{b^{-1}}$ — степени коммутатора $[a, b]$, то для любого x из H выполняется $[a, b]^x \in \langle [a, b]\rangle$, откуда $H' = \langle [a, b]\rangle$ и G — группа Альперина ввиду произвольности выбора a, b. Достаточность доказана.

Следствие. *Пусть G — конечная группа. Тогда G — группа Альперина в том и только том случае, когда для любых элементов a, b из G тройные коммутаторы $[a, b, a]$ и $[a, b, b]$ — степени коммутатора $[a, b]$.*

Следующие два предложения — это леммы 1 и 2 из [5].

Предложение 3. *Пусть конечная группа H задана образующими $b_1, \ldots, b_k$ и множеством определяющих соотношений*

$$w_1(b_1, \ldots, b_k) = 1, \ldots, w_s(b_1, \ldots, b_k) = 1.$$

Пусть задано отображение φ, определенное на множестве $\{b_1, \ldots, b_k\} : b_i \overset{\varphi}{\mapsto} v_i(b_1, \ldots, b_k)$, $i \in [1, k]$, где $v_i(b_1, \ldots, b_k)$ — групповое слово для каждого i, причем выполнены два условия:

(1) $\langle v_1(b_1, \ldots, b_k), \ldots, v_k(b_1, \ldots, b_k)\rangle = H$,

(2) *φ сохраняет все определяющие соотношения группы H, т. е. $w_i\big(b_1^{\varphi}, \ldots, b_k^{\varphi}\big) = 1$ в группе H для любого $i \in [1, s]$.*

Тогда отображение φ однозначно продолжается до автоморфизма ψ группы H, причем для любого x из H если x представлен словом $w(b_1, \ldots, b_k)$, то $x^{\psi} = w\big(b_1^{\varphi}, \ldots, b_k^{\varphi}\big)$.

Предложение 4. *Пусть m — натуральное число и H — конечная группа, заданная образующими $b_1, \ldots, b_k$ и множеством определяющих соотношений $w_1(b_1, \ldots, b_k) = 1, \ldots, w_s(b_1, \ldots, b_k) = 1$.*

Рассмотрим группу G с образующими $b_1, \ldots, b_k, b$, множество определяющих соотношений которой состоит из соотношений, указанных выше, и новых *соотношений* $b^m = w(b_1,\dots,b_k)$, $b_i^b = v_i(b_1,\dots,b_k)$ *для* $i=\overline{1,k}$, *где* w *и* v_i — *некоторые групповые слова от* $b_1,\dots,b_k$, *причем*

$$\langle v_1(b_1,\dots,b_k),\dots,v_k(b_1,\dots,b_k)\rangle = H$$

и отображение φ, *определенное формулой* $b_i \overset{\varphi}{\mapsto} v_i(b_1,\dots,b_k)$ *на множестве* $\{b_1,\dots,b_k\}$, *сохраняет все определяющие соотношения группы* H, *указанные выше. Пусть* ψ — *автоморфизм группы* H, *индуцированный отображением* φ, *и выполнены условия:*

1) $w\big(b_1^{\varphi},\dots,b_k^{\varphi}\big) = w(b_1,\dots,b_k)$, *т. е.* $w(b_1,\dots,b_k)$ *остается неподвижным под действием* ψ;

2) ψ^m — *внутренний автоморфизм группы* H, *индуцированный элементом* $w(b_1,\dots,b_k)$.

Тогда G — *циклическое расширение группы* H *с фактор-группой* G/H *порядка* m, *причем* $G/H = \langle bH\rangle$.

Доказательство пп. I и II теоремы 1

Лемма 1. *В группе* G *из формулировки теоремы* 1 *выполняются следующие дополнительные соотношения:*

(a) $\tau_{iik} = \tau_{iki} = \tau_{kii}$ *для любых* $i,k \in [1,n]$, *т. е. если в тройке индексов* (i,j,k) *есть два одинаковых, то* $\tau_{ijk} = 1$;

(b) $\tau_{ijk} = \tau_{kij}$ *для любых* $i,j,k \in [1,n]$, *т. е. при циклическом сдвиге индексов в* τ_{ijk} *рассматриваемый элемент не меняется;*

(c) $\tau_{ijk} = \tau_{jik}^{-1}$ *для любых* $i,j,k \in [1,n]$, *т. е. имеем с учетом* (b), *что при перемене местами любых двух индексов в* τ_{ijk} *получается элемент, обратный к исходному;*

(d) $\langle \tau_{ijk} \mid 1 \le i,j,k \le n\rangle = \langle \tau_{1jk} \mid 2 \le j < k \le n\rangle$.

Доказательство. П. (a) следует из соотношения (8) в формулировке теоремы 1, например, $\tau_{iik} = (f_{ii}f_{ik}f_{ki})^4 = 1$.

П. (b) вытекает из соотношения (9): $\tau_{kij} = \tau_{ski}\tau_{sij}\tau_{sjk} = \tau_{sij}\tau_{sjk}\tau_{ski} = \tau_{ijk}$ в силу перестановочности элементов вида τ (s — любой фиксированный индекс из $[1,n]$).

Для доказательства п. (c) снова с учетом (8) имеем $\tau_{jik} = (f_{ji}f_{ik}f_{kj})^4 = (f_{jk}f_{ki}f_{ij})^{-4} = \tau_{jki}^{-1} = \tau_{ijk}^{-1}$ в силу п. (b).

Наконец, п. (d) следует из последнего соотношения в формулировке теоремы 1. Лемма 1 доказана.

Заметим, что группа G имеет нормальный ряд

$$\begin{aligned}1 \le \langle \tau_{ijk} \mid 1 \le i,j,k \le n\rangle = G'' \le G''\langle f_{12}\rangle \le G''\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle \\ \le \dots \le G''\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle\dots\langle f_{1n}\rangle = H \le H\langle f_{23}\rangle \le H\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle \\ \le \dots \le H\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle\dots\langle f_{n-1,n}\rangle = G' \le G'\langle a_1\rangle \le G'\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle \\ \le \dots \le G'\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle\dots\langle a_n\rangle = G,\end{aligned}$$

в котором первая фактор-группа порядка $\le m^{C_{n-1}^2}$ в силу п. (d) леммы 1, следующие $n-1$ фактор-групп циклические порядка $\le 4m$, затем C_{n-1}^2 фактор-групп циклические порядка ≤ 4 и последние n фактор-групп циклические порядка ≤ 2. Следовательно,

$$|G| \le m^{C_{n-1}^2}(4m)^{n-1}4^{C_{n-1}^2}2^n = m^{C_{n-1}^2+n-1}2^{2n-2+(n-1)(n-2)+n} = m^{C_n^2}2^{n^2}.$$

Таким образом, для доказательства пп. I и II теоремы 1 нужно построить конкретную группу $\widehat{G} = \langle \tau_{ijk}, f_{ij}, a_i \mid 1 \le i, j, k \le n \rangle$ порядка $m^{C_n^2} 2^{n^2}$, удовлетворяющую утверждениям пп. I и II теоремы 1, в которой для всех образующих τ_{ijk}, f_{ij}, a_i выполняются соотношения (1)–(9) теоремы 1.

Начнем построение с $T = \prod\limits_{2 \le j < k \le n} \langle \tau_{1jk} \rangle$ — гомоциклической группы ранга C_{n-1}^2 и периода m. Символ τ_{ijk} определен пока только при $i = 1, 2 \le j < k \le n$.

При $n \ge j > k \ge 2$ определим элемент τ_{1jk} равным τ_{1kj}^{-1}, а также будем считать, что $\tau_{11j} = \tau_{1j1} = \tau_{1jj} = 1$ для любого $j \in [1, n]$. Тем самым символ $\tau_{1\alpha\beta}$ определен для любых целых $\alpha, \beta \in [1, n]$. Далее, при $i \ne 1$ и любых $j, k \in [1, n]$ положим $\tau_{ijk} = \tau_{1ij}\tau_{1jk}\tau_{1ki}$, и, следовательно, символ τ_{ijk} определен теперь при любых $i, j, k \in [1, n]$.

Лемма 2. *Пусть i, j, k, s — произвольные целые числа из $[1, n]$. Тогда в группе T выполняются условия:*

(1) $\tau_{ijk} = \tau_{1ij}\tau_{1jk}\tau_{1ki}$;

(2) $\tau_{ijk} = \tau_{kij}$, *т. е. элемент τ инвариантен относительно циклического сдвига его индексов*;

(3) *если в тройке (i, j, k) имеются два одинаковых индекса, то $\tau_{ijk} = 1$;*

(4) *при перемене местами двух индексов в τ_{ijk} получается элемент, обратный к исходному;*

(5) $\tau_{sij}\tau_{sjk}\tau_{ski} = \tau_{ijk}$.

Доказательство. Для доказательства равенства (1) достаточно рассмотреть случай $i = 1$. Считаем правую часть равенства: $\tau_{11j}\tau_{1jk}\tau_{1k1} = \tau_{1jk}$, что и требовалось. Далее, имеем

$$\tau_{ijk} = \tau_{1ij}\tau_{1jk}\tau_{1ki} = \tau_{1ki}\tau_{1ij}\tau_{1jk} = \tau_{kij},$$

и (2) доказано. Подобным образом получим $\tau_{iik} = \tau_{1ii}\tau_{1ik}\tau_{1ki} = 1$, и, следовательно, с учетом (2) п. (3) доказан. Далее,

$$\tau_{jik} = \tau_{1ji}\tau_{1ik}\tau_{1kj} = (\tau_{1jk}\tau_{1ki}\tau_{1ij})^{-1} = \tau_{jki}^{-1} = \tau_{ijk}^{-1},$$

и утверждение 4 доказано. Наконец,

$$\tau_{sij}\tau_{sjk}\tau_{ski} = (\tau_{1si}\tau_{1ij}\tau_{1js})(\tau_{1sj}\tau_{1jk}\tau_{1ks})(\tau_{1sk}\tau_{1ki}\tau_{1is}) = \tau_{1ij}\tau_{1jk}\tau_{1ki} = \tau_{ijk}.$$

Лемма 2 доказана.

