Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 515.122.4+512.54

СИСТЕМЫ ИМПРИМИТИВНОСТИ И РЕШЕТКИ НОРМАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ D–ГИПЕРОКТАЭДРАЛЬНЫХ ГРУПП

Б. В. Олийнык, В. И. Сущанский

Аннотация. Исследуются D-гипероктаэдральные группы — диагональные индуктивные пределы гипероктаэдральных групп. Описаны Z_2-модули периодических последовательностей над диагональными пределами симметрических групп при их действии на элементах Z_2-модуля перестановками координат. Охарактеризованы системы импримитивности D-гипероктаэдральных групп, приведено полное описание их решеток нормальных подгрупп.

Ключевые слова: гипероктаэдральная группа, сплетение, однородная симметрическая группа, G-модуль, нормальный делитель, системы импримитивности.

1. Введение

Гипероктаэдральная группа H_n размерности $n \geq 2$ может быть определена как группа симметрий n-мерного куба или вписанного в него гипероктаэдра. Она также реализуется как группа изометрий метрического пространства Хемминга $(0,1)$-последовательностей длины n, группа Вейля системы Коксетера типа B_n (или C_n), группа ортогональных матриц порядка n над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, а в комбинаторике часто используется как группа знаковых подстановок, т. е. подстановок π множества $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$, которые переставляют знаки $\pm$ и числа $1, 2, \dots, n$ так, что $\pi(i) = -\pi(-i)$. С абстрактно-групповой точки зрения H_n является сплетением $Z_2 \wr S_n$ циклической группы Z_2 порядка 2 и симметрической группы S_n степени n, т. е. раскладывается в полупрямое произведение своих подгрупп S_n и $K_n = Z_2 \times \dots \times Z_2$ (n раз), где S_n действует на K_n перестановками координат векторов. Действие $Z_2 \wr S_n$ на различных структурах определяется по-разному, а возникающие при этом группы подстановок могут иметь различные свойства. Исследованию строения групп H_n ($n = 2, 3, \dots$) и развитию теории представлений таких групп посвящен целый ряд работ различных авторов, в том числе обзоры [1, 2], разделы в монографии [3], [4] и учебник [5].

Бесконечномерные аналоги гипероктаэдральных групп изучались значительно меньше, хотя такие группы естественным образом возникают при исследовании различных структур, в частности, определяемых на пространствах бесконечных $(0,1)$-последовательностей. Следует отметить работы А. М. Вершика [6–8], в которых исследовалась иерархия разбиений пространств с мерой и действующих на них групп преобразований. Из других публикаций отметим

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Государственного агентства по вопросам науки, инноваций и информатизации Украины (проект 0112U005849).

работу Камерона, Тарзи [9], в которой изучаются группы изометрий индуктивного предела пространств Хемминга (с вложениями, определяемыми повторением координат) и его пополнения, статью первого соавтора [10], в которой охарактеризована группа изометрий пространства Хемминга бесконечных почти нулевых $(0,1)$-последовательностей, а также работу [11], где исследуется группа автоморфизмов компоненты связности бесконечномерного куба — простого графа, вершинами которого являются бесконечные $(0,1)$-последовательности, а ребра соединяют вершины, отличающиеся только одной координатой. Кроме того, в рамках общей схемы А. М. Вершика в нашей работе [12] приведено явное описание групп изометрий пространств Хемминга бесконечных периодических $(0,1)$-последовательностей, определяемых супернатуральными числами: периоды последовательностей в каждом из таких пространств являются делителями некоторого супернатурального числа. Оказалось, что полная группа изометрий такого пространства содержит всюду плотную подгруппу, являющуюся индуктивным пределом конечномерных гипероктаэдральных групп. В связи с этим возникает задача дальнейшего исследования вышеупомянутых групп преобразований.

В данной работе делаются первые шаги в указанном направлении. А именно, мы описываем системы импримитивности построенных бесконечномерных аналогов гипероктаэдральных групп и даем полное описание решетки их нормальных делителей. Наша характеризация опирается на результаты статьи второго соавтора с Н. Крошко [13], в которой исследовалось строение индуктивных пределов симметрических групп со связывающими гомоморфизмами такого же типа, как и в данной работе.

Основной текст статьи разбит на 5 разделов. В разд. 2 приводятся необходимые сведения о делимых последовательностях, супернатуральных числах и диагональных пределах конечных симметрических и знакопеременных групп. Они естественным образом могут рассматриваться как подгруппы симметрической группы натурального ряда и образуют полную подрешетку в решетке ее подгрупп по включению. В разд. 3 описывается конструкция D-гипероктаэдральных групп как диагональных индуктивных пределов конечных гипероктаэдральных групп и устанавливается, что эти группы однозначно параметризируются супернатуральными числами. В разд. 4 дана классификация всех подмодулей счетных Z_2-модулей над диагональными пределами симметрических групп при естественном действии такой группы на элементах Z_2-модуля перестановками координат. В разд. 5 для каждого супернатурального числа r описаны системы импримитивности D-гипероктаэдральной группы $H(r)$ при ее действии перестановками координат на множестве бесконечных r-периодических последовательностей над Z_2. Наконец, в разд. 6 для каждого супернатурального числа r охарактеризована решетка нормальных делителей D-гипероктаэдральной группы $H(r)$. Описание зависит от того, делится ли супернатуральное число r на 2^∞ или нет, а в последнем случае играет роль также условие $2 \mid r$ или $2 \nmid r$. Все обозначения в работе общепринятые. Определения неопределяемых понятий можно найти в [14, 15].

2. Делимые последовательности и однородно симметрические группы

2.1. Последовательность натуральных чисел $\alpha = \langle k_1, k_2, \dots \rangle$ называется *делимой*, если $k_i \mid k_{i+1}$ для любого $i \in \mathbb{N}$; если при этом все члены последовательности α различны, то будем говорить, что она *строго делимая*. Числа $s_1 = k_1$, $s_i = \frac{k_i}{k_{i-1}}$, $i \geq 2$, будем называть *факторами последовательности* α. Пусть $\mathscr{DS}$ — множество всех делимых последовательностей. Если $\alpha = \langle k_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ и $\beta = \langle l_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ — делимые последовательности, то последовательности

$$\alpha \vee \beta = \langle \text{НОК}(k_i, l_i) \mid i \in \mathbb{N} \rangle, \quad \alpha \wedge \beta = \langle \text{НОД}(k_i, l_i) \mid i \in \mathbb{N} \rangle$$

также делимые, причем $(\mathscr{DS}, \vee, \wedge)$ является решеткой.

