Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 519.17

КОМБИНАТОРНОЕ СТРОЕНИЕ ГРАНЕЙ В ТРИАНГУЛИРОВАННЫХ 3–МНОГОГРАННИКАХ С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 4

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. В 1940 г. Лебег доказал, что каждый 3-многогранник с минимальной степенью не менее 4 содержит 3-грань, набор степеней вершин которой мажорируется одной из следующих последовательностей: $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 19)$, $(4, 6, 11)$, $(4, 7, 9)$, $(5, 5, 9)$, $(5, 6, 7)$. Это описание было усилено Бородиным (2002) следующим образом: $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 17)$, $(4, 6, 11)$, $(4, 7, 8)$, $(5, 5, 8)$, $(5, 6, 6)$.

Для триангуляций с минимальной степенью не менее 4 Йендроль (1999) дал такое описание граней: $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 13)$, $(4, 6, 17)$, $(4, 7, 8)$, $(5, 5, 7)$, $(5, 6, 6)$.

Мы даем следующее описание граней в плоских триангуляциях (в частности, для триангулированных 3-многогранников) с минимальной степенью не менее 4, в котором все параметры неулучшаемы и достигаются независимо от других: $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 11)$, $(4, 6, 10)$, $(4, 7, 7)$, $(5, 5, 7)$, $(5, 6, 6)$.

Попутно опровергается гипотеза Йендроля (1999) о комбинаторном строении граней в триангулированных 3-многогранниках.

Ключевые слова: плоская карта, плоский граф, 3-многогранник, структурные свойства, вес.

1. Введение

Степень $d(v)$ вершины v ($r(f)$ грани f) в плоской карте M есть число инцидентных ей ребер (петли учитываются дважды в $d(v)$, а разделяющие ребра — дважды в $r(f)$). Через Δ и δ обозначим максимальную и минимальную степени вершин в M соответственно. k*-Вершина* (k*-грань*) есть вершина (грань) степени k, а k^+*-вершина* имеет степень не менее k, и т. д.

Известно, что каждая нормальная плоская карта, в которой петли и кратные ребра разрешены, но степень каждой вершины и грани не менее 3, имеет 5^--вершину и 5^--грань. Далее через M обозначим нормальную плоскую карту. Таким образом, каждая M удовлетворяет $3 \leq \delta \leq 5$. Как доказано Штейницем [1], 3-многогранники (т. е. конечные выпуклые 3-мерные многогранники) взаимно однозначно соответствуют 3-связным плоским графам.

Весом грани в M называется сумма степеней ее граничных вершин, а через $w(M)$, или просто w, обозначается минимальный вес 5^--граней в M. Будем говорить, что f является *гранью типа* $(k_1, k_2, \dots)$ или просто $(k_1, k_2, \dots)$*-гранью*, если набор степеней инцидентных f вершин мажорируется вектором $(k_1, k_2, \dots)$.

В 1940 г. Лебег [2] дал приближенное описание 5^--граней в нормальных плоских картах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–00631, 12–01–00448 (первый автор), 12–01–00448, 12–01–98510 (второй автор)).

Теорема 1 [2]. *Каждая нормальная плоская карта содержит* 5^-*-грань одного из следующих типов:*

$$(3,6,\infty),(3,7,41),(3,8,23),(3,9,17),(3,10,14),(3,11,13),$$

$$(4,4,\infty),(4,5,19),(4,6,11),(4,7,9),(5,5,9),(5,6,7),$$

$$(3,3,3,\infty),(3,3,4,11),(3,3,5,7),(3,4,4,5),(3,3,3,3,5).$$

Из теоремы 1 имеем

Следствие 2 [2]. *Каждая нормальная плоская карта без* 3*-вершин имеет* 3*-грань одного из следующих типов:* $(4,4,\infty)$, $(4,5,19)$, $(4,6,11)$, $(4,7,9)$, $(5,5,9)$, $(5,6,7)$.

