Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 517.11

ИРРЕФЛЕКСИВНАЯ МОДАЛЬНОСТЬ КАК НОВАЯ ЛОГИЧЕСКАЯ СВЯЗКА В ЛОГИКЕ ДАММЕТА

А. Д. Яшин

Аннотация. Приводится пример счетного семейства расширений суперинтуиционистской логики Даммета LC в языке с дополнительной одноместной логической связкой, каждое из которых определяет новую логическую связку в LC в смысле П. С. Новикова, и каждые две логики из этого семейства несовместимы над LC.

Ключевые слова: Логика Даммета, новая логическая связка, полнота по П. С. Новикову.

§ 1. Введение

Пусть Fm — класс формул языка логики высказываний, включающего множество пропозициональных переменных $\{p_i, q_j, \dots\}$, стандартные связки $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\neg$. Добавим также стандартные логические константы 0 и 1 (ложь и истина). *Эквиваленция* вводится обычным образом: $(p \leftrightarrow q) :\Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$.

Предполагаем знакомство с интуиционистской пропозициональной логикой Int (см., например, [1]).

Суперинтуиционистской логикой (с.и.л.) называется произвольное подмножество $L \subset Fm$, включающее Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки.

Через $L + A$ обозначается наименьшая с.и.л., включающая логику L и содержащая формулу A.

Добавив к пропозициональному языку дополнительную одноместную логическую связку $\varphi(\cdot)$, получим класс $Fm(\varphi)$ формул расширенного языка, при этом формулы из Fm назовем *чистыми*.

Явным соотношением для связки φ называется формула вида $\varphi(p) \leftrightarrow B$, где подформула B чистая.

Подстановка на $Fm(\varphi)$ — отображение $s : Fm(\varphi) \to Fm(\varphi)$, сохраняющее константы и согласованное со стандартными логическими связками: $s(0) = 0$, $s(1) = 1$, $s(A \circ B) = s(A) \circ s(B)$ ($\circ$ — двухместная связка), $s(\varphi(A)) = \varphi(s(A))$, $s(\neg A) = \neg s(A)$.

Следуя Д. П. Скворцову [2], назовем *φ-логикой* множество $\mathscr{L}$ формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил modus ponens, подстановки и правила замены эквивалентных для связки φ:

$$\frac{A \leftrightarrow B}{\varphi(A) \leftrightarrow \varphi(B)}.$$

Аксиомой замены для связки φ называется формула

$$(p \leftrightarrow q) \to (\varphi(p) \leftrightarrow \varphi(q)) \qquad RA(\varphi)$$

(the Replacement Axiom). Сразу заметим, что наличие аксиомы замены для φ в данной φ-логике автоматически влечет замкнутость последней относительно правила замены для φ.

φ-Логика $\mathscr{L}$ называется *консервативным расширением* с.и.л. L, если $L \subset \mathscr{L}$ и для класса чистых формул выполнено $Fm \cap \mathscr{L} = L$.

Проблема новых одноместных связок в с.и. логиках поставлена П. С. Новиковым и впервые сформулирована в статьях Я. С. Сметанича [3, 4]. Приведем соответствующие определения.

φ-Логика $\mathscr{L}$ *определяет новую логическую связку в* L, если выполнены три условия:

- $\mathscr{L}$ консервативна над L;
- $\mathscr{L}$ содержит аксиому $RA(\varphi)$;
- для любого явного соотношения $\varphi(p) \leftrightarrow B$ φ-логика $\mathscr{L} + \varphi(p) \leftrightarrow B$ является неконсервативной над L (другими словами, $\mathscr{L}$ не допускает присоединения никаких явных соотношений для φ).

В упомянутых работах Я. С. Сметанича приведен пример φ-логики, определяющей новую связку в Int. Одна из аксиом φ-логики Сметанича имеет вид $\varphi(p) \leftrightarrow \varphi(q)$, т. е. связка φ фактически является новой логической константой. В связи с этим будем говорить, что консервативная над L φ-логика $\mathscr{L}$ определяет *новую неконстантную связку* в L, если при этом формула $\varphi(p) \leftrightarrow \varphi(q)$ (аксиома константности) неприсоединима к $\mathscr{L}$.