Будем говорить, что последовательность $\alpha = \langle k_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ *делит последовательность* $\beta = \langle l_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$, и писать $\alpha \mid \beta$, если для любого $i \in \mathbb{N}$ существует такое $j \in \mathbb{N}$, что $k_i \mid l_j$. Последовательности α и β будем называть *равноделимыми*, если $\alpha \mid \beta$ и $\beta \mid \alpha$. Отношение равноделимости является эквивалентностью на множестве $\mathscr{DS}$, а классы равноделимых последовательностей могут быть охарактеризованы следующим образом.

Формальное произведение вида $\prod\limits_{p \in \mathbb{P}} p^{t_p}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $t_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, называется *супернатуральным числом* или *числом Стейница*. В множестве $\mathbb{SN}$ всех супернатуральных чисел вводится операция умножения, превращающая его в коммутативную полугруппу. А именно, *произведением супернатуральных чисел* $n_1 = \prod\limits_{p \in \mathbb{P}} p^{t_p}$ и $n_2 = \prod\limits_{p \in \mathbb{P}} p^{t'_p}$ называется число

$$n_1 \cdot n_2 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{t_p + t'_p}, \tag{1}$$

где $t + \infty = \infty + t = \infty$ для всех $t \in \mathbb{N}$. Операция (1) дает возможность ввести на множестве $\mathbb{SN}$ отношение делимости: для любых $n_1, n_2 \in \mathbb{SN}$ полагаем $n_1 \mid n_2$, если существует такое супернатуральное m, что $n_1 m = n_2$.

Отношение делимости $\mid$ на $\mathbb{SN}$ является частичным порядком, причем частично упорядоченное множество $(\mathbb{SN}, \mid)$ — полная решетка с наибольшим и наименьшим элементами $I = \prod\limits_{p \in \mathbb{P}} p^{\infty}$ и 1 соответственно. При этом решеточные операции в $\mathbb{SN}$ определяются равенствами

$$n_1 \vee n_2 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(t_p, t'_p)}, \quad n_1 \wedge n_2 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(t_p, t'_p)}, \tag{2}$$

где $\max(t, \infty) = \infty$, $\min(t, \infty) = t$. Элементы разности $\mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$ будем называть *бесконечными супернатуральными числами*; множество бесконечных супернатуральных чисел относительно операций (2) образует верхнюю полурешетку.

Каждая делимая последовательность $\alpha = \langle k_1, k_2, \dots \rangle$ с последовательностью факторов $\langle s_2, s_3, \dots \rangle$ однозначно определяет супернатуральное число $s_2 \cdot s_3 \cdot \ldots$, которое будем называть *характеристикой* этой последовательности и обозначать через $\operatorname{char} \alpha$. В частности, $\operatorname{char} \alpha$ является натуральным числом в том и только том случае, когда последовательность α почти постоянна, т. е. существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $j > l$ справедливо равенство $k_j = k_l$.

Лемма 1. *Для произвольных последовательностей α и β из $\mathscr{DS}$ соотношение $\alpha \mid \beta$ справедливо тогда и только тогда, когда $\operatorname{char} \alpha \mid \operatorname{char} \beta$. В частности, последовательности α и β являются равноделимыми в том и только том случае, когда $\operatorname{char} \alpha = \operatorname{char} \beta$.*

Доказательство следует непосредственно из определения характеристики делимой последовательности.

Заметим также, что отображение $f : \mathscr{DS} \to \mathbb{SN}$, $f(\alpha) = \operatorname{char}\alpha$ является эпиморфизмом решетки делимых последовательностей на решетку супернатуральных чисел, поскольку оно сюръективно и имеют место равенства

$$\operatorname{char}(\alpha \vee \beta) = \operatorname{char}\alpha \vee \operatorname{char}\beta, \quad \operatorname{char}(\alpha \wedge \beta) = \operatorname{char}\alpha \wedge \operatorname{char}\beta.$$

2.2. Вложение θ группы подстановок (G, X) в группу подстановок (H, Y) называется *строго диагональным*, если ограничение действия образа $\theta(G)$ на каждую свою орбиту на множестве Y определяет группу подстановок, изоморфную (G, X). Если θ — строго диагональное вложение конечной группы подстановок (G, X) в конечную группу подстановок (H, Y), то число $|X|$ — делитель числа $|Y|$, причем группа H содержит некоторую подпрямую степень группы G. Примером строго диагонального вложения является вложение симметрических групп, определяемое так называемым однородным распространением подстановок. А именно, пусть S_n — симметрическая группа степени n, действующая на множестве $\underline{n} = \{1, \dots, n\}$, $S(\mathbb{N})$ — симметрическая группа натурального ряда, r — фиксированное натуральное число.

Определение 1. 1. *Однородным r-распространением подстановки* $\pi \in S_n$ называется подстановка $\theta^r\pi$ из симметрической группы S_{nr}, определяемая следующим образом:

$$\theta^r\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n & \dots & (r-1)n+1 & \dots & rn \\ 1^\pi & \dots & n^\pi & \dots & (r-1)n+1^\pi & \dots & (r-1)n+n^\pi \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где k^π — образ числа $k \in \underline{n}$ под действием подстановки π.

2. *Однородным распространением подстановки π на множество* $\mathbb{N}$ называется подстановка $\theta\pi \in S(\mathbb{N})$, определяемая равенством

$$\theta\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n & n+1 & \dots & 2n & \dots \\ 1^\pi & \dots & n^\pi & n+1^\pi & \dots & n+n^\pi & \dots \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Подстановки вида (4) будем называть *периодически определенными*, а число n — *периодом такой подстановки.* Среди всех периодов данной подстановки выделяется минимальный, который является делителем всех других ее периодов.

Отображения $\theta^r : \pi \to \theta^r\pi$ и $\theta : \pi \to \theta\pi$ суть мономорфные вложения S_n в S_{nr} и $S(\mathbb{N})$ соответственно.

Пусть, как и прежде, $\alpha = \langle k_1, k_2, \dots \rangle$ — некоторая делимая последовательность, $\langle s_1, s_2, \dots \rangle$ — ее последовательность факторов. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$ определено вложение $\theta^{s_{i+1}} : S_{k_i} \to S_{k_{i+1}}$.