Теорема 1 наряду с другими идеями Лебега в [2] имеет множество приложений к проблемам раскраски плоских графов (см. недавний обзор [3]).

Некоторые параметры в теореме Лебега были улучшены для узких классов плоских графов. Из теоремы Лебега [2, с. 36] следует, что каждая плоская триангуляция с $\delta = 5$ удовлетворяет условию $w \le 18$. В 1963 г. Коциг [4] дал другое доказательство этого факта и предположил, что $w \le 17$. В 1989 г. О. В. Бородин [5] доказал гипотезу Коцига в более общем виде.

Теорема 3 [5]. *Каждая нормальная плоская карта с* $\delta = 5$ *содержит* $(5,5,7)$*-грань или* $(5,6,6)$*-грань, где все параметры точны.*

Теорема 3 также подтверждает гипотезу Грюнбаума [6] (1975) о том, что циклическая связность (определяемая как минимальное число ребер, при удалении которых из графа получаются две компоненты, каждая из которых содержит цикл) любого 5-связного плоского графа не превосходит 11. Эта оценка точна (граница 13 была ранее получена Пламмером [7]).

Заметим, что 3-многогранники с $(4,4,\infty)$-гранями могут иметь неограниченный w, как следует из n-пирамиды, двойной n-пирамиды и аналогичной конструкции, в которой каждая 3-грань инцидентна 3-вершине, 4-вершине и n-вершине. То же верно для $(3,3,3,\infty)$-граней: возьмем двойную $2n$-пирамиду и удалим все четные верхние ребра и все нечетные нижние, чтобы получить четырехангуляцию, имеющую только $(3,3,3,2n)$-грани.

Для плоских триангуляций без 4-вершин Коциг [8] доказал $w \le 39$, а Бородин [9], подтверждая гипотезу Коцига [8], доказал $w \le 29$, что является точной оценкой благодаря дважды усеченному додекаэдру. Бородин [10] позднее показал, что каждый триангулированный 3-многогранник без $(4,4,\infty)$-граней удовлетворяет неравенству $w \le 29$ и что для триангуляций без смежных между собой 4-вершин существует точная граница $w \le 37$.

В 1999 г. Йендроль [11] обобщил теорему 3 и некоторые результаты из [9, 10] следующим образом.

Теорема 4 [11]. *Каждая плоская триангуляция содержит грань одного из следующих типов:*

$$(3,4,35),(3,5,21),(3,6,20),(3,7,16),(3,9,14),(3,10,13),$$

$$(4,4,\infty),(4,5,13),(4,6,17),(4,7,8),(5,5,7),(5,6,6).$$

Следствие 5 [11]. *Каждая плоская триангуляция с* $\delta \ge 4$ *содержит грань одного из следующих типов:* $(4,4,\infty)$, $(4,5,13)$, $(4,6,17)$, $(4,7,8)$, $(5,5,7)$, $(5,6,6)$.

В 2002 г. Бородин [12] усилил теорему 1 Лебега следующим образом.

Теорема 6 [12]. *Каждая нормальная плоская карта содержит 5^--грань одного из следующих типов:*

$$(3,6,\infty),(3,8,22),(3,9,15),(3,10,13),(3,11,12),$$

$$(4,4,\infty),(4,5,17),(4,6,11),(4,7,8),(5,5,8),(5,6,6),$$

$$(3,3,3,\infty),(3,3,4,11),(3,3,5,7),(3,4,4,5),(3,3,3,3,5).$$

Непосредственно из теоремы 1 Лебега следует, что если $\delta \geq 4$, то существует либо $(4,4,\infty)$-грань, либо 3-грань ограниченного веса. Из теоремы 6 получаем несколько большее.