φ-Логика $\mathscr{L}$ называется *полным по П. С. Новикову расширением* логики L, если $\mathscr{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\varphi)$, не принадлежащей $\mathscr{L}$, φ-логика $\mathscr{L} + A$ неконсервативна над L (т. е. *$\mathscr{L}$ не допускает присоединения* никакой новой формулы).

Под *минимум-проблемой Новикова для с.и.л. L* понимается отыскание явных примеров полных по Новикову расширений L. Под *максимум-проблемой Новикова для с.и.л. L* понимается описание всего семейства полных по Новикову расширений L.

В качестве предварительного шага к решению максимум-проблемы можно поставить вопрос об оценке снизу числа полных по Новикову расширений с.и.л. L. Назовем две консервативные φ-логики $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ *несовместными над* L, если φ-логика $\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2$ неконсервативна над L. Для получения нижней оценки достаточно привести пример семейства консервативных попарно не совместимых над L φ-логик; мощность этого семейства и будет нижней оценкой (при этом вопрос полноты по Новикову может не затрагиваться).

В данной работе рассматривается нижняя оценка числа полных по Новикову расширений применительно к так называемой логике Даммета LC (см. [5]):

$$LC = \mathrm{Int} + (p \to q) \vee (q \to p)$$

(формула $(p \to q) \vee (q \to p)$ представляет собой так называемую аксиому линейности. В дальнейшем линейно упорядоченные шкалы и модели будем изображать горизонтально, «рост» слева направо).

Новые логические константы в логике Даммета изучены в [6], поэтому в данной статье сделан акцент на неконстантной связке в LC.

Основной результат данной статьи: строится счетная последовательность попарно не совместимых расширений LC, каждое из которых определяет новую неконстантную связку в LC.

§ 2. О метаматематике φ-шкал

Предполагается знакомство с основными метаматематическими понятиями (шкала, конус, алгебра конусов, обобщенная шкала, оценка переменных, модель, подшкала, p-морфизмы и т. д. см., например, [7]).

Для шкалы W и $x \in W$ пусть $W^x := \{y \in W \mid y \geq x\}$ (конус с корнем x).

Для линейно упорядоченных шкал понятие p-морфизма описывается проще, именно, достаточно двух «точечных» условий: сюръективности и монотонности, третье условие (конусность) следует из них.

Обобщенная φ-шкала — объект вида $\mu = (W, S; \Phi)$, где (W, S) — обобщенная шкала, $\Phi : S \to S$ — оператор, действующий на п.б. алгебре S. Значение оператора Φ на конусе X будем обозначать через $\Phi\{X\}$ (обозначение $\Phi(X)$ с круглыми скобками обычно применяется для образа множества X при поточечном действии функции Φ).

Метаматематические понятия и теоремы чистой логики переносятся на расширенный язык.

2.1 Аксиома замены $RA(\varphi)$ и порожденные φ-подшкалы. Отметим теоретико-модельный эквивалент аксиомы замены $RA(\varphi)$.

Предложение 1. $(W, S; \Phi) \models RA(\varphi) \Leftrightarrow \forall x \in W \forall X, Y \in S(W^x \cap X = W^x \cap Y \Rightarrow W^x \cap \Phi\{X\} = W^x \cap \Phi\{Y\})$.