Заметим, что леммы 1 и 2 очень похожи, но относятся к разным группам и несколько отличаются в формулировках и доказательствах.

На следующем этапе построения требуемой группы $\widehat{G}$ последовательно в качестве множителей к группе T присоединим циклические группы $\langle f_{12} \rangle, \ldots, \langle f_{1n} \rangle$ порядка $4m$.

Заметим сначала, что группу T можно считать заданной образующими τ_{1jk} и определяющими соотношениями $\tau_{1jk}^m = 1$, $[\tau_{1jk}, \tau_{1st}] = 1$, где $2 \le j < k \le n$, $2 \le s < t \le n$.

На первом шаге рассмотрим группу T_2, заданную образующими группы T и новым образующим f_{12} с добавочными определяющими соотношениями $\tau_{1jk}^{f_{12}} = \tau_{1jk}$ для любых j, k с условием $2 \le j < k \le n$, $f_{12}^{4m} = 1$. Ясно, что $T_2 = T \times \langle f_{12} \rangle$.

Предположим, что на $(k-1)$-м шаге, где $k < n$, построили группу $T_k = T\langle f_{12} \rangle, \ldots, \langle f_{1k} \rangle$, удовлетворяющую следующим условиям.

1. T_k порождена образующими τ_{1ij} и f_{1s}, где $2 \le i < j \le n$, $2 \le s \le k$, с определяющими соотношениями группы T и дополнительными определяющими соотношениями

$$f_{1s}^{4m} = 1, \quad \tau_{1ij}^{f_{1s}} = \tau_{1ij}, \quad [f_{1s}, f_{1t}] = \tau_{1st},$$

где $2 \le i < j \le n$, $2 \le s, t \le k$.

2. T_k имеет нормальный ряд

$$1 < T < T\langle f_{12}\rangle < \dots < T\langle f_{12}\rangle \dots \langle f_{1k}\rangle = T_k,$$

в котором начиная со второй все фактор-группы — циклические группы порядка $4m$.

Заметим, что последнее равенство в условии 1 можно записать в виде $[f_{1s}, f_{1t}] = \tau_{1st}\tau_{1t1}$, что соответствует равенству (7) в формулировке теоремы 1.

Рассмотрим на следующем шаге группу T_{k+1} с образующими группы T_k и новым образующим $f_{1,k+1}$ и добавочными определяющими соотношениями

$$f_{1,k+1}^{4m} = 1, \quad [\tau_{1ij}, f_{1,k+1}] = 1, \quad [f_{1s}, f_{1,k+1}] = \tau_{1,s,k+1},$$

т. е. $f_{1s}^{f_{1,k+1}} = f_{1s}\tau_{1,s,k+1}$, где $2 \le i < j \le n$, $2 \le s \le k$.

Снова заметим, что равенство $[f_{1s}, f_{1,k+1}] = \tau_{1,s,k+1}$ можно записать в виде $[f_{1s}, f_{1,k+1}] = \tau_{1,s,k+1}\tau_{1,k+1,1}$, что соответствует равенству (7) в формулировке теоремы 1.

Тогда $f_{1,k+1}$ задает отображение φ на множестве образующих группы T_k:

$$\tau_{1ij} \overset{\varphi}{\mapsto} \tau_{1ij}, \quad f_{1s} \overset{\varphi}{\mapsto} f_{1s}\tau_{1,s,k+1}.$$

Очевидно, что образы φ порождают T_k. Проверим, что φ сохраняет определяющие соотношения группы T_k в смысле предложения 3. Ясно, что соотношения вида

$$\tau_{1jk}^{m} = 1, \quad [\tau_{1jk}, \tau_{1st}] = 1, \quad [\tau_{1jk}, f_{1s}] = 1$$

сохраняются очевидным образом. Проверим сохранение соотношения

$$[f_{1s}, f_{1t}] = \tau_{1st}, \qquad \text{где } 1 \le s, t \le k.$$

Имеем

$$[f_{1s}^{\varphi}, f_{1t}^{\varphi}] = [f_{1s}\tau_{1,s,k+1}, f_{1t}\tau_{1,t,k+1}] = [f_{1s}, f_{1t}] = \tau_{1st} = \tau_{1st}^{\varphi},$$

где второе равенство следует из того, что $T \le Z(T_k)$. Далее,

$$\left(f_{1s}^{\varphi}\right)^{4m} = (f_{1s}\tau_{1,s,k+1})^{4m} = 1 \quad \text{для любого } s \in [1, k],$$

и, наконец,

$$\tau_{1ij}^{\widehat{\varphi}^{4m}} = \tau_{1ij}, \quad f_{1s}^{\widehat{\varphi}^{4m}} = f_{1s}\tau_{1,s,k+1}^{4m} = f_{1s},$$

где $\widehat{\varphi}$ — автоморфизм группы T_k, индуцированный отображением φ по предложению 3. Таким образом,

$$T_{k+1} = T_k \leftthreetimes \langle f_{1,k+1}\rangle, \qquad \text{где } |f_{1,k+1}| = 4m.$$

Отметим также, что $[f_{1,k+1}, f_{1s}] = \tau_{1,s,k+1}^{-1} = \tau_{1,k+1,s}$ по лемме 2. Следовательно, на $(n-1)$-м шаге наших построений получим группу

$$T_n = T \leftthreetimes \langle f_{12}\rangle \leftthreetimes \dots \leftthreetimes \langle f_{1n}\rangle$$

с образующими τ_{1ij} группы T, образующими $f_{12}, \ldots, f_{1n}$ и определяющими соотношениями группы T, а также определяющими соотношениями

$$f_{1s}^{4m} = 1, \quad [f_{1s}, f_{1t}] = \tau_{1st}, \quad \text{где } 1 \leq s, t \leq n,$$

причем для любого $s \in [2, n]$ выполняется $|f_{1s}| = 4m$ в точности.

В начале следующего этапа построения обозначим $T_n = S$ и построим группу $S\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle \ldots \langle f_{n-1,n}\rangle$ с присоединенными в качестве множителей циклическими группами $\langle f_{ij}\rangle$, где $2 \leq i < j \leq n$, нижеследующим образом.

Введем предварительно на множестве пар (i, j), где $i < j$, лексикографический порядок, т. е. будем считать, что $(i, j) < (k, l)$ тогда и только тогда, когда $i < k$ или $i = k, j < l$.

Пусть (k, l) — фиксированная пара, где $2 \leq k < l$, $(k, l) \neq (n-1, n)$, и предположим, что построена группа $S_{kl} = S\langle f_{12}\rangle \ldots \langle f_{ij}\rangle \ldots \langle f_{kl}\rangle$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. S_{kl} порождена образующими группы T и элементами f_{ij}, где $1 \leq i < j \leq n$ и $(i, j) \leq (k, l)$ в лексикографическом порядке, с определяющими соотношениями группы T и с определяющими соотношениями:

$$f_{1i}^{4m} = 1 \quad \text{при } 2 \leq i \leq n,$$

$$[\tau_{1st}, f_{ij}] = 1 \quad \text{при } 2 \leq s < t \leq n,\ 1 \leq i < j \leq n,\ (i, j) \leq (k, l),$$

$$[f_{st}, f_{ij}] = \tau_{itj}\tau_{ijs} \quad \text{при } 1 \leq s < t \leq n,\ 1 \leq i < j \leq n,\ (i, j) \leq (k, l),\ (s, t) \leq (k, l),$$

$$f_{ij}^4 f_{1j}^{-4} f_{1i}^4 = \tau_{ij1}^7 \quad \text{при } 2 \leq i < j \leq n,\ (i, j) \leq (k, l).$$

2. S_{kl} имеет ряд нормальных подгрупп

$$S < S\langle f_{23}\rangle < S\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle < \cdots < S\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle \ldots \langle f_{kl}\rangle = S_{kl},$$

в котором все фактор-группы изоморфны Z_4 и в построении подгрупп которого последовательно участвуют подгруппы $\langle f_{ij}\rangle$ для всех i, j с условием $2 \leq i < j \leq n$ и $(i, j) \leq (k, l)$.

Рассмотрим на следующем шаге группу S_{vw}, где $2 \leq v < w \leq n$ и (v, w) — пара, следующая за парой (k, l) в лексикографическом порядке, с образующими группы S_{kl}, новым образующим f_{vw}, с определяющими соотношениями группы S_{kl} и добавленными определяющими соотношениями

$$[\tau_{1ij}, f_{vw}] = 1, \quad [f_{st}, f_{vw}] = \tau_{vtw}\tau_{vws},$$

где $2 \leq i < j \leq n$, $1 \leq s < t \leq n$, $(s, t) \leq (k, l)$, и

$$f_{vw}^4 f_{1w}^{-4} f_{1v}^4 = \tau_{vw1}^7.$$

Тогда элемент f_{vw} задает отображение ψ на множестве образующих группы S_{kl}:

$$\tau_{1ij} \overset{\psi}{\mapsto} \tau_{1ij}, \quad f_{st} \overset{\psi}{\mapsto} f_{st}\tau_{vtw}\tau_{vws}.$$

Очевидно, что образы ψ порождают S_{kl}. Проверим, что ψ сохраняет определяющие соотношения группы S_{kl} в смысле предложения 3. Ясно, что соотношения группы T и соотношения вида

$$[\tau_{1jk}, f_{st}] = 1, \quad [f_{st}, f_{ij}] = \tau_{itj}\tau_{ijs}, \quad f_{1i}^{4m} = 1$$

сохраняются очевидным образом.