Следствие 7 [12]. *Каждая нормальная плоская карта без 3-вершин содержит 3-грань одного из следующих типов:*

$$(4,4,\infty),(4,5,17),(4,6,11),(4,7,8),(5,5,8),(5,6,6).$$

Старые проблемы поиска наилучших из возможных версий важных теорем 1 и 6 остаются широко открытыми. До сих пор было известно полное решение только для $\delta = 5$ (см. теорему 3). Еще в 1999 г. Йендроль высказал следующую гипотезу, повторенную в недавнем обзоре Йендроля и Фосса [13, гипотеза 4.9].

Гипотеза 8 [11]. *Каждая плоская триангуляция содержит грань одного из следующих типов:*

$$(3,4,30),(3,5,18),(3,6,20),(3,7,14),(3,8,14),(3,9,12),(3,10,12),$$

$$(4,4,\infty),(4,5,10),(4,6,15),(4,7,7),(5,5,7),(5,6,6),$$

причем все коэффициенты неулучшаемы.

Целью этой заметки является следующее точное описание граней в плоских триангуляциях с $\delta \geq 4$, обобщающее теорему 3 и усиливающее следствия 2, 5 и 7.

Теорема 9. *Каждая плоская триангуляция без 3-вершин содержит грань одного из следующих типов:*

(Ta) $(4,4,\infty)$,
(Tb) $(4,5,11)$,
(Tc) $(4,6,10)$,
(Td) $(4,7,7)$,
(Te) $(5,5,7)$,
(Tf) $(5,6,6)$.
Более того, все параметры в (Ta)–(Tf) *являются точными.*

В частности, мы впервые даем конструкцию (рис. 1), опровергающую гипотезу 8. Заметим, что теорема 9 не может быть расширена до произвольных нормальных карт с $\delta \geq 4$, поскольку имеет место следующий результат.

Теорема 10 [14]. *Каждая нормальная плоская карта без 3-вершин содержит 3-грань одного из следующих типов:*

$$(4,4,\infty),(4,5,14),(4,6,10),(4,7,7),(5,5,7),(5,6,6).$$

Более того, все параметры в каждом типе точные.

2. Точность теоремы 9

Верхние оценки в (Tb)–(Tf) теоремы 9 точны, что следует из конструкций на рис. 1 и 2.

А именно, рис. 1 показывает, как из плосконосого додекаэдра (т. е. 5-однородного плоского графа, в котором каждая вершина инцидентна одной 5-грани и четырем 3-граням) получить триангуляцию с вершинами степени 4, 5, 8 и 11, которая из перечисленных в теореме 9 типов граней содержит только тип $(4,5,11)$, фигурирующий в (Tb).

На рис. 2(Td) видим, как трансформировать октаэдр в триангуляцию, все вершины которой имеют степень 4, 7 или 8, так, что из перечисленных в (Ta)–(Tf) имеются только грани типа $(4,7,7)$. На рис. 2(Te) показана половина плоской триангуляции, содержащей 5- и 7-вершины, но не имеющей $(5,5,5)$-граней. Необходимость и точность условий (Tc) и (Tf) подтверждается простыми конструкциями, получающимися из икосаэдра (см. рис. 2). Что касается (Ta), то достаточно напомнить вышеупомянутую двойную пирамиду.

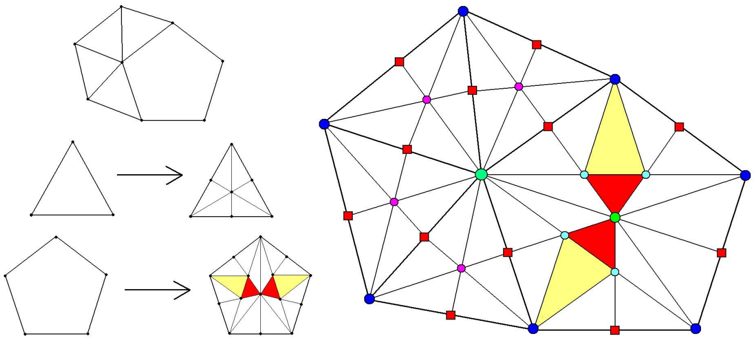

Рис. 1. Конструкция, показывающая неулучшаемость условия (Tb) в теореме 9.