Определение 2. Прямой спектр $\langle S_{k_i}, \theta^{s_{i+1}} \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ будем называть *α-спектром симметрических групп $S_{k_1}, S_{k_2}, \dots$*, а предельную группу этого спектра — *α-однородной симметрической группой.*

Будем обозначать α-однородную симметрическую группу символом $S(\alpha)$. Группа $S(\alpha)$ канонически изоморфна объединению подгрупп возрастающей цепи $\theta(S_{k_1}) \subset \theta(S_{k_2}) \subset \dots$:

$$S(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \theta(S_{k_i}), \tag{5}$$

а следовательно, действует подстановками на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Как подгруппа $S(\mathbb{N})$ она состоит из всех периодически определенных подстановок, минимальный период которых является делителем супернатурального числа α. Заметим, что аналогичные построения могут быть проведены для знакопеременных групп A_n, $n \in \mathbb{N}$. В результате для любого $\alpha \in \mathbb{SN}$ определяется α-однородная знакопеременная группа $A(\alpha)$, причем

$$A(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \theta(A_{k_i}) \quad \text{и} \quad A(\alpha) \le S(\alpha). \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть α_1 и α_2 — произвольные делимые последовательности. Группы $S(\alpha_1)$ и $S(\alpha_2)$ ($A(\alpha_1)$ и $A(\alpha_2)$), рассматриваемые как подгруппы $S(\mathbb{N})$, согласно соотношениям* (5), (6) *совпадают тогда и только тогда, когда* $\operatorname{char}\alpha_1 = \operatorname{char}\alpha_2$.

Доказательство. Включение $\theta(S_k) \subseteq \theta(S_l)$ имеет место тогда и только тогда, когда $k \mid l$. Поэтому равенство $\theta(S_k) = \theta(S_l)$ выполняется в том и только том случае, когда последовательности α_1 и α_2 равноделимы, что согласно лемме 1 имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{char}\alpha_1 = \operatorname{char}\alpha_2$. Для $A(\alpha_1)$ и $A(\alpha_2)$ рассуждения аналогичны. □

Следовательно, однородно симметрические (знакопеременные) группы естественным образом параметризуются супернатуральными числами. Параметр такой группы будет натуральным числом лишь тогда, когда она конечна. Далее, наряду с употребляемыми выше обозначениями $S(\alpha)$ и $A(\alpha)$ будем обозначать однородные симметрические и знакопеременные группы символами $S(n)$ и $A(n)$ соответственно, где $n \in \mathbb{SN}$.

Нам понадобятся следующие два утверждения из работы [13], которые сформулируем в виде лемм.

Лемма 3 [13]. *Если n_1 и n_2 — различные супернатуральные числа, то группы $S(n_1)$ и $S(n_2)$ ($A(n_1)$ и $A(n_2)$) не изоморфны.*

Супернатуральное число $n \in \mathbb{SN}$ назовем *сильно четным*, если $2^\infty \mid n$.

Лемма 4 [13]. 1. *Если число $n \in \mathbb{SN}$ сильно четное, то $S(n) = A(n)$, в противном случае $[S(n) : A(n)] = 2$.*

2. *При любом $n \in \mathbb{SN}$, $n \notin \{1, 2, 3, 4\}$, группа $A(n)$ простая.*

Напомним, что группа подстановок (G, X), действующая на бесконечном множестве X, называется *высоко транзитивной*, если она k-транзитивная при любом $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 5. *Пусть n — бесконечное супернатуральное число. Каждая из групп $S(n)$ и $A(n)$ при действии на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ высоко транзитивная.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \langle k_1, k_2, \dots \rangle$ — делимая последовательность такая, что $\operatorname{char}\alpha = n$. Тогда $S(n) = S(\alpha)$ и $A(n) = A(\alpha)$. Так как n — бесконечное супернатуральное число, последовательность α неограниченная.

Выберем произвольное число $m \in \mathbb{N}$ и убедимся, что $S(\alpha)$ и $A(\alpha)$ действуют на $\mathbb{N}$ m-транзитивно. Пусть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$ — векторы, координаты каждого из которых попарно различны. Положим $l = \max\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, m\}$. Тогда $\bar{x}, \bar{y} \in \{1, \dots, l\}^m$, кроме того, A_{l+2} и S_l действуют m-транзитивно на множестве $\{1, \dots, l\}$. Поэтому существуют подстановки $\pi \in A_{l+2}$ и $\sigma \in S_l$ такие, что $\bar{x}^\pi = \bar{y}$ и $\bar{x}^\sigma = \bar{y}$. Поскольку α неограниченная, существует такое k_j, что $k_j \ge l + 2$, и можно считать, что $\pi \in A_{k_j}$ и $\sigma \in S_{k_j}$.

Тогда однородные распространения $\theta\pi \in A(\alpha)$ и $\theta\sigma \in S(\alpha)$ подстановок π и σ действуют на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ и справедливы равенства

$$\bar{x}^{\theta\pi} = \bar{y}, \quad \bar{x}^{\theta\sigma} = \bar{y}.$$

Следовательно, группы $A(n)$ и $S(n)$ высоко транзитивны. $\square$

Так как 2-транзитивная группа подстановок примитивна, $(A(n), \mathbb{N})$ и $(S(n), \mathbb{N})$ действуют на $\mathbb{N}$ примитивно при любом бесконечном супернатуральном n.

Поскольку для любых $n_1, n_2 \in \mathbb{SN}$ соотношение $S(n_1) \subseteq S(n_2)$ $(A(n_1) \subseteq A(n_2))$ имеет место в том и только том случае, когда $n_1 \mid n_2$, справедливо следующее утверждение.

Лемма 6. *Семейство подгрупп $S(n)$ $(A(n))$, $n \in \mathbb{SN}$, группы $S(\mathbb{N})$ является частично упорядоченным по включению множеством, которое образует решетку, изоморфную решетке супернатуральных чисел относительно делимости.*

Таким образом, решетка однородно симметрических (знакопеременных) групп является полной дистрибутивной решеткой с наибольшим и наименьшим элементами $S(I)$ и S_1.