Проверим сохранение соотношения вида $f_{ij}^4 f_{1j}^{-4} f_{1i}^4 = \tau_{ij1}^7$. Имеем

$$\begin{aligned}(f_{ij}^{\psi})^4 (f_{1j}^{\psi})^{-4} (f_{1i}^{\psi})^4 &= (f_{ij}\tau_{vjw}\tau_{vwi})^4 (f_{1j}\tau_{vjw}\tau_{vw1})^{-4} (f_{1i}\tau_{viw}\tau_{vw1})^4 \\ &= f_{ij}^4 f_{1j}^{-4} f_{1i}^4 (\tau_{vjw}\tau_{vwi}\tau_{vjw}^{-1}\tau_{vw1}^{-1}\tau_{viw}\tau_{vw1})^4 = f_{ij}^4 f_{1j}^{-4} f_{1i}^4 = \tau_{ij1}^7 = (\tau_{ij1}^{\psi})^7,\end{aligned}$$

где во втором равенстве использовался п. (4) леммы 2.

Заметим, что определяющее соотношение $f_{vw}^4 f_{1w}^{-4} f_{1v}^4 = \tau_{vw1}^7$ равносильно $f_{vw}^4 = \tau_{vw1}^7 f_{1v}^{-4} f_{1w}^4$. Поскольку ψ сохраняет все определяющие соотношения группы S_{kl} и его образы порождают S_{kl}, то ψ индуцирует на S_{kl} автоморфизм $\widehat{\psi}$.

Проверим, что элемент $\tau_{vw1}^7 f_{1v}^{-4} f_{1w}^4$ остается неподвижным под действием $\widehat{\psi}$:

$$(\tau_{vw1}^{\widehat{\psi}})^7 (f_{1v}^{\widehat{\psi}})^{-4} (f_{1w}^{\widehat{\psi}})^4 = \tau_{vw1}^7 (f_{1v}\tau_{vw1})^{-4} (f_{1w}\tau_{vw1})^4 = \tau_{vw1}^7 f_{1v}^{-4} f_{1w}^4,$$

что и требовалось. Докажем теперь, что $\widehat{\psi}^4$ совпадает с внутренним автоморфизмом группы S_{kl}, индуцированным элементом $\tau_{vw1}^7 f_{1v}^{-4} f_{1w}^4$. Имеем

$$\tau_{1ij}^{\widehat{\psi}^4} = \tau_{1ij}, \quad f_{st}^{\widehat{\psi}^4} = f_{st}\tau_{vtw}^4\tau_{vws}^4,$$

$$\begin{aligned}f_{st}^{\tau^7 f_{1v}^{-4} f_{1w}^4} &= f_{st}[f_{st}, f_{1v}^{-4} f_{1w}^4] = f_{st}\tau_{1tv}^{-4}\tau_{1vs}^{-4}\tau_{1tw}^4\tau_{1ws}^4 \\ &= f_{st}\tau_{1vt}^4\tau_{1tw}^4\tau_{1wv}^4\tau_{1vw}^4\tau_{1ws}^4\tau_{1sv}^4 = f_{st}\tau_{vtw}^4\tau_{vws}^4\end{aligned}$$

ввиду п. (1) леммы 2, что и требовалось.

В силу предложения 4 $S_{vw} = S_{kl}\langle f_{vw}\rangle$, причем $S_{vw}/S_{kl} \simeq Z_4$. На шаге с номером C_{n-1}^2 данного этапа построения требуемой группы $\widehat{G}$ получим группу $S_{n-1,n}$ удовлетворяющую следующим условиям.

1. $S_{n-1,n}$ порождена образующими τ_{1ij}, f_{st}, где $2 \le i < j \le n, 1 \le s < t \le n$ с определяющими соотношениями:

$$\tau_{1ij}^m = 1, \quad [\tau_{1ij}, f_{st}] = 1, \quad f_{1i}^{4m} = 1, \qquad \text{где } 2 \le i < j \le n,\ 1 \le s < t \le n;$$

$$[f_{ij}, f_{st}] = \tau_{sjt}\tau_{sti} \quad \text{при } 1 \le i < j \le n,\ 1 \le s < t \le n;$$

$$f_{ks}^4 f_{1s}^{-4} f_{1k}^4 = \tau_{ks1}^7 \quad \text{при } 2 \le k < s \le n.$$

2. $S_{n-1,n}$ имеет ряд нормальных подгрупп

$$\begin{aligned}T = \prod_{2\le i<j\le n} \langle\tau_{1ij}\rangle &< T\langle f_{12}\rangle < \dots < T\langle f_{12}\rangle \dots \langle f_{1n}\rangle = S \\ &< S\langle f_{23}\rangle < S\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle < \dots < S\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle \dots \langle f_{n-1,n}\rangle = S_{n-1,n},\end{aligned}$$

в котором первые $n-1$ фактор-групп циклические порядка $4m$, а остальные C_{n-1}^2 фактор-групп циклические порядка 4. Обозначим $F = S_{n-1,n}$.

Положим $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$ при $i > j$ и $f_{ii} = 1$ для любого i.

Лемма 3. *Для любых индексов $i, j, k, s \in [1, n]$ и любого целого t выполняются следующие соотношения в группе F:*

(1) $[f_{ij}, f_{sk}] = \tau_{sjk}\tau_{ski}$,
(2) $[f_{ij}, f_{jk}^t f_{ki}^t] = 1$,
(3) $f_{ij}^t f_{jk}^t f_{ki}^t \in Z(F)$,
(4) $f_{ij}^4 f_{jk}^4 f_{ki}^4 = \tau_{ijk}^7$,

(5) $(f_{ij}f_{jk}f_{ki})^4 = \tau_{ijk}$,
(6) $f_{ij}^2 f_{jk}^2 f_{ki}^2 = (f_{ij}f_{jk}f_{ki})^2 \tau_{ijk}$,
(7) $f_{ij}^{4m} = 1$.

Доказательство. При $i = j$ или $s = k$ равенство (1) верно в силу пп. (3) и (4) леммы 2.

Пусть $i > j, s < k$. Тогда

$$[f_{ij}, f_{sk}] = \left[f_{ji}^{-1}, f_{sk}\right] = [f_{ji}, f_{sk}]^{-1} = (\tau_{sik}\tau_{skj})^{-1} = \tau_{sjk}\tau_{ski}$$

снова в силу п. (4) леммы 2. Аналогично рассматриваются случаи $i < j$, $s > k$ и $i > j$, $s > k$. П. (1) доказан.

Для доказательства п. (2) достаточно показать, что $[f_{ij}, f_{jk}f_{ki}] = 1$. Имеем

$$[f_{ij}, f_{jk}f_{ki}] = \tau_{kji}\tau_{jki} = 1$$

снова в силу п. (4) леммы 2. П. (2) доказан.

Для доказательства (3) достаточно убедиться, что $f_{ij}f_{jk}f_{ki} \in Z(F)$. Пусть s, t — любые индексы из $[1, n]$. Имеем

$$[f_{ij}f_{jk}f_{ki}, f_{st}] = \tau_{sjt}\tau_{sti}\tau_{skt}\tau_{stj}\tau_{sit}\tau_{stk} = 1$$

опять же в силу п. (4) леммы 2. П. (3) доказан.

Имеем $f_{ks}^4 f_{s1}^4 f_{1k}^4 = \tau_{ks1}^7$ при $2 \le k < s \le n$. Если $2 \le s < k \le n$, то $f_{sk}^4 f_{k1}^4 f_{1s}^4 = \tau_{sk1}^7$, откуда

$$\left(f_{sk}^4 f_{k1}^4 f_{1s}^4\right)^{-1} = \tau_{sk1}^{-7}, \quad f_{s1}^4 f_{1k}^4 f_{ks}^4 = \tau_{ks1}^7, \quad f_{ks}^4 f_{s1}^4 f_{1k}^4 = \tau_{ks1}^7$$

в силу п. (2) леммы 3.

При $k = s$ тождество $f_{ks}^4 f_{s1}^4 f_{1k}^4 = \tau_{ks1}^7$ верно очевидным образом. Пусть $k = 1$. Тогда рассматриваемое тождество принимает вид $f_{1s}^4 f_{s1}^4 f_{11}^4 = \tau_{1s1}^7$ и, очевидно, верно. При $s = 1$ поступаем аналогично. Итак, доказано, что равенство $f_{ks}^4 f_{s1}^4 f_{1k}^4 = \tau_{ks1}^7$ верно для любых $k, s \in [1, n]$.

Для доказательства тождества п. (4) фиксируем любые целые числа $i, j, k \in [1, n]$. Перемножим почленно три верных равенства:

$$f_{ij}^4 f_{j1}^4 f_{1i}^4 = \tau_{ij1}^7, \quad f_{jk}^4 f_{k1}^4 f_{1j}^4 = \tau_{jk1}^7, \quad f_{ki}^4 f_{i1}^4 f_{1k}^4 = \tau_{ki1}^7.$$