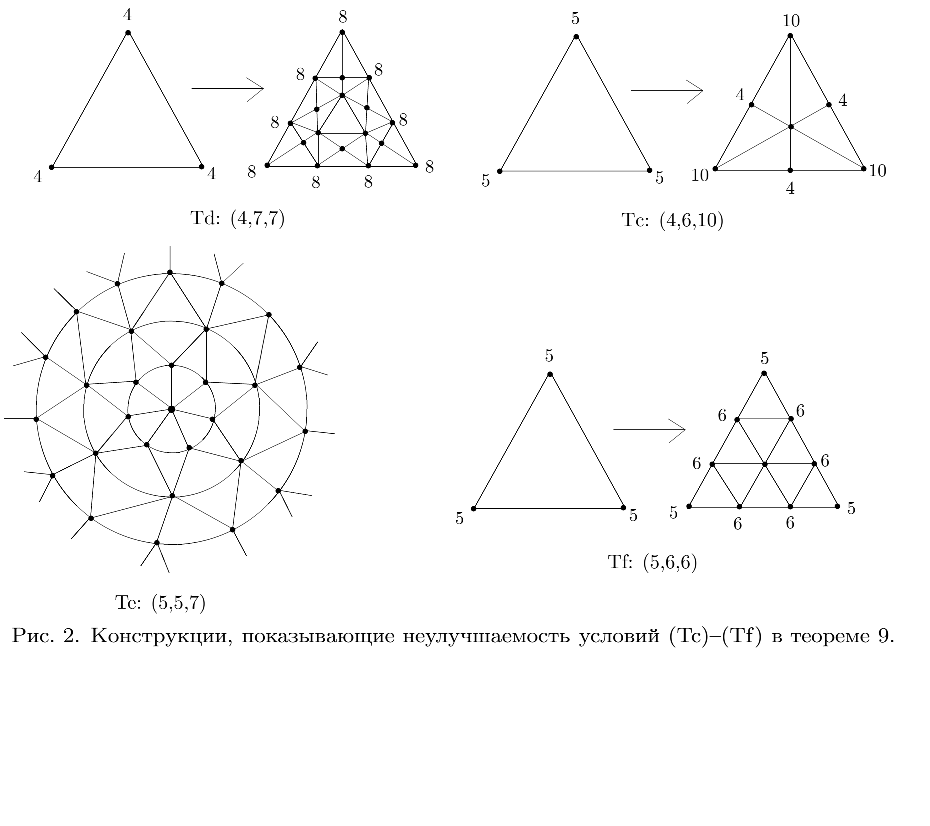

Рис. 2. Конструкции, показывающие неулучшаемость условий (Tc)–(Tf) в теореме 9.

3. Доказательство основного утверждения теоремы 9

Предположим, что триангуляция T не содержит ни одной из конфигураций (Ta)–(Tf). Множество вершин, ребер и граней триангуляции T обозначим через V, E и F соответственно.

3.1. Перераспределение зарядов. Формула Эйлера $|V|-|E|+|F|=2$ для T влечет

$$\sum_{v\in V}(d(v)-6)=-12. \tag{1}$$

Каждой вершине v присвоим *начальный заряд* $\mu(v)=d(v)-6$, так что только 5^{-}-вершины имеют отрицательный заряд. Используя свойства контрпримера T, определим локальное перераспределение зарядов, сохраняя их сумму, так, что *новый заряд* $\mu'(v)$ окажется неотрицательным для всех $v\in V$. Последнее будет противоречить тому факту, что сумма новых зарядов по формуле (1) равна -12. Техника перераспределения эйлеровых вкладов часто используется при решении структурных задач и задач раскраски плоских графов.