Общезначимость аксиомы $RA(\varphi)$ на обобщенной φ-шкале $\mu = (W, S; \Phi)$ позволяет корректно определить понятие *φ-подшкалы $\mu' = (W', S'; \Phi')$, порожденной конусом* $W' \in \operatorname{Con} W$ (первые два пункта традиционны):

• множество вершин — W' с наследуемым из W упорядочением;

• множество допустимых конусов — $S' := \{X \cap W' \mid X \in S\}$; конус $X \cap W'$ можно назвать *следом конуса X на W'*;

• оператор $\Phi' : S' \to S'$ определяется так:

$$\Phi'\{X \cap W'\} := \Phi\{X\} \cap W';$$

конус $X \cap W'$ является следом самого конуса $X \in S$, но также, возможно, и некоторых других конусов $Y \in S$. Пусть Y имеет такой же след, что и X. Это означает, что $X \cap W' = Y \cap W'$. Из предложения 1 в силу $\mu \models RA(\varphi)$ получаем $\Phi'\{X \cap W'\} = \Phi\{X\} \cap W' = \Phi\{Y\} \cap W' = \Phi'\{Y \cap W'\}$. Это доказывает корректность задания оператора Φ' на S'.

Если на μ задана оценка переменных v, то *наследуемая оценка v' на μ'* определяется так: $v'(p) := v(p) \cap W'$.

Теорема 1 (о наследуемой оценке). *При указанных предположениях для любой формулы $A \in Fm(\varphi)$ имеем $v'(A) = v(A) \cap W'$.*

Доказательство проводим индукцией по построению формулы A. Базис индукции (для переменных) вытекает из определения наследуемой оценки.

Разберем шаг индукции $A \mapsto \varphi(A)$. Предполагаем, что $v'(A) = v(A) \cap W'$. Докажем, что $v'(\varphi(A)) = v(\varphi(A)) \cap W'$, цепочкой равенств:

$v'(\varphi(A)) = \Phi'\{v'(A)\} =$ [по предположению индукции] $= \Phi'\{v(A) \cap W'\} =$ [по определению оператора Φ'] $= \Phi\{v(A)\} \cap W' = v(\varphi(A)) \cap W'$.

2.2. p_φ-Морфизмы. Пусть $\mu = (W, S; \Phi)$ и $\mu' = (W', S'; \Phi')$. *p_φ-Морфизм* обобщенных φ-шкал $h \colon \mu \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mu'$ определяется как p-морфизм $h : (W, S) \twoheadrightarrow (W', S')$, согласованный с операторами: $h^{-1}(\Phi'\{X\}) = \Phi\{h^{-1}(X)\}$ для всех $X \in S'$ (см. [2]).

Если на μ' задана оценка переменных v', то ее *прообраз* v на μ определяется посредством $v(p) := h^{-1}(v'(p))$ для любой пропозициональной переменной p.

Теорема 2 (о p_φ-морфизмах). *При указанных предположениях для любой формулы $A \in Fm(\varphi)$ имеем $v(A) = h^{-1}(v'(A))$.*

§ 3. О логике Даммета

Класс $\mathbf{M}$ шкал называется *характеристическим для* LC, если $L(\mathbf{M}) = LC$.

Известно, что LC характеризуется классом конечных линейно упорядоченных шкал (цепей)[1)]. Класс конечных цепей характеристический. Любой конфинальный класс конечных цепей (т. е. содержащий цепи сколь угодно большой длины) тоже является характеристическим.

Для последующего изложения зафиксируем

Предложение 2. *Любой класс, состоящий из единственной бесконечной цепи, характеристический для LC.*

Доказательство. Всякая конечная цепь является образом данной бесконечной цепи относительно подходящего монотонного отображения, которое именно для линейно упорядоченных шкал будет p-морфизмом.

Пример. Одноэлементные классы, содержащие цепи порядковых типов $\omega + n$ при натуральных n, характеристические.

В качестве формул, не принадлежащих логике Даммета, можно привести так называемые ограничители высоты:

$$bd_1 :\Leftrightarrow (p_1 \vee \neg p_1), \quad bd_{n+1} :\Leftrightarrow (p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to bd_n)).$$

Известно, что формула bd_n общезначима в конечных цепях высоты $\leq n$ и опровергается в любой конечной цепи высоты $> n$.

§ 4. О некоторых операторах на цепях

Пусть W — цепь и (W, S) — обобщенная шкала. Оператор $\Phi : S \to S$ назовем *неуменьшающим*, если для любого конуса $X \in \operatorname{Con} W$ выполняется включение $X \subseteq \Phi\{X\}$.