В результате получим $\left(f_{ij}^4 f_{j1}^4 f_{1i}^4\right)\left(f_{jk}^4 f_{k1}^4 f_{1j}^4\right)\left(f_{ki}^4 f_{i1}^4 f_{1k}^4\right) = \tau_{ijk}^7$. Преобразуем левую часть этого равенства:

$$\begin{aligned}
&f_{ij}^4 f_{jk}^4 f_{j1}^4 f_{1i}^4 \left[f_{j1}^4 f_{1i}^4, f_{jk}^4\right] f_{ki}^4 f_{k1}^4 f_{1j}^4 \left[f_{k1}^4 f_{1j}^4, f_{ki}^4\right] f_{i1}^4 f_{1k}^4 \\
&\quad = f_{ij}^4 f_{jk}^4 f_{ki}^4 f_{j1}^4 f_{1i}^4 \left[f_{j1}^4 f_{1i}^4, f_{ki}^4\right] f_{k1}^4 f_{1j}^4 f_{i1}^4 f_{1k}^4 \tau_{j1k}^{16}\tau_{jik}^{16}\tau_{jk1}^{16}\tau_{k1i}^{16}\tau_{kji}^{16}\tau_{ki1}^{16} \\
&\quad = f_{ij}^4 f_{jk}^4 f_{ki}^4 f_{j1}^4 f_{1i}^4 f_{k1}^4 f_{1j}^4 f_{i1}^4 f_{1k}^4 \tau_{k1i}^{16}\tau_{kij}^{16}\tau_{ki1}^{16}\tau_{jik}^{32} \\
&\quad = f_{ij}^4 f_{jk}^4 f_{ki}^4 f_{j1}^4 f_{1j}^4 f_{1i}^4 f_{k1}^4 \left[f_{1i}^4 f_{k1}^4, f_{1j}^4\right] f_{i1}^4 f_{1k}^4 \tau_{kij}^{-16} \\
&= f_{ij}^4 f_{jk}^4 f_{ki}^4 f_{1i}^4 f_{k1}^4 f_{i1}^4 f_{1k}^4 \tau_{1ij}^{16}\tau_{1jk}^{16}\tau_{kij}^{-16} = f_{ij}^4 f_{jk}^4 f_{ki}^4 f_{1i}^4 f_{i1}^4 f_{k1}^4 \left[f_{k1}^4, f_{i1}^4\right] f_{1k}^4 \tau_{1ij}^{16}\tau_{1jk}^{16}\tau_{kij}^{-16} \\
&\quad = f_{ij}^4 f_{jk}^4 f_{ki}^4 \tau_{i1k}^{16}\tau_{1ij}^{16}\tau_{1jk}^{16}\tau_{kij}^{-16} = f_{ij}^4 f_{jk}^4 f_{ki}^4 \tau_{1ki}^{16}\tau_{1ij}^{16}\tau_{1jk}^{16}\tau_{kij}^{-16} = f_{ij}^4 f_{jk}^4 f_{ki}^4
\end{aligned}$$

в силу п. (5) леммы 2, что и требовалось. П. (4) доказан.

Далее, используя п. (2) леммы 3 и предложение 1, имеем

$$(f_{ij}f_{jk}f_{ki})^4 = (f_{ij})^4 (f_{jk}f_{ki})^4 = f_{ij}^4 f_{jk}^4 f_{ki}^4 [f_{ki}, f_{jk}]^6 = \tau_{ijk}^7 \tau_{jik}^6 = \tau_{ijk},$$

и, следовательно, (5) доказано. Далее,

$$(f_{ij}f_{jk}f_{ki})^2 = f_{ij}^2 f_{jk}^2 f_{ki}^2 [f_{ki}, f_{jk}] = f_{ij}^2 f_{jk}^2 f_{ki}^2 \tau_{jik},$$

откуда следует равенство (6). Наконец, из равенства $f_{ij}^4 f_{j1}^4 f_{1i}^4 = \tau_{ij1}^7$ получаем

$$f_{ij}^{4m} = \left(\tau_{ij1}^7 f_{1i}^{-4} f_{j1}^{-4}\right)^m = f_{1i}^{-4m} f_{j1}^{-4m} \left[f_{j1}^{-4}, f_{1i}^{-4}\right]^{\frac{m(m-1)}{2}} = \tau_{1ij}^{8m(m-1)} = 1.$$

П. (7), а значит, и лемма 3, доказаны.

Итак, построена группа F порядка $m^{C_{n-1}^2}(4m)^{n-1}4^{C_{n-1}^2} = m^{C_n^2}2^{n^2-n}$, имеющая нормальный ряд

$$1 < T = \prod_{2\le\alpha<\beta\le n} \langle\tau_{1\alpha\beta}\rangle < T\langle f_{12}\rangle < \dots < T\langle f_{12}\rangle \dots \langle f_{1n}\rangle = S$$
$$< S\langle f_{23}\rangle < S\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle < \dots < S\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle \dots \langle f_{n-1,n}\rangle = F,$$

в котором первая фактор-группа гомоциклическая периода m и ранга C_{n-1}^2, следующие $n-1$ фактор-групп циклические порядка $4m$ и последние C_{n-1}^2 фактор-групп циклические порядка 4, причем в силу лемм 2 и 3 можно считать, что группа F задана образующими τ_{ijk}, f_{ij}, где $1 \le i,j,k \le n$, и определяющими соотношениями:

$$\tau_{ijk}^m = 1, \quad f_{ij}^{4m} = 1, \quad [\tau_{ijk}, f_{st}] = 1,$$
$$f_{ij} = f_{ji}^{-1}, \quad f_{ii} = 1, \quad [f_{ij}, f_{ks}] = \tau_{kjs}\tau_{ksi},$$
$$(f_{ij}f_{jk}f_{ki})^4 = \tau_{ijk}, \quad \tau_{sij}\tau_{sjk}\tau_{ski} = \tau_{ijk}$$

для любых индексов $i,j,k,s,t \in [1,n]$. Аналогично построению групп S и F построим требуемую группу $\widehat{G}$, присоединяя к F последовательно циклические группы $\langle a_1\rangle, \dots, \langle a_n\rangle$ порядка 2.

Предположим, что для некоторого $s < n$ построена группа

$$F_s = F \leftthreetimes \langle a_1\rangle \leftthreetimes \dots \leftthreetimes \langle a_s\rangle,$$

заданная образующими τ_{ijk}, f_{ij} группы F, элементами $a_1, \dots, a_s$ и определяющими соотношениями в формулировке теоремы 1, в которых индекс любого элемента вида a не превосходит рассматриваемого здесь фиксированного s.

Рассмотрим группу F_{s+1}, заданную образующими группы F_s, дополнительным образующим a_{s+1} с определяющими соотношениями группы F_s, указанными выше, и добавочными определяющими соотношениями

$$[\tau_{ijk}, a_{s+1}] = 1, \quad [f_{ij}, a_{s+1}] = f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2 \tau_{i,j,s+1}^{-2},$$
$$[a_i, a_{s+1}] = f_{i,s+1} \quad \text{при } i \le s,\ a_{s+1}^2 = 1.$$

В соответствии с написанными равенствами рассмотрим отображение ψ, заданное на множестве образующих группы F_s:

$$\tau_{ijk} \overset{\psi}{\mapsto} \tau_{ijk}, \quad f_{ij} \overset{\psi}{\mapsto} f_{ij} f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2 \tau_{i,j,s+1}^{-2}, \quad a_l \overset{\psi}{\mapsto} a_l f_{l,s+1}$$

при $1 \le i,j,k \le n$, $1 \le l \le s$.

Заметим прежде всего, что образы отображения ψ порождают F_s. Проверим сохранение всех определяющих соотношений группы F_s под действием ψ.

В дальнейшем многократно будем использовать следующую лемму.

Лемма 4. *Для любых индексов $i, j, k \in [1, n]$ и любого целого числа t выполняется условие $f_{ij}^t f_{jk}^t f_{ki}^t \in Z(F_s)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $f_{ij} f_{jk} f_{ki} \in Z(F_s)$. Фиксируем $l \leq s$ и считаем:

$$\begin{aligned}
[f_{ij} f_{jk} f_{ki}, a_l] &= [f_{ij}, a_l]^{f_{jk} f_{ki}} [f_{jk} f_{ki}, a_l] = f_{jl}^2 f_{li}^2 \tau_{ijl}^{-2} \big[f_{jl}^2 f_{li}^2, f_{jk} f_{ki}\big] [f_{jk}, a_l]^{f_{ki}} [f_{ki}, a_l] \\
&= \big(f_{jl}^2 f_{li}^2 \tau_{ijl}^{-2}\big)\big(\tau_{jlk}^2 \tau_{kli}^2 \tau_{kij}^2 \tau_{jik}^2 \tau_{jkl}^2 \tau_{kil}^2\big)\big(f_{kl}^2 f_{lj}^2 \tau_{jkl}^{-2}\big) \big[f_{kl}^2 f_{lj}^2, f_{ki}\big] f_{il}^2 f_{lk}^2 \tau_{kil}^{-2} \\
&= \big(\tau_{lij}^{-2} \tau_{ljk}^{-2} \tau_{lki}^{-2}\big) f_{jl}^2 f_{li}^2 f_{kl}^2 f_{lj}^2 f_{il}^2 f_{lk}^2 \tau_{kli}^2 \tau_{kji}^2 \tau_{kil}^2 = \tau_{ijk}^{-2} f_{jl}^2 f_{lj}^2 f_{li}^2 f_{kl}^2 \big[f_{li}^2 f_{kl}^2, f_{lj}^2\big] f_{il}^2 f_{lk}^2 \tau_{kji}^2 \\
&= \tau_{kji}^4 f_{li}^2 f_{kl}^2 \tau_{lij}^4 \tau_{ljk}^4 f_{il}^2 f_{lk}^2 = \tau_{kji}^4 \tau_{lij}^4 \tau_{ljk}^4 \big[f_{il}^2, f_{lk}^2\big] = \tau_{kji}^4 \tau_{lij}^4 \tau_{ljk}^4 \tau_{lki}^4 = \tau_{kji}^4 \tau_{ijk}^4 = 1,
\end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма 4 доказана.

Ясно, что определяющие соотношения группы T и соотношения вида $f_{ii} = 1$, $[\tau_{ijk}, f_{st}] = 1$ и $[\tau_{ijk}, a_l] = 1$ сохраняются под действием ψ. Легко проверить и сохранение соотношения вида $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$. Проверим сохранение соотношения $f_{ij}^{4m} = 1$. Имеем

$$\big(f_{ij}^{\psi}\big)^{4m} = \big(f_{ij} f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2, \tau_{i,j,s+1}^{-2}\big)^{4m} = f_{ij}^{4m} \big(f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2\big)^{4m},$$

так как в силу леммы 3 выполняется равенство $\big[f_{ij}, f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2\big] = 1$. Ввиду предложения 1 получим

$$\big(f_{ij}^{\psi}\big)^{4m} = f_{j,s+1}^{8m} f_{s+1,i}^{8m} \big[f_{s+1,i}^2, f_{j,s+1}^2\big]^{\frac{4m(4m-1)}{2}} = \tau_{j,i,s+1}^{8m(4m-1)} = 1,$$

что и требовалось.