Сначала дадим несколько определений. Через $v_1,\ldots,v_{d(v)}$ обозначим соседей вершины v в циклическом порядке вокруг v. Назовем 7-вершину *сильной*, если она смежна с не более чем двумя 5^{-}-вершинами, иначе 7-вершина является *слабой*. Заметим, что слабая 7-вершина смежна в точности с тремя 5^{-}-вершинами. Другими обозначениями для сильной и слабой вершин будут 7_s- и 7_w*-вершины* соответственно. Назовем 7_w-вершину v *бедной*, если $d(v_1)=4$, $4\le d(v_3)\le 5$ и $d(v_5)=5$ или если $d(v_1)=d(v_3)=d(v_5)=4$. Через 7_p*-вершину* обозначаем бедную вершину.

Будем использовать следующие правила перераспределения зарядов (рис. 3).

R1. Пусть $T=uvw$ — треугольник, где v бедная, $d(u)\ge 8$ и $d(w)\ge 6$.

(a) Если $d(w)\le 7$ и w не является бедной, то v получает $\frac{1}{4}$ от u через T.

(b) Если w бедная, то каждая из v и w получает $\frac{1}{8}$ от u через T.

(c) Если $d(w)\ge 8$, то v получает $\frac{1}{4}$ от каждой из u и w через T.

R2. Пусть v — 7-вершина.

(a) Каждая v дает $\frac{1}{2}$ каждой смежной 4-вершине, и каждая сильная v дает $\frac{1}{2}$ каждой смежной 5-вершине.

(b) Если $d(v_1)=d(v_3)=d(v_5)=5$, то v дает $\frac{1}{3}$ каждой из v_1, v_3 и v_5.

(c) Если $d(v_1)=4$ и $d(v_3)=d(v_5)=5$, то v дает $\frac{1}{4}$ вершине v_3; кроме того, v дает $\frac{3}{8}$ вершине v_5, если v_6 бедная, и $\frac{1}{2}$ в противном случае.

(d) Если $d(v_1)=d(v_5)=5$ и $d(v_3)=4$, то v дает $\frac{1}{4}$ каждой из v_1 и v_5.

(e) Если $d(v_1)=d(v_5)=4$ и $d(v_3)=5$, то v ничего не дает вершине v_5.

(f) Если $d(v_1)=d(v_3)=4$ и $d(v_5)=5$, то v дает $\frac{1}{8}$ вершине v_5, если v_6 бедная; в противном случае v дает $\frac{1}{4}$ вершине v_5.

R3. Пусть $T=uvw$ — треугольник, где $d(v)=5$.

(a) Если $d(w)=5$, то каждая из v и w получает $\frac{1}{8}$ от (8^{+}-вершины) u через T.

(b) Если $d(w)\ge 6$, то v получает $\frac{1}{4}$ через T от каждой вершины u, если $8\le d(u)\le 11$, и получает $\frac{1}{2}$ от каждой 12^{+}-вершины в T.

R4. Пусть $T=uvw$ — треугольник, где $d(v)=4$.

(a) Если $5\le d(w)\le 6$, то v получает $\frac{1}{2}$ от (11^{+}-вершины) u через T.