Предложение 3. *В φ-шкале $(W, S; \Phi)$ с неуменьшающим оператором Φ общезначима аксиома $RA(\varphi)$.*

Доказательство. Пусть v — оценка на (W, S), $v(p) = P \in S$, $v(q) = Q \in S$ и $x \in W$.

Предположим, что $x \Vdash_v p \leftrightarrow q$. Это означает, что $W^x \cap P = W^x \cap Q$. Возможны два случая.

1. Пусть $x \notin P$. Тогда $x \notin Q$. В силу линейной упорядоченности шкалы W имеем $P, Q \subset W^x$. Отсюда $P = Q$. Следовательно, $\Phi\{P\} = \Phi\{Q\}$, и тем более $W^x \cap \Phi\{P\} = W^x \cap \Phi\{Q\}$. Получили $x \Vdash_v \varphi(p) \leftrightarrow \varphi(q)$.

2. Пусть $x \in P$. Тогда $x \in Q$. Далее, $W^x \cap \Phi\{P\} \supset W^x \cap P = W^x$, так как оператор Φ неуменьшающий. Аналогично $W^x \cap \Phi\{Q\} \supset W^x \cap Q = W^x$. Получили $x \Vdash_v \varphi(p) \leftrightarrow \varphi(q)$.

---

1) Отсюда обозначение LC — the Logic of Chains. Согласно Л. Л. Максимовой [8] LC — одна из трех предтабличных с.и.л.

Предложение 4. *Пусть W — бесконечная (счетная) вполне упорядоченная шкала. На п.б. алгебре $\operatorname{Con} W$ существует континуум попарно различных неуменьшающих операторов.*

Доказательство. Каждый непустой конус шкалы W содержит наименьший элемент, поэтому п.б. алгебра $\operatorname{Con} W$ равна $\{W^x \mid x \in W\} \cup \{\varnothing\}$.

Далее, заметим, что W содержит начальный отрезок Ω, упорядоченный по типу ω натуральных чисел. Выберем в Ω произвольное непустое подмножество V, не содержащее корня шкалы W, и построим отображение $\Phi_V : \operatorname{Con} W \to \operatorname{Con} W$ по правилу

$$\Phi_V\{X\} := \begin{cases} W^{x-1} & \text{при } x \in V \text{ и } X = W^x, \\ W^x & \text{при } x \notin V \text{ и } X = W^x, \\ \varnothing & \text{при } X = \varnothing. \end{cases}$$

Построенный оператор Φ_V неуменьшающий, кроме того, из $V_1 \neq V_2$ следует $\Phi_{V_1} \neq \Phi_{V_2}$. Наконец, вспомним, что существует континуум вариантов выбора V в Ω.

§ 5. Иррефлексивная модальность на линейных шкалах

Рассмотрим следующую интерпретацию связки φ в моделях Крипке:

$$x \Vdash_v \varphi(A) :\Leftrightarrow \forall y > x (y \Vdash_v A).$$

А. В. Бессонов [9] использовал такую интерпретацию связки для построения примера φ-логики, определяющей новую неконстантную связку в Int. А. Ю. Муравицкий [10] показал, что класс конечных деревьев с иррефлексивной модальностью моделирует так называемую логику Кузнецова I^{Δ}, первоначально предложенную А. В. Кузнецовым [11] для характеризации оператора доказуемости в арифметике Гейтинга HA. Г. К. Дарджания [12] построил секвенциальный вариант логики Кузнецова. В [13] логика Кузнецова послужила отправной точкой для построения явного примера полной по Новикову φ-логики с новой связкой над Int.

Указанная интерпретация связки φ задает неуменьшающий оператор на п.б. алгебре конусов любой цепи.

Примеры формул, общезначимых в произвольных шкалах:

1°) $A \to \varphi(A)$;

2°) $\varphi(A) \to (B \vee (B \to A))$.