Проверим сохранение соотношения $[f_{ij}, f_{kt}] = \tau_{kjt} \tau_{kti}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\big[f_{ij}^{\psi}, f_{kt}^{\psi}\big] &= \big[f_{ij} f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2, f_{kt} f_{t,s+1}^2 f_{s+1,k}^2\big] \\
&= \big(\tau_{kjt} \tau_{kti} \tau_{t,j,s+1}^2 \tau_{t,s+1,i}^2 \tau_{s+1,j,k}^2 \tau_{s+1,k,i}^2\big)\big(\tau_{k,s+1,t}^2 \tau_{ktj}^2 \tau_{t,s+1,j}^4 \tau_{s+1,k,j}^4\big) \\
&\quad \times \big(\tau_{kit}^2 \tau_{k,t,s+1}^2 \tau_{t,i,s+1}^4 \tau_{s+1,i,k}^4\big) \\
&= \tau_{kjt} \tau_{kti} \tau_{t,s+1,j}^2 \tau_{t,i,s+1}^2 \tau_{s+1,k,j}^2 \tau_{s+1,i,k}^2 \tau_{ktj}^2 \tau_{kit}^2 \\
&= \tau_{kjt} \tau_{kti} \big(\tau_{s+1,j,t}^2 \tau_{s+1,t,k}^2 \tau_{s+1,k,j}^2\big)\big(\tau_{s+1,t,i}^2 \tau_{s+1,i,k}^2 \tau_{s+1,k,t}^2\big) \tau_{ktj}^2 \tau_{kit}^2 = \tau_{kjt} \tau_{kti},
\end{aligned}$$

поскольку выражения в скобках в силу леммы 2 равны τ_{jtk}^2 и τ_{tik}^2 соответственно. Получили требуемое, так как $\tau_{kjt}^{\psi} \tau_{kti}^{\psi} = \tau_{kjt} \tau_{kti}$.

Проверим сохранение соотношения $[f_{ij}, a_k] = f_{jk}^2 f_{ki}^2 \tau_{ijk}^{-2}$ при $k \leq s$ под действием a_{s+1}. Имеем

$$\begin{aligned}
\big[f_{ij}^{\psi}, a_k^{\psi}\big] &= \big[f_{ij} f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2, a_k f_{k,s+1}\big] \\
&= \big[f_{ij} f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2, f_{k,s+1}\big] \big[f_{ij} f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2, a_k\big]^{f_{k,s+1}} \\
&= \big(\tau_{k,j,s+1} \tau_{k,s+1,i} \tau_{k,s+1,j}^2 \tau_{k,i,s+1}^2\big) [f_{ji}, a_k]^{f_{k,s+1}} \\
&= \tau_{k,s+1,j} \tau_{k,i,s+1} \big(f_{ik}^2 f_{kj}^2 \tau_{jik}^{-2}\big)^{f_{k,s+1}} = \tau_{k,s+1,j} \tau_{k,i,s+1} f_{ik}^2 f_{kj}^2 \tau_{jik}^{-2} \big[f_{ik}^2 f_{kj}^2, f_{k,s+1}\big] \\
&= f_{ik}^2 f_{kj}^2 \tau_{k,s+1,j} \tau_{k,i,s+1} \tau_{jik}^{-2} \tau_{k,s+1,i}^2 \tau_{k,j,s+1}^2 = f_{ik}^2 f_{kj}^2 \tau_{jik}^{-2} \tau_{k,s+1,i} \tau_{k,j,s+1}.
\end{aligned}$$

Заметим, что при получении третьего равенства использовалось то, что

$$f_{ij} f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2 = f_{ji} \big(f_{ij}^2 f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2\big), \quad f_{ij}^2 f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2 \in Z(F_s).$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&\big(f_{jk}^{\psi}\big)^2\big(f_{ki}^{\psi}\big)^2\tau_{ijk}^{-2} = \big(f_{jk}f_{k,s+1}^2f_{s+1,j}^2\tau_{j,k,s+1}^{-2}\big)^2\big(f_{ki}f_{i,s+1}^2f_{s+1,k}^2\tau_{k,i,s+1}^{-2}\big)^2\tau_{ijk}^{-2}\\
&= f_{jk}^2\big(f_{k,s+1}^4f_{s+1,j}^4\big)\big[f_{s+1,j}^2, f_{k,s+1}^2\big]\tau_{j,k,s+1}^{-4}f_{ki}^2f_{i,s+1}^4f_{s+1,k}^4\big[f_{s+1,k}^2, f_{i,s+1}^2\big]\tau_{k,i,s+1}^{-4}\tau_{ijk}^{-2}\\
&= f_{jk}^2f_{k,s+1}^4f_{s+1,j}^4f_{ki}^2f_{i,s+1}^4f_{s+1,k}^4\tau_{k,j,s+1}^4\tau_{j,k,s+1}^{-4}\tau_{i,k,s+1}^4\tau_{k,i,s+1}^{-4}\tau_{ijk}^{-2}\\
&= f_{kj}^2\big(f_{jk}^4f_{k,s+1}^4f_{s+1,j}^4\big)f_{ik}^2\big(f_{ki}^4f_{i,s+1}^4f_{s+1,k}^4\big)\tau_{k,j,s+1}^8\tau_{i,k,s+1}^8\tau_{ijk}^{-2}\\
&= f_{kj}^2f_{ik}^2\tau_{j,k,s+1}^7\tau_{k,i,s+1}^7\tau_{k,j,s+1}^8\tau_{i,k,s+1}^8\tau_{ijk}^{-2} = f_{kj}^2f_{ik}^2\tau_{k,j,s+1}\tau_{i,k,s+1}\tau_{ijk}^{-2}\\
&= f_{ik}^2f_{kj}^2\big[f_{kj}^2, f_{ik}^2\big]\tau_{k,j,s+1}\tau_{i,k,s+1}\tau_{ijk}^{-2} = f_{ik}^2f_{kj}^2\tau_{ijk}^2\tau_{k,j,s+1}\tau_{i,k,s+1} = \big[f_{ij}^{\psi}, a_k^{\psi}\big],
\end{aligned}$$

что и требовалось.

Проверим сохранение под действием ψ равенства $[a_i, a_j] = f_{ij}$ при $1 \leq i, j \leq s$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\big[a_i^{\psi}, a_j^{\psi}\big] = [a_if_{i,s+1}, a_jf_{j,s+1}] = [a_i, a_jf_{j,s+1}]^{f_{i,s+1}}[f_{i,s+1}, a_jf_{j,s+1}]\\
&= [a_i, f_{j,s+1}]^{f_{i,s+1}}[a_i, a_j]^{f_{j,s+1}f_{i,s+1}}[f_{i,s+1}, f_{j,s+1}][f_{i,s+1}, a_j]^{f_{j,s+1}}\\
&= \big(\tau_{j,s+1,i}^2f_{ij}^{-2}f_{s+1,i}^{-2}\big)\big[f_{ij}^{-2}f_{s+1,i}^{-2}, f_{i,s+1}\big]f_{ij}[f_{ij}, f_{j,s+1}f_{i,s+1}]\\
&\times \tau_{j,s+1,i}\big(f_{s+1,j}^2f_{ji}^2\tau_{i,s+1,j}^{-2}\big)\big[f_{s+1,j}^2f_{ji}^2, f_{j,s+1}\big]\\
&= \big(\tau_{j,s+1,i}^5\big)\tau_{i,j,s+1}^{-2}\tau_{j,s+1,i}\tau_{i,j,s+1}\tau_{j,i,s+1}^2f_{ij}^{-2}f_{s+1,i}^{-2}f_{ij}f_{s+1,j}^2f_{ji}^2\\
&= \tau_{j,s+1,i}^3f_{ij}^{-2}f_{s+1,i}^{-2}f_{ij}f_{s+1,j}^2f_{ji}^2 = \tau_{j,s+1,i}^3f_{ij}f_{ij}^{-2}f_{s+1,i}^{-2}\big[f_{ij}^{-2}f_{s+1,i}^{-2}, f_{ij}\big]f_{s+1,j}^2f_{ji}^2\\
&= \tau_{i,j,s+1}f_{ij}f_{ji}^4f_{s+1,i}^{-2}f_{s+1,j}^2\big[f_{s+1,i}^{-2}f_{s+1,j}^2, f_{ji}^2\big]\\
&= \tau_{i,j,s+1}f_{ij}f_{ji}^4f_{s+1,i}^{-2}f_{s+1,j}^2\tau_{j,i,s+1}^{-4}\tau_{j,i,s+1}^4 = \tau_{i,j,s+1}f_{ij}f_{ji}^4f_{s+1,i}^{-2}f_{s+1,j}^2,
\end{aligned}$$

кроме того,

$$f_{ij}^{\psi} = f_{ij}f_{j,s+1}^2f_{s+1,i}^2\tau_{i,j,s+1}^{-2}.$$

Приравнивая полученные выражения для $[a_i^{\psi}, a_j^{\psi}]$ и f_{ij}^{ψ} и сокращая на $\tau_{i,j,s+1}f_{ij}$, получим

$$f_{ji}^4f_{s+1,i}^{-2}f_{s+1,j}^2 = f_{j,s+1}^2f_{s+1,i}^2\tau_{i,j,s+1}^{-3},$$

откуда

$$\tau_{i,j,s+1}^{-3} = f_{s+1,i}^{-2}f_{j,s+1}^{-2}f_{ji}^4f_{s+1,i}^{-2}f_{s+1,j}^2.$$

Имеем

$$\tau_{i,j,s+1}^{-3} = f_{ji}^4f_{s+1,i}^{-2}f_{j,s+1}^{-2}f_{s+1,i}^{-2}f_{s+1,j}^2,$$

что равносильно равенству

$$\tau_{i,j,s+1}^{-3} = f_{ji}^4f_{s+1,i}^{-4}f_{j,s+1}^{-4}\big[f_{j,s+1}^{-2}, f_{s+1,i}^{-2}\big].$$

Итак, получили

$$\tau_{i,j,s+1}^{-3} = f_{ji}^4f_{i,s+1}^4f_{s+1,j}^4\tau_{s+1,i,j}^4,$$

что равносильно истинному равенству в группе F_s:

$$f_{ji}^4f_{i,s+1}^4f_{s+1,j}^4 = \tau_{j,i,s+1}^7.$$

Осталось проверить сохранение под действием ψ определяющего соотношения вида $a_i^2 = 1$:

$$\big(a_i^{\psi}\big)^2 = (a_if_{i,s+1})(a_if_{i,s+1}) = a_i^2f_{i,s+1}[f_{i,s+1}, a_i]f_{i,s+1} = f_{i,s+1}f_{s+1,i}^2f_{i,s+1} = 1,$$

что и требовалось.