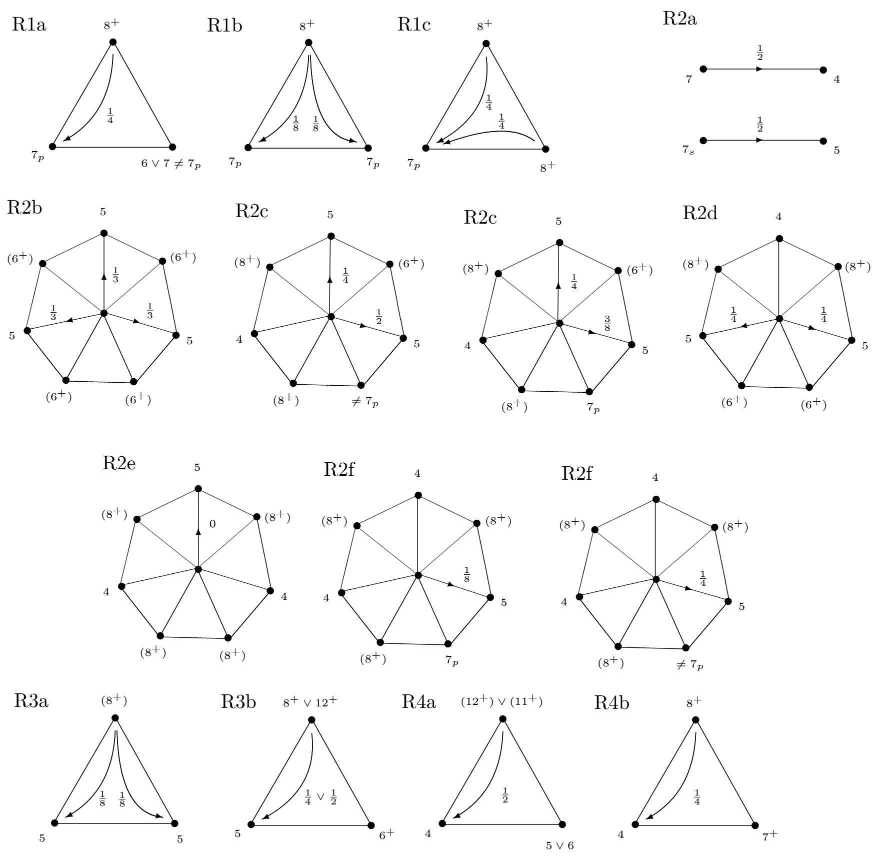

Рис. 3. Правила перераспределения зарядов.

(b) Если $d(w) \geq 7$ и $d(u) \geq 8$, то v получает $\frac{1}{4}$ от каждой 8^+-вершины в T.

3.2. Доказательство $\mu'(v) \geq 0$ для всех $v \in V$.

Случай 1. $d(v) \geq 12$. Поскольку наша v посылает не более $\frac{d(v)-6}{d(v)}$ через каждую инцидентную грань по R1, R3 и R4, имеем $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - d(v) \times \frac{d(v)-6}{d(v)} = 0$.

Случай 2. $d(v) = 11$. Если v дает $\frac{1}{2}$ по R4a не более 9 раз, то $\mu'(v) \geq 11 - 6 - 9 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{4} = 0$ по R1, R3 и R4. В противном случае v имеет двух смежных 6-соседей, в этом случае $\mu'(v) = 11 - 6 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$.

Случай 3. $8 \leq d(v) \leq 10$. Здесь $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - d(v) \times \frac{d(v)-6}{d(v)} = 0$ согласно R1, R3 и R4.

Случай 4. $d(v) = 7$. Заметим, что если $d(v_1) = 4$, то $d(v_2) \geq 8$ и $d(v_7) \geq 8$ благодаря отсутствию $(4,7,7)$-граней в T. Кроме того, если $d(v_1) = 5$, то $d(v_2) \geq 6$ и $d(v_7) \geq 6$ благодаря отсутствию $(5,5,7)$-граней. Таким образом, наша v инцидентна с не более чем тремя 5^--вершинами. Если v сильная, т. е. имеет не более двух 5^--соседей, то $\mu'(v) \geq 7 - 6 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$ по R2a.

Пусть v слабая. Если v смежна с тремя 4-вершинами, v_1, v_3 и v_5, то $d(v_6) \geq 8$ и $d(v_7) \geq 8$ и v получает не менее $2 \times \frac{1}{4}$ по R1c, так что $\mu'(v) \geq 1 - 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 0$ по R2a. Итак, пусть v смежна с не более чем двумя 4-вершинами, и мы имеем семь случаев для рассмотрения (см. R2 на рис. 3).