Формула

3°) $\neg\neg\varphi(0)$

общезначима в цепях с наибольшим элементом.

Далее связка φ будет интерпретироваться как иррефлексивная модальность.

§ 6. Счетное семейство консервативных попарно не совместимых φ-логик

Напомним, что шкала порядкового типа $\omega + k$ имеет вид

$$\underbrace{\bullet - \bullet - \cdots - \bullet - \cdots - \to}_{\omega}\underbrace{\bullet - \bullet - \cdots - \bullet}_{k}.$$

Рассмотрим φ-логики $\mathscr{L}_k := \mathscr{L}(\omega + k)$ для каждого натурального $k \geq 1$. В силу предложения 2 каждая из этих φ-логик консервативна над LC.

Предложение 5. *Каждая $\mathscr{L}_n$ определяет новую по Новикову связку в LC.*

Доказательство. Если подформула B в явном соотношении $\varphi(p) \leftrightarrow B$ содержит иные переменные, помимо p, то по правилу подстановки вместо них можно подставить p. Это означает, что достаточно рассматривать только явные соотношения, в которых подформула B содержит единственную переменную p. Классификация формул с единственной переменной над Int известна под названием *лестницы Нишимуры* [14]. Для наших целей достаточна упрощенная классификация, приведенная, например, в упомянутой выше статье [4]: всякая формула от одной переменной либо эквивалентна (в Int и тем более в LC) одной из формул 0, p, $\neg p$, $\neg\neg p$, либо является классической тавтологией. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

Соотношение $\varphi(p) \leftrightarrow 0$ эквивалентно формуле $\neg\varphi(p)$. Вместе с аксиомой 1° и законом контрапозиции оно влечет $\neg p$. Но эта формула опровергается в одноэлементной цепи $\{w\}$ с оценкой $v(p) = \{w\}$, поэтому не принадлежит LC.

Соотношение $\varphi(p) \leftrightarrow p$ вместе с аксиомой 3° дает $\neg\neg 0$, что равносильно 0, а $0 \notin LC$.

Соотношение $\varphi(p) \leftrightarrow \neg p$ с аксиомой 2° дает чистую формулу $\neg p \to (q \vee (q \to p))$, которая опровергается в двухэлементной цепи

$$\bullet - - - - - - - \bullet_q,$$

поэтому не принадлежит LC.

Соотношение $\varphi(p) \leftrightarrow \neg\neg p$ с аксиомой 2° дает чистую формулу $\neg\neg p \to (q \vee (q \to p))$, которая опровергается в трехэлементной цепи

$$\bullet - - - - - - - \bullet_q - - - - - - - \bullet_{p,q},$$

поэтому не принадлежит LC.

Наконец, пусть B — классическая тавтология. Согласно [4, лемма 3] $(p \vee \neg p) \to B(p) \in \mathrm{Int}$ и тем более $(p \vee \neg p) \to B(p) \in LC$. Соотношение $\varphi(p) \leftrightarrow B$ вместе с 2° дает $B(p) \to (q \vee (q \to p))$. Имеем $(p \vee \neg p) \to (q \vee (q \to p))$. Подставим $p := 0$. Получаем $(q \vee \neg q)$ — ограничитель высоты bd_1, при этом $bd_1 \notin LC$.

Предложение 6. *В каждой φ-логике $\mathscr{L}_n$ связка φ неконстантна.*

Доказательство. Рассмотрим аксиомы 1°, 2° и аксиому константности $\varphi(p) \leftrightarrow \varphi(q)$.

В силу 1° имеем $p \to \varphi(p)$. Ввиду аксиомы константности $p \to \varphi(q)$ (переменная q отлична от p). В силу 2° получаем $\varphi(q) \to (r \vee (r \to q))$, где переменная r отлична от p и q. Тогда $p \to (r \vee (r \to q))$. Однако последняя формула опровергается в двухэлементной цепи

$$\bullet_p - - - - - - - \bullet_{p,r},$$

поэтому не принадлежит LC.