3. Построение D-гипероктаэдральных групп

Будем записывать элементы сплетения $W_n = Z_2 \wr S_n$ в виде пар $[\sigma, f]$, где $\sigma \in S_n$, $f \in Z_2^{\underline{n}}$, $\underline{n} = \{1, \dots, n\}$. Если $f(i) = a_i$, $1 \le i \le n$, то паре $[\sigma, f]$ взаимно однозначно соответствует набор $[\sigma; a_1, \dots, a_n]$. Групповая операция в $Z_2 \wr S_n$ для таких наборов определяется равенством

$$[\sigma; a_1, \dots, a_n][\eta; b_1, \dots, b_n] = [\sigma\eta; a_1 + b_{1^\sigma}, \dots, a_n + b_{n^\sigma}],$$

где $+$ — сложение в Z_2, а обратным к $[\sigma; a_1, \dots, a_n]$ будет набор $[\sigma^{-1}; a_{1^{\sigma^{-1}}}, \dots, a_{n^{\sigma^{-1}}}]$. Преобразование $u = [\sigma; a_1, \dots, a_n]$ действует на вектор $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n) \in Z_2^n$ согласно равенству

$$t^u = (t_{1^\sigma} + a_1, \dots, t_{n^\sigma} + a_n). \tag{7}$$

Группа преобразований $\left(W_n, Z_2^n\right)$, определяемая действием (7), совпадает с группой симметрий n-мерного куба при действии на множестве вершин, т. е. является транзитивной импримитивной группой подстановок (см., например, [5, с. 124–128]).

Последующие построения представляют интерес только при использовании строго возрастающих делимых последовательностей и бесконечных супернатуральных чисел, поэтому далее будем считать все супернатуральные числа бесконечными, а последовательности из $\mathscr{DS}$ — строго делимыми, специально не оговаривая этого каждый раз.

Пусть $\alpha = \langle k_1, k_2, \dots \rangle$ — некоторая строго делимая последовательность, а $\langle s_2, s_3, \dots \rangle$ — ее последовательность факторов. Для любого $i \in \mathbb{N}$ определим вложение группы подстановок $\left(W_{k_i}, Z_2^{k_i}\right)$ в группу подстановок $\left(W_{k_{i+1}}, Z_2^{k_{i+1}}\right)$ как пару отображений

$$h_i : W_{k_i} \to W_{k_{i+1}}, \quad \delta_i : Z_2^{k_i} \to Z_2^{k_{i+1}},$$

задаваемых для произвольных $\sigma \in S_{k_i}$, $(a_1, \dots, a_{k_i}), (t_1, \dots, t_{k_i}) \in Z_2^{k_i}$ следующим образом:

$$h_i([\sigma; a_1, \dots, a_{k_i}]) = [\theta^{s_{i+1}}\sigma; \underbrace{(a_1, \dots, a_{k_i}, a_1, \dots, a_{k_i}, \dots, a_1, \dots, a_{k_i})}_{k_i \cdot s_{i+1}}], \tag{i}$$

$$\delta_i(t_1,\ldots,t_{k_i}) = (\underbrace{t_1,\ldots,t_{k_i},t_1,\ldots,t_{k_i},\ldots,t_1,\ldots,t_{k_i}}_{k_i\cdot s_{i+1}}), \qquad \text{(ii)}$$

где $\theta^{s_{i+1}}\sigma$ определено равенством (3). Непосредственно из определений (i) и (ii) следует

Лемма 7. *Пара отображений $F_i = (h_i, \delta_i)$ является вложением группы подстановок $\left(W_{k_i}, Z_2^{k_i}\right)$ в группу подстановок $\left(W_{k_{i+1}}, Z_2^{k_{i+1}}\right)$.*

Таким образом, по делимой последовательности α определяется прямой спектр групп подстановок

$$\left\langle \left(W_{k_i}, Z_2^{k_i}\right), F_i \right\rangle_{i\in\mathbb{N}}. \qquad (8)$$

Определение 3. Предельную группу прямого спектра (8) будем называть *D-гипероктаэдральной группой*, определяемой последовательностью α.

Как абстрактная группа она является предельной группой

$$W(\alpha) = \varinjlim (W_{k_i}, h_i),$$

действующей на множестве $\mathscr{B}(\alpha) = \varinjlim \left(Z_2^{k_i}, \delta_i\right)$. Множество $\mathscr{B}(\alpha)$ может быть охарактеризовано как множество всех периодических $(0,1)$-последовательностей, минимальные периоды которых являются делителями супернатурального числа $\operatorname{char}\alpha$. Группа $W(\alpha)$, в свою очередь, допускает естественную характеризацию в терминах сплетений. А именно, элементы сплетения $Z_2 \wr S(\alpha)$ можно рассматривать как последовательности $[\sigma; a_1, a_2, \ldots]$, $\sigma \in S(\alpha)$, $a_i \in Z_2$, $i \in \mathbb{N}$. Множество всех таких последовательностей, для которых $(a_1, a_2, \ldots)$ периодическая, причем ее минимальный период является делителем числа $\operatorname{char}\alpha$, образует подгруппу в $Z_2 \wr S(\alpha)$, которую будем называть *α-сплетением* этих групп и обозначать через $Z_2 \wr_\alpha S(\alpha)$.

Лемма 8. *Для любой делимой последовательности α группа $W(\alpha)$ изоморфна α-сплетению $Z_2 \wr_\alpha S(\alpha)$.*

Для доказательства достаточно воспользоваться определением группы $S(\alpha)$, $\alpha \in \mathscr{DS}$, леммой 6 и тем, что отображение h_i действует на элементы $[\varepsilon; a_1, a_2, \ldots]$ таким же образом, как δ_i на соответствующие элементы из $Z_2^{n_i}$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{DS}$ — произвольные делимые последовательности. Группы $W(\alpha_1)$ и $W(\alpha_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\operatorname{char}\alpha_1 = \operatorname{char}\alpha_2$.*

Доказательство. Если $\operatorname{char}\alpha_1 = \operatorname{char}\alpha_2$, то $S(\alpha_1) \simeq S(\alpha_2)$, а следовательно, $W(\alpha_1)$ и $W(\alpha_2)$ можно рассматривать как подгруппы в $Z_2 \wr S(\alpha_1)$, которые по лемме 8 изоморфны α-сплетению $Z_2 \wr_{\alpha_1} S(\alpha_1)$.

С другой стороны, предположим, что $W(\alpha_1) \simeq W(\alpha_2)$, и пусть $q : W(\alpha_1) \to W(\alpha_2)$ — некоторый изоморфизм. Подгруппа $L(\alpha)$ преобразований вида $[\varepsilon; a_1, a_2, \ldots]$, $a_i \in Z_2$, $i \in \mathbb{N}$ (база α-сплетения $Z_2 \wr_\alpha S(\alpha)$) нормальна в $W(\alpha)$ для любой делимой последовательности $\alpha \in \mathscr{DS}$. В силу леммы 4 любая нормальная подгруппа, не содержащаяся в $L(\alpha)$, неабелева, т. е. $L(\alpha)$ — единственная максимальная абелева нормальная подгруппа в $W(\alpha)$. Поэтому $q(L(\alpha_1)) = L(\alpha_2)$, т. е. q индуцирует изоморфизм фактор-групп $W(\alpha_1)/L(\alpha_1)$ и $W(\alpha_2)/L(\alpha_2)$. Поскольку первая из них изоморфна $S(\alpha_1)$, а вторая — $S(\alpha_2)$, в силу леммы 3 отсюда получаем $\operatorname{char}\alpha_1 = \operatorname{char}\alpha_2$, что и требовалось. $\square$

С учетом теоремы 1 далее наряду с обозначениями $W(\alpha)$ и $\mathscr{B}(\alpha)$ будут употребляться также обозначения $W(r)$ и $B(r)$, где $r = \operatorname{char}\alpha$.