Заметим, что общая передача вершины v превышает 1 только в R2c и R2f. В первом случае (R2c) v бедная и получает $\frac{1}{8}$ по R1b, если v_6 тоже бедная, и $\frac{1}{4}$ по R1a в противном случае. Пусть $d(v_1) = d(v_3) = 4$ и $d(v_5) = 5$ (т. е. находимся в условиях R2f). Здесь $d(v_7) \geq 8$. Если v_6 бедная, то $\mu'(v) \geq 1 - 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0$ благодаря R2f и R1b, иначе $\mu'(v) \geq 1 - 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$ по R1a.

Случай 5. $d(v) = 6$. Поскольку v не участвует в перераспределении зарядов, имеем $\mu'(v) = \mu(v) = 0$.

Случай 6. $d(v) = 5$. Заметим, что v смежна с не более чем двумя 5^--вершинами благодаря отсутствию $(5, 5, 7)$ в контрпримере.

Подслучай 6.1. Существует ровно два 5^--соседа. Если $d(v_1) = d(v_3) = 5$, то каждая из v_2, v_4, v_5 является 8^+-вершиной благодаря отсутствию $(5, 5, 7)$-граней, так что $\mu'(v) \geq -1 + 4 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{4} = 0$ по R3. Если $d(v_1) = 5$ и $d(v_3) = 4$, то каждая из v_2, v_4 является 12^+-вершиной благодаря отсутствию $(4, 5, 11)$-граней, а $d(v_5) \geq 8$ благодаря отсутствию $(5, 5, 7)$-граней и $\mu'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0$ по R3. Наконец, если $d(v_1) = d(v_3) = 4$, то v получает не менее $2 \times \frac{1}{2}$ от v_4 и v_5 по R3b.

Подслучай 6.2. Существует ровно один 5^--сосед. Если $d(v_2) = 4$, то $\mu'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ по R3b.

Теперь предположим, что $d(v_2) = 5$. Каждая из v_1, v_3 дает $\frac{1}{8}$ вершине v через грани v_1v_2v, v_3v_2v по R3a и не менее $\frac{1}{4}$ через грани v_3v_4v, v_1v_5v по R3b, и нам остается найти еще $\frac{1}{4}$.

Заметим, что хотя бы одна из v_4, v_5 является 7^+-вершиной согласно отсутствию $(5, 6, 6)$-граней, скажем v_5. Тогда v получает не менее $\frac{1}{4}$ от v_5 и v_4 вместе по R2. Действительно, если v_5 дает $\frac{1}{8}$ по R2f, то v_4 является бедной 7-вершиной и отдает не менее $\frac{1}{8}$ вершине v тоже. Если R2e применяется к v_5, то v_4 есть 8^+-вершина и дает вершине v более чем достаточно. В противном случае v_5 дает не менее $\frac{1}{4}$ по R2.

Подслучай 6.3. Нет 5^--соседей. Заметим, что v смежна с не менее чем тремя 7^+-вершинами благодаря отсутствию $(5, 6, 6)$. Если существует не менее двух 8^+-вершин, то $\mu'(v) \geq -1 + 4 \times \frac{1}{4} = 0$ по R3b.

Если существует ровно одна 8^+-вершина, скажем v_2, то v получает $\frac{1}{2}$ от v_2 по R3b. Заметим, что R2e здесь не применимо. Из симметрии между $\{v_3, v_4\}$ и $\{v_5, v_1\}$ достаточно заметить, что v получает не менее $\frac{1}{4}$ от $\{v_3, v_4\}$. Если $d(v_4) = 6$, то $d(v_3) = 7$ благодаря отсутствию (5,6,6)-граней и v_3 дает вершине v не менее $\frac{1}{4}$ по R2. Допустим, что $d(v_4) = 7$. Если $d(v_3) = 6$, то v получает не менее $\frac{1}{4}$ от v_4, потому что R2f не применимо к v_4. Если $d(v_3) = 7$, то R2f не применимо к v_4 снова (и к v_3 тоже) и v получает не менее $\frac{1}{4}$ от них, что и требовалось.