Проверим, что $\widehat{\psi}^2 = \mathrm{id}_{F_s}$, где $\widehat{\psi}$ — автоморфизм группы F_s, индуцированный отображением ψ. Имеем

$$f_{ij}^{\widehat{\psi}^2} = \left(f_{ij} f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2 \tau_{i,j,s+1}^{-2}\right)^{\widehat{\psi}} = f_{ij} f_{j,s+1}^2 f_{s+1,i}^2 \tau_{i,j,s+1}^{-2} f_{j,s+1}^{-2} f_{s+1,i}^{-2} \tau_{i,j,s+1}^{-2}$$
$$= f_{ij}\left[f_{s+1,i}^2, f_{j,s+1}^{-2}\right]\tau_{i,j,s+1}^{-4} = f_{ij}\tau_{j,i,s+1}^{-4}\tau_{i,j,s+1}^{-4} = f_{ij}.$$

Наконец,

$$a_i^{\widehat{\psi}^2} = (a_i f_{i,s+1})^{\widehat{\psi}} = a_i f_{i,s+1} f_{i,s+1}^{-1} = a_i,$$

что и требовалось.

В силу предложения 4 $F_{s+1} = F_s \leftthreetimes \langle a_{s+1}\rangle$.

На n-м шаге данного этапа построения получим группу $\widehat{G}$ с определяющими соотношениями из формулировки теоремы 1, удовлетворяющую всем условиям пп. I и II теоремы 1. Следовательно, пп. I и II теоремы 1 доказаны.

Доказательство п. III теоремы 1 и теорем 2 и 3

Докажем, что группа G из формулировки теоремы 1 — группа Альперина.

Во-первых, заметим, что лемма 4 справедлива для всей группы G, т. е. для любых индексов $i, j, k \in [1, n]$ и любого целого числа t выполняется условие $f_{ij}^t f_{jk}^t f_{ki}^t \in Z(G)$. Доказательство этого факта, по существу, ничем не отличается от доказательства леммы 4.

Далее докажем еще несколько лемм.

Лемма 5. *Для любого $x \in G$ и любой инволюции $y \in G$ выполняется равенство $[x, y, y] = [x, y]^{-2}$.*

Доказательство. Имеем $1 = [x, y^2] = [x, y][x, y]^y$, откуда $[x, y]^y = [x, y]^{-1}$, т. е. $[x, y, y] = [x, y]^{-2}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любых $i, j, k, s \in [1, n]$ справедливы следующие утверждения:*

(1) $[a_i, a_k a_s] = f_{si} f_{ik} f_{ks}^2 = (f_{ik} f_{ks} f_{si}) f_{ks}$;

(2) $[a_k a_s, a_i] = f_{sk}^2 f_{ki} f_{is} = (f_{is} f_{sk} f_{ki}) f_{sk}$;

(3) $[a_i a_j, a_k a_s] = (f_{ik} f_{ks} f_{si})(f_{jk} f_{ks} f_{sj})^{-1}$, *в частности,* $[a_i a_j, a_k a_s] \in Z(G)$.

Доказательство. Имеем

$$[a_i, a_k a_s] = f_{is} f_{ik}^{a_s} = f_{is} f_{ik} f_{ks}^2 f_{si}^2 \tau_{iks}^{-2} = f_{is}(f_{ik} f_{ks})\left(f_{si}^2 f_{ks}\left[f_{ks}, f_{si}^2\right]\right)\tau_{iks}^{-2}$$
$$= f_{is} f_{si}^2 f_{ik} f_{ks}^2 \tau_{sik}^2 \tau_{iks}^{-2} = f_{si} f_{ik} f_{ks}^2 = (f_{si} f_{ik} f_{ks}) f_{ks} = (f_{ik} f_{ks} f_{si}) f_{ks},$$

и п. (1) доказан. П. (2) следует из п. (1). Для доказательства п. (3) рассмотрим следующую цепочку равенств, во втором равенстве которой используется п. (1) леммы 6:

$$[a_i a_j, a_k a_s] = [a_i, a_k a_s]^{a_j}[a_j, a_k a_s]$$
$$= \left(f_{si} f_{ik} f_{ks}^2\right)^{a_j} f_{sj} f_{jk} f_{ks}^2 = (f_{si} f_{ik} f_{ks}) f_{ks}^{a_j} f_{sj} f_{jk} f_{ks}^2$$
$$= (f_{si} f_{ik} f_{ks})(f_{sj} f_{jk} f_{ks}) f_{ks}^{a_j} f_{ks} = (f_{si} f_{ik} f_{ks})(f_{sj} f_{jk} f_{ks}) f_{ks} f_{sj}^2 f_{jk}^2 \tau_{ksj}^{-2} f_{ks}$$
$$= (f_{si} f_{ik} f_{ks})(f_{sj} f_{jk} f_{ks})\left(f_{ks}^2 f_{sj}^2 f_{jk}^2\right)\tau_{ksj}^{-2}$$
$$= (f_{si} f_{ik} f_{ks})(f_{sj} f_{jk} f_{ks})(f_{ks} f_{sj} f_{jk})^2 \tau_{ksj} \tau_{ksj}^{-2}$$
$$= (f_{ik} f_{ks} f_{si})(f_{jk} f_{ks} f_{sj})^3 \tau_{ksj}^{-1} = (f_{ik} f_{ks} f_{si})(f_{jk} f_{ks} f_{sj})^3 (f_{jk} f_{ks} f_{sj})^{-4}$$
$$= (f_{ik} f_{ks} f_{si})(f_{jk} f_{ks} f_{sj})^{-1},$$

что и требовалось. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Для любых натуральных k и l коммутатор $[a_{i_1}\dots a_{i_{2k}}, a_{j_1}\dots a_{j_{2l}}]$ лежит в $Z(G)$.*

Доказательство проведем индукцией по $k+l$. При $k+l=2$ утверждение леммы справедливо в силу леммы 6. Далее, при $k\geq 2$ имеем

$$[a_{i_1}\dots a_{i_{2k}}, a_{j_1}\dots a_{j_{2l}}] \\ = [a_{i_1}\dots a_{i_{2k-2}}, a_{j_1}\dots a_{j_{2l}}]^{a_{i_{2k-1}}a_{i_{2k}}}[a_{i_{2k-1}}a_{i_{2k}}, a_{j_1}\dots a_{j_{2l}}] \in Z(G),$$

так как оба коммутатора в правой части полученного равенства лежат в $Z(G)$ по предположению индукции.

Лемма 8. *Для любых натуральных k и l и любых индексов $i_1,\dots,i_{2k}$, $j_1,\dots,j_{2l}$ из $[1,n]$ подгруппа $\langle a_{i_1}\dots a_{i_{2k}}, a_{j_1}\dots a_{j_{2l}}\rangle$ двустепенно нильпотентна, в частности, ее коммутант цикличен.*

Доказательство. Лемма 8 очевидным образом следует из леммы 7.

Лемма 9. *Для любого натурального k, любого целого $l\geq 0$ и любых индексов $i_1,\dots,i_{2k},i_{2k+1},\dots,i_{2k+2l+1}$ выполняются следующие соотношения:*

(1) $[a_{i_1}\dots a_{i_{2k}}, a_{i_{2k+1}}\dots a_{i_{2k+2l+1}}, a_{i_{2k+1}}\dots a_{i_{2k+2l+1}}]$
$= [a_{i_1}\dots a_{i_{2k}}, a_{i_{2k+1}}\dots a_{i_{2k+2l+1}}]^{-2}$,

(2) $[a_{i_1}\dots a_{i_{2k}}, a_{i_{2k+1}}\dots a_{i_{2k+2l+1}}, a_{i_1}\dots a_{i_{2k}}]=1$,

в частности, коммутант $\langle a_{i_1}\dots a_{i_{2k}}, a_{i_{2k+1}}\dots a_{i_{2k+2l+1}}\rangle'$ цикличен.