4. Подмодули свободного $S(r)$-модуля над Z_2

Пусть r — фиксированное бесконечное супернатуральное число. Декартова степень $Z_2^{\mathbb{N}}$ является векторным пространством континуальной размерности над полем Z_2. Однородная симметрическая группа $S(r)$ действует на $Z_2^{\mathbb{N}}$ перестановками координат, согласно равенству

$$(a_1, a_2, \dots)^\pi = (a_{1^\pi}, a_{2^\pi}, \dots), \quad (a_1, a_2, \dots) \in Z_2^{\mathbb{N}}, \quad \pi \in S(r),$$

превращая его в $S(r)$-модуль. Последовательность $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots) \in Z_2^{\mathbb{N}}$ назовем *r-периодической*, если она периодическая, причем ее минимальный период делит r. Все r-периодические последовательности образуют подпространство в $Z_2^{\mathbb{N}}$, которое будем обозначать тем же символом $\mathscr{B}(r)$, что и само множество r-периодических Z_2-последовательностей. Если $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots)$ — периодическая последовательность минимального периода k и $k \mid r$, а $\pi \in S(r)$ — периодически определенная подстановка периода l, $l \mid k$, то последовательность $\bar{a}^\pi$ является периодической периода НОК(k, l). Поскольку из $k \mid r$ и $l \mid r$ следует НОК$(k, l) \mid r$, то $\bar{a}^\pi \in \mathscr{B}(r)$, а значит, подпространство $\mathscr{B}(r)$ является подмодулем пространства $Z_2^{\mathbb{N}}$, т. е. $S(r)$-модулем. Опишем подмодули счетного модуля $\mathscr{B}(r)$.

Периодическую последовательность $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots) \in Z_2^{\mathbb{N}}$ назовем *r-четной*, если для некоторого периода k этой последовательности $k \mid r$ при разбиении $\bar{b}$ на блоки длины k каждый блок содержит четное число единиц. В силу периодичности для этого достаточно, чтобы было справедливо равенство

$$b_1 + b_2 + \dots + b_k = 0 \tag{9}$$

(здесь и далее в тексте символом $+$ обозначается сложение в Z_2). Наименьшее число k, при котором соотношение (9) выполняется, будем называть *периодом четности* последовательности b. r-Периодические последовательности, не являющиеся r-четными, будем называть *r-нечетными*. Несложно проверить, что все r-четные последовательности образуют $S(r)$-подмодуль модуля $\mathscr{B}(r)$, который обозначим символом $\mathscr{B}_0(r)$. Очевидным примером $S(r)$-подмодуля в $\mathscr{B}(r)$ является также подмодуль $\mathscr{C}$, содержащий только постоянные последовательности $\bar{0} = (0, 0, \dots)$ и $\bar{1} = (1, 1, \dots)$.

r-Четную последовательность $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots) \in Z_2^{\mathbb{N}}$ будем называть *элементарной r-четной последовательностью*, если $\bar{b} \neq \bar{1} = (1, 1, \dots)$ и при разбиении ее на блоки минимального периода четности каждый блок содержит в точности по две единицы.

Лемма 9. *Подмодуль $\mathscr{B}_0(r)$ является циклическим подмодулем $S(r)$-модуля $\mathscr{B}(r)$ и порождается произвольной r-четной последовательностью.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что подмодуль $\mathscr{B}_0(r)$ порождается произвольной элементарной r-четной последовательностью. Пусть $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots) \in \mathscr{B}_0(r)$ — некоторая элементарная r-четная последовательность с периодом четности m. Покажем, что, применяя к $\bar{c}$ некоторый набор операций перестановки координат и покомпонентного сложения, можно получить произвольную r-четную последовательность $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots) \in \mathscr{B}_0(r)$ с периодом четности l. Возможны следующие случаи.

(i) Последовательности $\bar{b}$ и $\bar{c}$ имеют одинаковый период четности, т. е. $l = m$. Тогда они разбиваются на блоки четности длины m. Поскольку каждый блок длины m последовательности $\bar{b}$ содержит четное число единиц, его

можно представить в виде суммы блоков с двумя единицами. Так как $m \mid r$, существуют перестановки $\pi_1, \dots, \pi_t \in S(r)$ периода m такие, что справедливо равенство
$$\bar{c}^{\pi_1} + \dots + \bar{c}^{\pi_t} = \bar{b},$$
и все доказано.

(ii) Пусть $l < m$ и существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $l \cdot k = m$. Выберем перестановки $\pi_1, \dots, \pi_k \in S(r)$ периода m так, чтобы последовательность $\bar{c}^{\pi_1} + \dots + \bar{c}^{\pi_k}$ при разбиении на блоки длины m в каждом блоке содержала $2k$ единиц. Тогда существует перестановка $\sigma \in S(r)$ периода m такая, что выполняется равенство
$$(\bar{c}^{\pi_1} + \dots + \bar{c}^{\pi_k})^{\sigma} = (\underbrace{\underbrace{1,1,0,\dots,0}_{l},\dots,\underbrace{1,1,0,\dots,0}_{l}}_{m}\dots).$$

Последовательность $(\bar{c}^{\pi_1} + \dots + \bar{c}^{\pi_k})^{\sigma}$ — элементарная r-четная последовательность периода l, а значит, к этой последовательности и последовательности $\bar{b}$ можно применить п. (i), откуда получаем необходимое утверждение.