Глубиной точки x в цепи W называется число $dp(x)$ элементов конуса W^x; глубина максимальной точки при таком определении равна 1; также глубина может равняться ∞.

С глубиной точек в цепи можно связать константные формулы вида $\varphi^k(0)$. Именно, для всех натуральных $k > 0$ имеем

$$dp(x) = k \Leftrightarrow x \Vdash \varphi^k(0) \text{ и } x \nVdash \varphi^{k-1}(0), \quad dp(x) = \infty \Rightarrow x \nVdash \varphi^k(0).$$

Рассмотрим формулы $A_m := \varphi^m(0) \to \varphi^{m-1}(0)$ для всех натуральных $m > 0$.

Предложение 7. *Если* $m \leq n$, *то* $\omega + n \models A_m \to bd_{m-1}$.

Доказательство. При $m \leq n$ шкала $\omega + n$ содержит точку a глубины m. Имеем $a \Vdash \varphi^m(0)$ и $a \nVdash \varphi^{m-1}(0)$. Значит, $a \nVdash A_m$. Поэтому A_m вынуждается только в точках глубины $< m$, следовательно, $\omega + n \models A_m \to bd_{m-1}$.

Предложение 8. *Если* $m > n$, *то* $\omega + n \models A_m$.

Доказательство. Для опровержения формулы A_m шкала $\omega + n$ должна содержать точку глубины m. Однако в условии предложения такой точки нет.

Из этих предложений получаем основной результат.

Теорема 3. *φ-Логики $\mathscr{L}_n$ попарно не совместимы над LC. Каждая из них определяет новую неконстантную связку в LC.*

В качестве следствия получаем как минимум счетную бесконечность семейства полных по Новикову расширений с.и.л. Даммета в языке с одной дополнительной неконстантной связкой.

Вопрос о континуальности этого семейства остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков П. С.* Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М.: Наука, 1977.
2. *Скворцов Д. П.* Об интуиционистском исчислении высказываний с дополнительной логической связкой // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983. С. 154–174.
3. *Сметанич Я. С.* Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией // Докл. АН СССР. 1959. Т. 139, № 2. С. 309–312.
4. *Сметанич Я. С.* О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной // Тр. Моск. мат. о-ва. 1960. Т. 9. С. 357–371.
5. *Dummett M.* A propositional calculus with denumerable matrix // J. Symb. Logic. 1959. V. 24, N 1. P. 97–106.
6. *Яшин А. Д.* О новых константах в двух предтабличных суперинтуиционистских логиках // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2. С. 246–267.
7. *Zakharyaschev M., Wolter F., Chagrov A.* Advanced modal logic // Handbook of philosophical logic. 2nd edition. Ed. by D. M. Gabbay, F. Guenthner. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. V. 3. P. 83–266.
8. *Максимова Л. Л.* Предтабличные суперинтуиционистские логики // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 5. С. 558–570.
9. *Бессонов А. В.* О новых операциях в интуиционистском исчислении // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 1. С. 23–28.
10. *Муравицкий А. Ю.* О финитной аппроксимируемости исчисления I^{Δ} и немоделируемости некоторого его расширения // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 6. С. 907–916.
11. *Кузнецов А. В.* О доказуемостно-интуиционистском пропозициональном исчислении // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 1. С. 27–30.
12. *Дарджания Г. К.* Секвенциальный вариант модальной системы I^{Δ} // Металогические исследования. Тбилиси: Мецниереба, 1985. С. 59–72.
13. *Yashin A. D.* Irreflexive modality in the intuitionistic propositional logic and Novikov completeness // J. Phil. Log. 1999. V. 28. P. 175–197.
14. *Nishimura I.* On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus // J. Symb. Logic. 1960. V. 25. P. 327–331.

Статья поступила 27 марта 2013 г.

Яшин Александр Данилович
Московский городской психолого-педагогический университет,
ул. Сретенка, 29, Москва 127051
yashin.alexandr@yandex.ru