Доказательство. Для простоты будем вместо a_{i_s} и $[a_{i_s},a_{i_t}]$ писать b_s, g_{st} соответственно для любых допустимых индексов i_s,i_t. В силу леммы 7 имеем

$$[b_1\dots b_{2k}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l+1}] = [b_1\dots b_{2k}, b_{2k+2l+1}][b_1\dots b_{2k}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l}],$$

где при $l=0$ второй коммутатор считается равным 1. Далее,

$$[b_1\dots b_{2k}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l+1}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l+1}] \\ = [b_1\dots b_{2k}, b_{2k+2l+1}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l+1}] \\ = [b_1\dots b_{2k}, b_{2k+2l+1}, b_{2k+2l+1}][b_1\dots b_{2k}, b_{2k+2l+1}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l}],$$

так как второй коммутатор в силу леммы 7 лежит в $Z(G)$. С учетом леммы 5 имеем

$$[b_1\dots b_{2k}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l+1}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l+1}] \\ = [b_1\dots b_{2k}, b_{2k+2l+1}]^{-2}[b_1\dots b_{2k}, b_{2k+2l+1}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l}].$$

Приравняв полученное выражение к $[b_1\dots b_{2k}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l+1}]^{-2}$, после сокращения $[b_1\dots b_{2k}, b_{2k+2l+1}]^{-2}$ в обеих частях получим

$$[b_1\dots b_{2k}, b_{2k+2l+1}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l}] = [b_1\dots b_{2k}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l}]^{-2},$$

что, очевидно, равносильно равенству

$$[(b_1\dots b_{2k})^{-1}(b_1\dots b_{2k})^{b_{2k+2l+1}}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l}] = [b_1\dots b_{2k}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l}]^{-2},$$

а последнее в силу леммы 7 равносильно равенству

$$[b_1\dots b_{2k}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l}]^{-1}[(b_1\dots b_{2k})^{b_{2k+2l+1}}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l}] \\ = [b_1\dots b_{2k}, b_{2k+1}\dots b_{2k+2l}]^{-2}.$$

Таким образом, для доказательства п. (1) леммы 9 нужно показать, что

$$[(b_1 \dots b_{2k})^{b_{2k+2l+1}}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}] = [b_1 \dots b_{2k}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}]^{-1}. \qquad (1)$$

В левой части этого равенства имеем

$$\begin{aligned}
&[(b_1 b_2)^{b_{2k+2l+1}} \dots (b_{2k-1} b_{2k})^{b_{2k+2l+1}}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}] \\
&= [b_1 b_2 [b_1 b_2, b_{2k+2l+1}] \dots b_{2k-1} b_{2k} [b_{2k-1} b_{2k}, b_{2k+2l+1}], b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}] \\
&= [b_1 b_2 g_{21} \dots b_{2k-1} b_{2k} g_{2k,2k-1}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}] \\
&= [b_1 b_2 \dots b_{2k-1} b_{2k} g_{21} \dots g_{2k,2k-1}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}] \\
&= [b_1 b_2 \dots b_{2k-1} b_{2k}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}][g_{21} \dots g_{2k,2k-1}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}].
\end{aligned}$$

Обозначив $z = [b_1 \dots b_{2k}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}]$, преобразуем полученное выражение:

$$\begin{aligned}
&z[g_{21}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}] \dots [g_{2k,2k-1}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}] \\
&= z[(b_1 b_2)^{-2}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}] \dots [(b_{2k-1} b_{2k})^{-2}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}] \\
&= z[b_1 b_2, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}]^{-2} \dots [b_{2k-1} b_{2k}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}]^{-2} \\
&= z[b_1 b_2 \dots b_{2k-1} b_{2k}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}]^{-2} = [b_1 b_2 \dots b_{2k-1} b_{2k}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l}]^{-1}
\end{aligned}$$

в силу определения z, что и требовалось доказать. П. (1) леммы 9 доказан. Заметим, что во втором равенстве предыдущей цепочки равенств использовался п. (2) леммы 6, а в третьем равенстве при переносе элементов вида g_{ij} направо использовалась лемма 7.

Далее, считаем

$$\begin{aligned}
&[b_1 \dots b_{2k}, b_{2k+1} \dots b_{2k+2l+1}, b_1 \dots b_{2k}] \\
&= [b_1 \dots b_{2k}, b_{2k+2l+1}, b_1 \dots b_{2k}] = [(b_1 \dots b_{2k})^{-1} (b_1 \dots b_{2k})^{b_{2k+2l+1}}, b_1 \dots b_{2k}] \\
&= [(b_1 \dots b_{2k})^{b_{2k+2l+1}}, b_1 \dots b_{2k}] = [b_1 \dots b_{2k}, b_1 \dots b_{2k}]^{-1} = 1
\end{aligned}$$

в силу доказанного выше равенства (1). Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Для любых допустимых индексов i, j, k справедливо равенство $f_{ij}^{a_k} = f_{ji}(f_{kj} f_{ji} f_{ik})^2$, в частности, f_{ij} инвертируется под действием a_k по модулю $Z(G)$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
f_{ij}^{a_k} &= f_{ij} f_{jk}^2 f_{ki}^2 \tau_{ijk}^{-2} = f_{ji} f_{ij}^2 f_{jk}^2 f_{ki}^2 \tau_{ijk}^{-2} = f_{ji}(f_{ij} f_{jk} f_{ki})^2 \tau_{ijk}^{-1} \\
&= f_{ji}(f_{ij} f_{jk} f_{ki})^{-2} = f_{ji}(f_{ik} f_{kj} f_{ji})^2 = f_{ji}(f_{kj} f_{ji} f_{ik})^2,
\end{aligned}$$

что и требовалось.

Лемма 11. *Пусть $k \geq 2$. Тогда для любых индексов $l_1, \dots, l_{k+1}$ из $[1, n]$ имеет место формула*

$$[a_{l_1} \dots a_{l_k}, a_{l_{k+1}}] = \prod_{s=1}^{k} (f_{l_s l_{k+1}})^{(-1)^{s+k}} \prod_{1 \leq i < j \leq k} (f_{l_i l_j} f_{l_j l_{k+1}} f_{l_{k+1} l_i})^{2(-1)^{i+j+1}}. \qquad (2)$$

Доказательство. Как и выше, будем писать b_i вместо a_{l_i} и g_{ij} вместо $f_{l_i l_j}$ для любых индексов $l_i, l_j \in [1, n]$. Используем индукцию по k. При $k = 2$ в силу леммы 10 получим

$$[b_1 b_2, b_3] = g_{13}^{b_2} g_{23} = g_{31}(g_{23} g_{31} g_{12})^2 g_{23} = (g_{13})^{-1} g_{23}(g_{12} g_{23} g_{31})^2,$$

что и требовалось.

Предположим, что формула (2) верна при фиксированном $k \geq 2$, и докажем, что тогда она верна при $k+1$. Имеем

$$
\begin{aligned}
[b_1 \dots b_k b_{k+1}, b_{k+2}] &= [b_1 \dots b_k, b_{k+2}]^{b_{k+1}} g_{k+1,k+2} \\
&= \left(\prod_{s=1}^{k} (g_{s,k+2})^{(-1)^{s+k}} \right)^{b_{k+1}} g_{k+1,k+2} \prod_{1 \leq i < j \leq k} (g_{ij} g_{j,k+2} g_{k+2,i})^{2(-1)^{i+j+1}} \\
&= \prod_{s=1}^{k} ((g_{k+2,s})(g_{k+1,k+2} g_{k+2,s} g_{s,k+1})^2)^{(-1)^{s+k}} g_{k+1,k+2} \\
&\quad \times \prod_{1 \leq i < j \leq k} (g_{ij} g_{j,k+2} g_{k+2,i})^{2(-1)^{i+j+1}} \\
&= \prod_{s=1}^{k+1} (g_{s,k+2})^{(-1)^{s+k+1}} \prod_{s=1}^{k} (g_{s,k+1} g_{k+1,k+2} g_{k+2,s})^{2(-1)^{s+(k+1)+1}} \\
&\quad \times \prod_{1 \leq i < j \leq k} (g_{ij} g_{j,k+2} g_{k+2,i})^{2(-1)^{i+j+1}} \\
&= \prod_{s=1}^{k+1} (g_{s,k+2})^{(-1)^{s+k+1}} \prod_{1 \leq i < j \leq k+1} (g_{ij} g_{j,k+2} g_{k+2,i})^{2(-1)^{i+j+1}},
\end{aligned}
$$

что и требовалось. Заметим, что в третьем равенстве использовалась лемма 10. Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Пусть $k \geq 1$, k нечетное. Тогда для любых индексов $l_1, \dots, l_{k+1}$ из $[1,n]$ коммутант $\langle a_{l_1} \dots a_{l_k}, a_{l_{k+1}} \rangle'$ цикличен, причем*

$$[a_{l_1} \dots a_{l_k}, a_{l_{k+1}}, a_{l_1} \dots a_{l_k}] = [a_{l_1} \dots a_{l_k}, a_{l_{k+1}}]^{-2}.$$

Доказательство. В силу леммы 5 достаточно доказать, что

$$[a_{l_1} \dots a_{l_k}, a_{l_{k+1}}]^{a_{l_1} \dots a_{l_k}} = [a_{l_1} \dots a_{l_k}, a_{l_{k+1}}]^{-1}.$$

Снова вместо a_{l_i} будем писать b_i, а вместо $f_{l_i l_j}$ — g_{ij}. Посчитаем сначала выражение $[a_{l_1} \dots a_{l_k}, a_{l_{k+1}}]^{a_{l_1}} = [b_1 \dots b_k, b_{k+1}]^{b_1}$.

Всюду ниже буква P будет обозначать

$$\prod_{1 \leq i < j \leq k} (f_{l_i l_j} f_{l_j l_{k+1}} f_{l_{k+1} l_i})^{2(-1)^{i+j+1}} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (g_{ij} g_{j,k+1} g_{k+1,i})^{2(-1)^{i+j+1}}.$$

Заметим, что

$$[a_{l_1} \dots a_{l_k}, a_{l_{k+1}}] = P \prod_{s=1}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+1}}.$$

С учетом леммы 10 имеем

$$
\begin{aligned}
[b_1 \dots b_k, b_{k+1}]^{b_1} &= P \prod_{s=1}^{k} \left(g_{s,k+1}^{b_1} \right)^{(-1)^{s+1}} = P \prod_{s=1}^{k} (g_{k+1,s} (g_{1,k+1} g_{k+1,s} g_{s1})^2)^{(-1)^{s+1}} \\
&= P \prod_{s=1}^{k} (g_{1s} g_{s,k+1} g_{k+1,1})^{2(-1)^{s+2}} \prod_{s=1}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+2}}.
\end{aligned}
$$

Предположим, что при фиксированном $t \geq 1$ имеет место формула

$$[b_1 \dots b_k, b_{k+1}]^{b_1 \dots b_t} = P \prod_{s=1}^{k} (g_{1s} g_{s,k+1} g_{k+1,1})^{2(-1)^{s+2}}$$

$$\times \prod_{s=1}^{k} (g_{2s} g_{s,k+1} g_{k+1,2})^{2(-1)^{s+3}} \cdots \prod_{s=1}^{k} (g_{ts} g_{s,k+1} g_{k+1,t})^{2(-1)^{s+t+1}}$$

$$\times \prod_{s=1}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+t+1}}.$$