(iii) Пусть либо $l < m$ и $l \nmid m$, либо $l > m$. Обозначим $s = \text{НОК}(m, l)$. Тогда при разбивании на блоки длинны s последовательности $\bar{b}$ и $\bar{c}$ имеют четное количество единиц, причем блок $c_1, \dots, c_k$ имеет как нулевые, так и единичные элементы. Пусть $c_i = 0$, $c_j = 1$, $1 \le i, j \le k$. Выберем в симметрической группе над множеством $\{1, 2, \dots, s\}$ транспозицию $\pi = (i, j)$, и пусть $\theta\pi$ — ее однородное распространение на множество $\mathbb{N}$, определяемое равенством (4). Тогда последовательность
$$\bar{f}(\bar{c}) = \bar{c} + \bar{c}^{\theta\pi} \tag{10}$$
элементарная r-четная с периодом s. Следовательно, этот случай также сводится к случаю (i). Итак, применяя к последовательности $\bar{f}$ некоторую цепочку операций перестановки элементов и сложения можно получить последовательность $\bar{b}$, которую можно получить и с помощью последовательности $\bar{c}$. Таким образом, утверждение полностью доказано. $\square$

Теорема 2. *Пусть r — бесконечное супернатуральное число, $\mathscr{B}(r)$ является $S(r)$-модулем r-периодических последовательностей над $\mathbb{Z}_2$. Тогда*

(i) *если $2^\infty \nmid r$, то единственными нетривиальными собственными $S(r)$-подмодулями модуля $\mathscr{B}(r)$ являются $\mathscr{B}_0(r)$ и $\mathscr{C}$;*

(ii) *если $2^\infty \mid r$, то единственным нетривиальным собственным $S(r)$-подмодулем модуля $\mathscr{B}(r)$ является подмодуль $\mathscr{C}$.*

Доказательство. (i) Пусть $\mathscr{M}$ — нетривиальный подмодуль $\mathscr{B}(r)$, причем $\mathscr{M} \ne \mathscr{C}$. Убедимся, что $\mathscr{M} \ge \mathscr{B}_0(r)$. В самом деле, поскольку $\mathscr{M} \ne \mathscr{C}$, существует последовательность $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots) \in \mathscr{M}$, отличная от $\bar{0}$ и от $\bar{1}$. Пусть k — минимальный период последовательности $\bar{a}$, $k \mid r$. Блок $a_1 \dots a_k$ содержит как нулевые, так и единичные координаты. Тогда последовательность $\bar{f}(\bar{a})$, определяемая равенством (10), принадлежит $\mathscr{M}$, элементарна и r-четна. Согласно лемме 9 эта последовательность порождает $\mathscr{B}_0(r)$, т. е. $\mathscr{M} \ge \mathscr{B}_0(r)$.

(ii) Покажем, что равенство $\mathscr{B}_0(r) = \mathscr{B}(r)$ имеет место тогда и только тогда, когда $2^\infty \mid r$. Пусть $\bar{a} \in \mathscr{B}(r)$ — некоторая последовательность. Включение $\bar{a} \in \mathscr{B}_0(r)$ имеет место тогда и только тогда, когда при некотором k, $k \mid r$, блок $a_1 \dots a_k$ содержит четное количество единиц. Если $2^\infty \mid r$, то для любого делителя m супернатурального числа r число $2m$ также будет делителем r. Следовательно, если даже для последовательности $\bar{a} \in \mathscr{B}(r)$ с периодом m блок $a_1 \dots a_m$

содержит нечетное количество единиц, то число единиц в блоке $a_1 \dots a_{2m}$ четное, причем $2m$ также будет периодом последовательности $\bar{a}$. Таким образом, если $2^\infty \mid r$, то любая последовательность из $\mathscr{B}(r)$ r-четна, т. е. $\mathscr{B}_0(r) = \mathscr{B}(r)$.

Пусть теперь $2^\infty \nmid r$. Предположим, что n — наибольшее такое натуральное число, что $2^n \mid r$. Тогда, очевидно, последовательность

$$\bar{a} = (\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{2^n}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{2^n}, \dots)$$

r-нечетна, т. е. $\mathscr{B}_0(r) \neq \mathscr{B}(r)$.

(iii) Покажем, что в случае $2^\infty \nmid r$ между $\mathscr{B}_0(r)$ и $\mathscr{B}(r)$ нет промежуточных модулей. Пусть $\mathscr{H}$ такой подмодуль. Поскольку $\mathscr{H} > \mathscr{B}_0(r)$, он содержит r-нечетную последовательность. Предположим, что $\bar{a}$ такая периодическая r-нечетная последовательность с наименьшим периодом m. Убедимся, что $\bar{a}$ и $\mathscr{B}_0(r)$ порождают весь модуль $\mathscr{B}(r)$, т. е. покажем, что любая последовательность $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots) \in \mathscr{B}(r)$ может быть получена при помощи операций перестановки координат и сложения из некоторого вектора из $\mathscr{B}_0(r)$ и вектора $\bar{a}$. Если $\bar{b}$ r-четная, то $\bar{b} \in \mathscr{B}_0(r)$, и все доказано. Предположим, что $\bar{b}$ r-нечетная, и пусть l — период $\bar{b}$. Положим $s = \text{НОК}(m, l)$. Выберем в $\mathscr{B}_0(r)$ последовательность $\bar{c}$ периода s так, чтобы в блоке $a_1 + c_1, \dots, a_s + c_s$ была только одна единица. Очевидно, что последовательность $\bar{a} + \bar{c}$ также периодическая с периодом s, поэтому существуют такие перестановки $\pi_1, \dots, \pi_t \in S(r)$ периода s, что справедливо равенство $(\bar{a} + \bar{c})^{\pi_1} + \dots + (\bar{a} + \bar{c})^{\pi_t} = \bar{b}$. Следовательно, $\mathscr{H} = \mathscr{B}(r)$, и теорема доказана. $\square$

Непосредственно из доказательства теоремы 2 и леммы 9 получаем

Следствие 1. *Для любого бесконечного супернатурального числа r модуль $\mathscr{B}(r)$ 2-порожденный.*

5. Системы импримитивности D-гипероктаэдральной группы $W(r)$

Пусть (G, X) — некоторая группа подстановок. Напомним, что *системой импримитивности* (G, X) называется каждое отношение эквивалентности на X, которое инвариантно относительно действия G; классы эквивалентности при этом называются *блоками импримитивности*. Если (G, X) — транзитивная группа подстановок, то все блоки импримитивности имеют одинаковую мощность, а системы импримитивности по включению образуют решетку, которая изоморфна решетке надгрупп стабилизатора точки (G, X) (см., например, [15, с. 45, 46]). Исходя из этих соображений, опишем решетку систем импримитивности группы подстановок $(W(r), \mathscr{B}(r))$ для произвольного $r \in \mathbb{SN}$.