Итак, допустим, что v смежна только с 6- или 7-вершинами. Заметим, что R2f с передачей в $\frac{1}{8}$ и R2e снова не применимы, поскольку v не имеет 8^+-соседей и v получает не менее $\frac{1}{4}$ от каждой смежной 7-вершины. Если имеется не менее четырех 7-вершин, то $\mu^*(v) \geq 0$ по R2. Наконец, пусть $d(v_1) = d(v_3) = d(v_4) = 7$ и $d(v_2) = d(v_5) = 6$. Теперь проверкой R2 убеждаемся, что v получает не менее $\frac{1}{3}$ от каждой из v_1, v_3 и v_4, что и требуется.

Случай 7. $d(v) = 4$. Заметим, что нет смежных 4-вершин согласно отсутствию $(4, 4, \infty)$-граней. Покажем, что v получает не менее 1 от v_2 и v_1, v_3 через грани v_1v_2v, v_3v_2v. (Из симметрии v получает не менее 1 от v_4 и v_1, v_3 через грани v_1v_4v, v_3v_4v.)

Подслучай 7.1. $5 \le d(v_2) \le 6$. В этом случае $d(v_1) \ge 11$ и $d(v_2) \ge 11$ благодаря отсутствию $(4, 6, 10)$-граней, поэтому каждая из v_1, v_3 дает $\frac{1}{2}$ вершине v через грань по R4a.

Подслучай 7.2. $d(v_2) = 7$. Здесь $d(v_1) \ge 8$ и $d(v_2) \ge 8$ благодаря отсутствию $(4, 7, 7)$, откуда v получает не менее $2 \times \frac{1}{4}$ от v_1, v_2 через грани v_1v_2v, v_3v_2v по R4b и $\frac{1}{2}$ от v_2 по R2a.

Подслучай 7.3. $d(v_i) \ge 8$, $1 \le i \le 4$. Теперь каждая v_i дает не менее $\frac{1}{4}$ нашей v через каждую из двух инцидентных ей граней по R4.

Таким образом, доказано, что $\mu'(v) \ge 0$ для каждой $v \in V$, что противоречит (1) и завершает доказательство теоремы 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Steinitz E.* Polyheder und Raumeinteilungen // Enzykl. math. Wiss. (Geometrie). 1922. V. 3AB, N 12. P. 1–139.
2. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
3. *Borodin O. V.* Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.
4. *Kotzig A.* From the theory of Eulerian polyhedra (Russian) // Mat. Čas. 1963. V. 13. P. 20–34.
5. *Бородин О. В.* Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. V. 46, N 5. P. 9–12.
6. *Grünbaum B.* Polytopal graphs // Studies in Graph Theory. Washington, D.C.: Math. Assoc. Amer., 1975. V. 12. P. 201–224. (MAA Stud. Math.).
7. *Plummer M. D.* On the cyclic connectivity of planar graphs // Graph Theory and Applications. Berlin: Springer-Verl., 1972. P. 235–242.
8. *Kotzig A.* Extremal polyhedral graphs // Ann. New York Acad. Sci. 1979. V. 319. P. 569–570.
9. *Бородин О. В.* Минимальный вес грани в плоских триангуляциях без 4-вершин // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 16–19.
10. *Borodin O. V.* Triangulated 3-polytopes with restricted minimal weight of faces // Discrete Math. 1998. V. 186. P. 281–285.
11. *Jendrol' S.* Triangles with restricted degrees of their boundary vertices in plane triangulations // Discrete Math. 1999. V. 196. P. 177–196.
12. *Бородин О. В.* Усиление теоремы Лебега о строении младших граней в выпуклых многогранниках // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2002. Т. 9, № 3. С. 29–39.
13. *Jendrol' S., Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane and in the projective plane: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313. P. 406–421.
14. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2841–2847.

Статья поступила 30 апреля 2013 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`brdnoleg@math.nsc.ru`

Иванова Анна Олеговна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
`shmgnanna@mail.ru`