Докажем соответствующую формулу для $t+1$. Имеем

$$[b_1 \dots b_k, b_{k+1}]^{b_1 \dots b_t b_{t+1}}$$

$$= P \prod_{s=1}^{k} (g_{1s} g_{s,k+1} g_{k+1,1})^{2(-1)^{s+2}} \cdots \prod_{s=1}^{k} (g_{ts} g_{s,k+1} g_{k+1,t})^{2(-1)^{s+t+1}}$$

$$\times \prod_{s=1}^{k} (g_{k+1,s} (g_{t+1,k+1} g_{k+1,s} g_{s,t+1})^2)^{(-1)^{s+t+1}}$$

$$= P \prod_{s=1}^{k} (g_{1s} g_{s,k+1} g_{k+1,1})^{2(-1)^{s+2}} \cdots \prod_{s=1}^{k} (g_{ts} g_{s,k+1} g_{k+1,t})^{2(-1)^{s+t+1}}$$

$$\times \prod_{s=1}^{k} (g_{t+1,s} g_{s,k+1} g_{k+1,t+1})^{2(-1)^{s+t+2}} \prod_{s=1}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+t+2}},$$

что и требовалось. Таким образом,

$$[b_1 \dots b_k, b_{k+1}]^{b_1 \dots b_k} = P \prod_{1 \leq i,s \leq k} (g_{is} g_{s,k+1} g_{k+1,i})^{2(-1)^{s+i+1}} \prod_{s=1}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+k+1}}$$

$$= P \prod_{s=1}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+k+1}},$$

так как каждый множитель вида $(g_{is} g_{s,k+1} g_{k+1,i})^{2(-1)^{s+i+1}}$ в двойном произведении сократится с множителем $(g_{si} g_{i,k+1} g_{k+1,s})^{2(-1)^{s+i+1}}$. Следовательно, осталось доказать, что

$$P \prod_{s=1}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+k+1}} = P^{-1} \left(\prod_{s=1}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+k}} \right)^{-1},$$

т. е.

$$P^{-2} = \prod_{s=1}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s}} \prod_{s=1}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+1}}.$$

Считаем правую часть данного равенства, которую для удобства обозначим через Q. На 1-м шаге перенесем $g_{1,k+1}$ из второго произведения налево для его сокращения с $g_{1,k+1}^{-1}$, после чего получим

$$Q = \big(g_{2,k+1} g_{3,k+1}^{-1} \cdots g_{k,k+1}^{-1}\big) \big(g_{2,k+1}^{-1} g_{3,k+1} \cdots g_{k,k+1}\big)$$

$$\times \big[g_{2,k+1} g_{3,k+1}^{-1} \cdots g_{k,k+1}^{-1}, g_{1,k+1}\big]$$

$$= \big(g_{2,k+1} g_{3,k+1}^{-1} \cdots g_{k,k+1}^{-1}\big) \big(g_{2,k+1}^{-1} g_{3,k+1} \cdots g_{k,k+1}\big) \tau_{1,k+1,2} \tau_{1,k+1,3}^{-1} \cdots \tau_{1,k+1,k}^{-1}$$

$$= \big(g_{2,k+1} g_{3,k+1}^{-1} \cdots g_{k,k+1}^{-1}\big) \big(g_{2,k+1}^{-1} g_{3,k+1} \cdots g_{k,k+1}\big) \prod_{2 \leq j \leq k} \tau_{1,j,k+1}^{(-1)^{1+j}}.$$

На следующем шаге перенесем налево $g_{2,k+1}^{-1}$ из второго произведения для сокращения с $g_{2,k+1}$, и т. д.

Допустим, что после шага с номером t получили

$$Q = \prod_{s=t+1}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^s} \prod_{s=t+1}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+1}} \prod_{1\le i\le t, i<j\le k} \tau_{i,j,k+1}^{(-1)^{i+j}}.$$

На шаге с номером $t+1$ перенесем $g_{t+1,k+1}^{(-1)^{t+2}}$ налево для сокращения с $g_{t+1,k+1}^{(-1)^{t+1}}$, тем самым

$$\begin{aligned} Q = &\prod_{s=t+2}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^s} \prod_{s=t+2}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+1}} \prod_{1\le i\le t, i<j\le k} \tau_{i,j,k+1}^{(-1)^{i+j}} \\ &\times \left[\prod_{s=t+2}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^s}, (g_{t+1,k+1})^{(-1)^{t+2}}\right] \\ = &\prod_{s=t+2}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^s} \prod_{s=t+2}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+1}} \prod_{1\le i\le t, i<j\le k} \tau_{i,j,k+1}^{(-1)^{i+j}} \prod_{s=t+2}^{k} \tau_{t+1,k+1,s}^{(-1)^{s+t+2}} \\ = &\prod_{s=t+2}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^s} \prod_{s=t+2}^{k} (g_{s,k+1})^{(-1)^{s+1}} \prod_{1\le i\le t+1, i<j\le k} \tau_{i,j,k+1}^{(-1)^{i+j}}, \end{aligned}$$

что и требовалось для шага индукции. Заметим, что в последнем равенстве использовали то, что $\tau_{t+1,k+1,s}^{(-1)^{s+t+2}} = \tau_{t+1,s,k+1}^{(-1)^{s+t+1}}$.

Таким образом, на шаге с номером $k-1$ получим

$$Q = \prod_{1\le i<j\le k} \tau_{i,j,k+1}^{(-1)^{i+j}},$$

что совпадает с P^{-2}. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Для любых нечетных k и $l \ge 3$ и любых индексов $i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_{k+l}$ выполняется равенство*

$$[a_{i_1}\dots a_{i_k}, a_{i_{k+1}}\dots a_{i_{k+l}}]^{a_{i_1}\dots a_{i_k}} = [a_{i_1}\dots a_{i_k}, a_{i_{k+1}}\dots a_{i_{k+l}}]^{-1}.$$

Доказательство. Снова, как и выше, вместо a_{i_s} и $f_{i_s i_t}$ пишем b_s, g_{st} соответственно. Таким образом, нужно доказать, что

$$[b_1\dots b_k, b_{k+1}\dots b_{k+l}]^{b_1\dots b_k} = [b_1\dots b_k, b_{k+1}\dots b_{k+l}]^{-1}.$$

Имеем

$$[b_1\dots b_k, b_{k+1}\dots b_{k+l}] = [b_1\dots b_k, b_{k+l}][b_1\dots b_k, b_{k+1}\dots b_{k+l-1}]^{b_{k+l}},$$

откуда по лемме 12 получим

$$\begin{aligned} [b_1\dots b_k, b_{k+1}\dots b_{k+l}]^{b_1\dots b_k} &= [b_1\dots b_k, b_{k+l}]^{-1}[b_1\dots b_k, b_{k+1}\dots b_{k+l-1}]^{b_{k+l}b_1\dots b_k} \\ &= [b_1\dots b_k, b_{k+l}]^{-1}\left([b_1\dots b_k, b_{k+1}\dots b_{k+l-1}]^{-1}\right)^{b_{k+l}[b_{k+l}, b_1\dots b_k]} \end{aligned}$$

в силу леммы 9, так как $l-1$ четно. Приравняем полученное выражение к $[b_1\dots b_k, b_{k+1}\dots b_{k+l}]^{-1}$ и перейдем к обратным элементам в обеих частях полученного равенства:

$$\begin{aligned} &[b_1\dots b_k, b_{k+1}\dots b_{k+l-1}]^{b_{k+l}[b_{k+l}, b_1\dots b_k]}[b_1\dots b_k, b_{k+l}] \\ &\qquad = [b_1\dots b_k, b_{k+l}][b_1\dots b_k, b_{k+1}\dots b_{k+l-1}]^{b_{k+l}}. \end{aligned}$$

Обозначим $x = [b_1 \dots b_k, b_{k+1} \dots b_{k+l-1}]^{b_{k+l}}$, $y = [b_1 \dots b_k, b_{k+l}]$. Тогда рассматриваемое равенство принимает вид $x^{y^{-1}} y = yx$, а это истинное тождество. Лемма 13 доказана.

П. III теоремы следует из лемм 5, 9, 12, 13. Теорема доказана полностью.

Теорема 2 вытекает из теоремы 1 в силу того, что любая конечная абелева группа является фактор-группой гомоциклической группы подходящих периода и ранга.

Теорема 3 получается из теоремы 1 при m вида 2^k, $k \geq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alperin J. L.* On a special class of regular groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 1. P. 77–99.
2. *Веретенников Б. М.* Об одной гипотезе Альперина // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 1. С. 200–202.
3. *Веретенников Б. М.* О конечных 3-порожденных 2-группах Альперина // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 155–168.
4. *Веретенников Б. М.* О конечных 2-группах Альперина с циклическими вторыми коммутантами // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 3. С. 326–350.
5. *Веретенников Б. М.* О конечных 2-группах Альперина с элементарными абелевыми вторыми коммутантами // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 543–557.
6. *Веретенников Б. М.* Конечная 2-группа Альперина со вторым коммутантом произвольного порядка // Тез. докл. междунар. конф. «Мальцевские чтения». Новосибирск, 2009. С. 47.
7. *Веретенников Б. М.* О ранге вторых коммутантов 2-групп Альперина // Тез. докл. междунар. конф. «Мальцевские чтения». Новосибирск, 2010. С. 69.
8. *Веретенников Б. М.* 2-Группы Альперина с бесконечными циклическими и элементарными абелевыми вторыми коммутантами // Тез. докл. междунар. конф. «Алгебра, логика, теория и приложения». Красноярск, 2010. С. 15.
9. *Веретенников Б. М.* О конечных p-группах с метациклическим коммутантом // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 999–1004.
10. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 30 апреля 2013 г.

Веретенников Борис Михайлович
Уральский федеральный университет (УрФУ),
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
boris@veretennikov.ru