Лемма 10. *Для произвольного бесконечного супернатурального числа r стабилизатор точки группы $W(r)$, действующей естественным образом на $\mathscr{B}(r)$, совпадает с ее подгруппой $S(r)$.*

Доказательство. Действительно, поскольку действие $W(r)$ на $\mathscr{B}(r)$ транзитивно, достаточно рассмотреть стабилизатор последовательности $\bar{0}$. Понятно, что любая подстановка из $S(r)$ ее стабилизирует. С другой стороны, если $\nu = [\sigma; a_1, a_2, \dots] \notin S(r)$, то существует $a_i \neq 0$, а следовательно, $\bar{0}^\nu \neq \bar{0}$. $\square$

Пусть Σ_1 — разбиение множества $\mathscr{B}(r)$ на 2-элементные подмножества вида $\{\bar{b}, \bar{1} + \bar{b}\}$, где $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots)$ и $\bar{1} + \bar{b} = (1 + b_1, 1 + b_2, \dots)$, Σ_2 — разбиение $\mathscr{B}(r)$ на два множества: r-четных и r-нечетных последовательностей. Кроме того, пусть Σ_0 — разбиение $\mathscr{B}(r)$ на одноэлементные подмножества, а Σ состоит лишь из множества $\mathscr{B}(r)$. Разбиения Σ_0 и Σ — тривиальные системы импримитивности группы $W(r)$ на $\mathscr{B}(r)$.

Теорема 3. *Если $2^\infty \mid r$, то группа $W(r)$ имеет на множестве $\mathscr{B}(r)$ только одну нетривиальную систему импримитивности Σ_1. Если же $2^\infty \nmid r$, то $W(r)$ имеет на $\mathscr{B}(r)$ две нетривиальные системы импримитивности Σ_1 и Σ_2.*

Доказательство. Группа $W(r)$ действует на множестве $\mathscr{B}(r)$ транзитивно, поэтому достаточно охарактеризовать надгруппы стабилизатора некоторой точки из $\mathscr{B}(r)$ в $W(r)$. Если подгруппа $U < W(r)$ содержит $S(r)$, то ее пересечение $\widehat{U}$ с базовой подгруппой состоит из всевозможных элементов вида $[e; a_1, a_2, \ldots]$ таких, что при некотором $\sigma \in S(r)$ преобразование $[\sigma; a_1, a_2, \ldots]$ содержится в U. Поэтому $U = S(r) \cdot \widehat{U}$. Подгруппа $\widehat{U}$ нормальна в U, а следовательно, является $S(r)$-подмодулем $S(r)$-модуля $\mathscr{B}(r)$. Согласно теореме 2 это означает, что если $2^\infty \mid r$, то $\widehat{U}$ совпадает с $\mathscr{C}$, а если $2^\infty \nmid r$, то $\widehat{U}$ совпадает с $\mathscr{C}$ либо с $\mathscr{B}_0(r)$. Если $U = S(r) \cdot \mathscr{B}_0(r)$, то $[W(r) : U] = 2$ и соответствующая система импримитивности состоит из подмножеств r-четных и r-нечетных последовательностей, а если $U = S(r) \cdot \mathscr{C}$, то каждое подмножество соответствующей системы импримитивности 2-элементное и эта система совпадает с Σ_1. Поскольку при $2^\infty \mid r$ имеет место равенство $\mathscr{B}_0(r) = \mathscr{B}(r)$, теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Стабилизатор подмножества r-четных (или r-нечетных) последовательностей совпадает с подгруппой $S(r)\cdot\mathscr{B}_0(r)$. Эта подгруппа действует на каждом из подмножеств r-четных и r-нечетных последовательностей точно. Поскольку при $2 \mid r$ и $2^\infty \nmid r$ включение $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}_0(r)$ не имеет места, в этой ситуации группа подстановок $S(r) \cdot \mathscr{B}_0(r)$, действующая на множестве всех r-четных последовательностей, и та же группа, действующая на множестве всех r-нечетных последовательностей, являются подобными между собой унипримитивными группами преобразований.

6. Решетка нормальных делителей группы $W(r)$

Группа $W(r)$ — полупрямое произведение $\mathscr{B}(r)$ и $S(r)$, т. е. $W(r) = \mathscr{B}(r) \rtimes S(r)$. Пусть $W'(r)$ — коммутант группы $W(r)$.

Лемма 11. *Для произвольного бесконечного $r \in \mathbb{SN}$ имеет место равенство $W'(r) = A(r) \cdot \mathscr{B}_0(r)$.*

Доказательство. Для любого $n \geq 2$ гипероктаэдральная группа W_n является полупрямым произведением нормального делителя $Z_2^n = B_n$ и S_n. Пусть B_n^0 — подгруппа B_n, состоящая из наборов $(a_1, \ldots, a_n)$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$. Коммутант W_n' состоит из преобразований вида $[\sigma; a_1, \ldots, a_n]$, $\sigma \in A_n$, $(a_1, \ldots, a_n) \in B_n^0$, т. е. $W_n' = A_n \cdot B_n^0$ (см. [16, 17]). Поскольку группа $W(r)$ может быть представлена в виде

$$W(r) = \bigcup_{n|r} W_n,$$

имеет место равенство

$$W'(r) = \bigcup_{n|r} W_n' = \bigcup_{n|r} A_n \cdot B_n^0,$$

где все вложения строго диагональны. Следовательно,

$$W'(r) = \bigcup_{n|r} A_n \cdot \bigcup_{n|r} B_n^0 = A(r) \cdot \mathscr{B}_0(r). \quad \square$$

Лемма 12. *Нормальное замыкание L преобразования $u = [\sigma; a_1, a_2, \dots] \in W(r)$, $\sigma \neq e$, в $W(r)$ содержит подгруппу $A(r) \cdot \mathscr{B}_0(r)$.*

Доказательство. Выбирая преобразование $v = [e; b_1, b_2, \dots] \in W(r)$ так, чтобы коммутатор (u, v) был нетривиальным, получим $(u, v) = [e; c_1, c_2, \dots]$, где $(c_1, c_2, \dots) \in \mathscr{B}_0(r)$. Учитывая леммы 5 и 9, отсюда получаем, что нормальное замыкание L преобразования u содержит $\mathscr{B}_0(r)$. Выбирая преобразование $w = [\nu; 0, 0, \dots] \in W(r)$ так, чтобы $(u, w) \neq e$, получим $(u, w) = [\mu; d_1, d_2, \dots]$, где $\mu \in A(r)$, $(d_1, d_2, \dots) \in \mathscr{B}_0(r)$. Поскольку имеет место включение $\mathscr{B}_0(r) \subseteq L$, то $[\mu; 0, 0, \dots] \in L$, а значит, $A(r) \subseteq L$. Таким образом, $A(r) \cdot \mathscr{B}_0(r) \subseteq L$. $\square$

Введем следующие обозначения для подгрупп $W(r)$:

$$U = S(r) \cdot \mathscr{B}_0(r), \quad V = gp(W'(r), [(1,2); 1, 0, \dots]), \quad H = A(r) \cdot \mathscr{B}(r),$$

где $gp(X)$ — подгруппа, порожденная множеством X. Каждая из этих подгрупп является нормальным делителем в $W(r)$, так как содержит коммутант $W'(r)$.

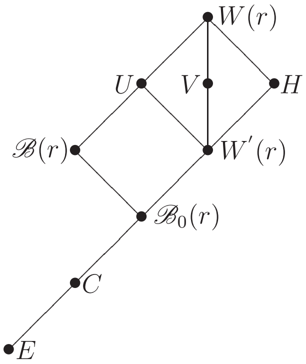

Рис. 1.

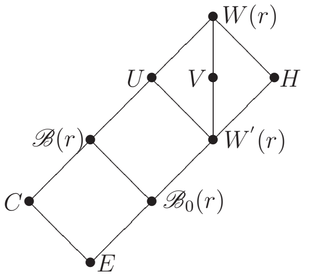

Рис. 2.

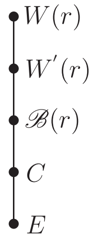

Рис. 3.

Теорема 4. *Пусть r — бесконечное супернатуральное число. Тогда*

(i) *если r не сильночетное, то решетка нормальных делителей группы $W(r)$ имеет вид рис. 1 при $2 \mid r$ и вид рис. 2 при $2 \nmid r$;*

(ii) *если r сильночетное, то эта решетка изображена на рис. 3.*

Доказательство. 1. Пусть $2^\infty \nmid r$. Абелизация $W(r) \mid W'(r)$ группы $W(r)$ является четверной группой Клейна $Z_2 \oplus Z_2$. Эта группа содержит три собственные подгруппы: $\overline{U} = \{(0,0), (1,0)\}$, $\overline{V} = \{(0,0), (1,1)\}$ и $\overline{H} = \{(0,0), (0,1)\}$. В группе $W(r)$ этим подгруппам соответствуют нормальные делители U, V и H соответственно. Тем самым охарактеризованы все нормальные делители $W(r)$, содержащие $W'(r)$. Если нетривиальный нормальный делитель не содержит $W'(r)$, то согласно лемме 12 он содержится в $\mathscr{B}(r)$. Но в этом случае такой нормальный делитель является подмодулем $S(r)$-модуля $\mathscr{B}(r)$ и согласно теореме 2 совпадает с $\mathscr{B}(r)$, $\mathscr{B}_0(r)$ или $\mathscr{C}$. Если $2 \mid r$, то $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}_0(r)$, а если $2 \nmid r$, то $\mathscr{C} \nsubseteq \mathscr{B}_0(r)$. Следовательно, решетка нормальных делителей имеет вид рис. 1 или вид рис. 2 соответственно.

2. Пусть $2^\infty \mid r$. Тогда $\mathscr{B}_0(r) = \mathscr{B}(r)$. Следовательно, $W'(r) = A(r) \cdot \mathscr{B}(r)$, абелизация $W(r) \mid W'(r)$ является циклической порядка 2, а коммутант $W'(r)$ —

максимальная подгруппа в $W(r)$. Если нетривиальный нормальный делитель содержится в базе $\mathscr{B}(r)$, то как подмодуль $S(r)$-модуля $\mathscr{B}(r)$ он совпадает, согласно теореме 2 с $\mathscr{B}(r)$ или $\mathscr{C}$. Поэтому решетка нормальных делителей $W(r)$ в этом случае имеет вид рис. 3. Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baake M.* Structure and representation of the hyperoctahedral group // J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 3171–3182.

2. *Калужнин Л. А., Сущанский В. И., Устименко-Бакумовский В. А.* Экспоненцирование в теории групп подстановок и ее приложениях // Мат. VI Всесоюз. конф. по теории групп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. С. 135–145.

3. *Kerber A.* Representations of permutation groups. Part I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 240).

4. *Kerber A.* Representations of permutation groups. Part II. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1975. (Lect. Notes Math.; V. 495).

5. *Klin M. Ch., Poeschel R., Rosenbaum K.* Angewandte Algebra für matematiker und informatiker. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wissenschaften, 1988.

6. *Вершик А. М.* Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, № 4. С. 1–68.

7. *Вершик А. М.* Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 4. С. 748–751.

8. *Вершик А. М.* Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения // Теория представлений, динамические системы. XI, Спец. вып. Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 312. С. 69–85.

9. *Cameron P. J., Tarzi S.* Limits of cubes // Topology Appl. 2008. V. 155. P. 1454–1461.

10. *Олийнык Б. В.* Универсальность счетных пространств Хемминга относительно изоморфных погружений (Укр.) // Весник Киевск. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 1996. Вып. 2. С. 53–62 (на укр. языке).

11. *Pankov M.* A note on automorphisms of the infinite-dimensional hypercube graph // Electron. J. Comb. 2012. V. 19. P. 23.

12. *Олийнык Б. В., Сущанский В. И.* Группы изометрий пространств Хемминга периодических последовательностей // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 163–179.

13. *Kroshko N. V., Sushchansky V. I.* Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embeddings // Arch. Math. 1998. V. 71, N 3. P. 173–182.

14. *Dixon J. D., Mortimer B.* Permutation groups. New York: Springer-Verl., 1996.

15. *Сущанский В. И., Сикора В. С.* Операции на группах подстановок. Теория и приложения. Черновцы: Рута, 2003 (на укр. языке).

16. *Holmes C. V.* Commutator groups of monomial groups // Pacific J. Math. 1960. V. 10, N 4. P. 1313–1318.

17. *Ore O.* Theory of monomial groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1942. V. 51. P. 15–64.

Статья поступила 19 апреля 2013 г.

Сущанский Виталий Иванович
Institute of Mathematics, Silesian University of Technology
ul. Kaszubska, 23, Gliwice 44-100, Poland
`vitaliy.sushchanskyy@polsl.pl`

Олийнык Богдана Витальевна
Национальный университет «Киево-Могилянская Академия»,
ул. Сковороды, 2, Киев 04655, Украина
`bogdana.oliynyk@gmail.com`