Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 517.956.35

ЗАДАЧА КОШИ — ДАРБУ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С. С. Харибегашвили, О. М. Джохадзе

Аннотация. Для одномерного волнового уравнения со степенной нелинейностью рассмотрена задача Коши — Дарбу, для которой исследованы вопросы существования и единственности глобального решения. Рассмотрены также вопросы существования локальных и отсутствия глобальных решений этой задачи.

Ключевые слова: волновое уравнение, степенная нелинейность, задача Коши — Дарбу, существование и отсутствие глобального решения, локальная разрешимость.

1. Постановка задачи

В плоскости независимых переменных x и t рассмотрим волновое уравнение со степенной нелинейностью вида

$$L_\lambda u := u_{tt} - u_{xx} + \lambda |u|^\alpha u = f(x,t), \tag{1.1}$$

где λ и α — заданные действительные постоянные, причем $\lambda, \alpha \neq 0$, $\alpha > -1$; f — заданная, а u — искомая действительные функции.

Обозначим через $D_T := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \tilde{k}t,\ 0 < t < T;\ 0 < \tilde{k} := \mathrm{const} < 1\}$ треугольную область, лежащую внутри характеристического угла $G_0 := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > |x|\}$ и ограниченную отрезками $\tilde{\gamma}_{1,T}$: $x = \tilde{k}t$, $0 \leq t \leq T$, $\tilde{\gamma}_{2,T}$: $x = 0$, $0 \leq t \leq T$ и $\tilde{\gamma}_{3,T}$: $t = T$, $0 \leq x \leq \tilde{k}T$. При $T = +\infty$ полагаем $D_\infty := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \tilde{k}t,\ 0 < t < +\infty\}$.

Для уравнения (1.1) рассмотрим задачу Коши — Дарбу об определении в области D_T решения $u(x,t)$ этого уравнения по краевым условиям

$$u|_{\tilde{\gamma}_{1,T}} = 0, \quad u_x|_{\tilde{\gamma}_{2,T}} = 0. \tag{1.2}$$

Отметим, что для линейных гиперболических уравнений второго порядка с одной пространственной переменной вопросам о корректной постановке задач типа Дарбу посвящены многочисленные работы (см., например, [1–5] и цитированную там литературу). Как оказалось, наличие слабой нелинейности в уравнении влияет на корректность постановки даже в случае первой задачи Дарбу (см., например, [6–12]). В настоящей работе показано, что при определенных условиях на показатель нелинейности α и параметр λ задача Коши — Дарбу (1.1), (1.2) в одних случаях глобально разрешима, а в других случаях

Работа выполнена при поддержке Национального научного фонда им. Шота Руставели (грант № 31/32).

не имеет глобального решения, хотя, как доказано ниже, эта задача локально разрешима.

Определение 1.1. Пусть $f \in C(\overline{D}_T)$. Функцию u будем называть *сильным обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2) класса C в области D_T, если $u \in C(\overline{D}_T)$ и существует такая последовательность функций $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \tilde{\gamma}_{1,T}, \tilde{\gamma}_{2,T})$, что $u_n \to u$ и $L_\lambda u_n \to f$ в пространстве $C(\overline{D}_T)$ при $n \to \infty$, где

$$\overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \tilde{\gamma}_{1,T}, \tilde{\gamma}_{2,T}) := \{v \in C^2(\overline{D}_T) : v|_{\tilde{\gamma}_{1,T}} = 0,\ v_x|_{\tilde{\gamma}_{2,T}} = 0\}.$$

Замечание 1.1. Очевидно, что классическое решение задачи (1.1), (1.2) из пространства $\overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$ является сильным обобщенным решением этой задачи класса C в области D_T. В свою очередь, если сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) класса C в области D_T принадлежит пространству $C^2(\overline{D}_T)$, то оно будет также и классическим решением этой задачи.

Определение 1.2. Пусть $f \in C(\overline{D}_\infty)$. Будем говорить, что задача (1.1), (1.2) *глобально разрешима в классе* C, если для любого конечного $T > 0$ эта задача имеет сильное обобщенное решение класса C в области D_T.

2. Априорная оценка решения задачи (1.1), (1.2)

Лемма 2.1. *Пусть $-1 < \alpha < 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, а в случае $\alpha > 0$ дополнительно потребуем, чтобы $\lambda > 0$. Тогда для сильного обобщенного решения задачи* (1.1), (1.2) *класса C в области D_T справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leq c_1 \|f\|_{C(\overline{D}_T)} + c_2 \tag{2.1}$$

с неотрицательными постоянными $c_i(T, \alpha, \lambda)$, $i = 1, 2$, не зависящими от u и f, причем $c_1 > 0$.

Доказательство. Пусть u — сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) класса C в области D_T. Тогда в силу определения 1.1 существует такая последовательность функций $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|L_\lambda u_n - f\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \tag{2.2}$$

а следовательно, и

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda |u_n|^\alpha u_n - \lambda |u|^\alpha u\|_{C(\overline{D}_T)} = 0. \tag{2.3}$$

Рассмотрим функцию $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$ как решение следующей задачи:

$$L_\lambda u_n = f_n, \tag{2.4}$$

$$u_n|_{\tilde{\gamma}_{1,T}} = 0, \quad u_{nx}|_{\tilde{\gamma}_{2,T}} = 0. \tag{2.5}$$

Здесь

$$f_n := L_\lambda u_n. \tag{2.6}$$

Умножая обе части равенства (2.4) на $2u_{nt}$ и интегрируя по области $D_\tau := \{(x,t) \in D_T : t < \tau\}$, $0 < \tau \leq T$, получим

$$\int\limits_{D_\tau} \left(u_{nt}^2\right)_t dxdt - 2\int\limits_{D_\tau} u_{nxx} u_{nt} + \frac{2\lambda}{\alpha+2} \int\limits_{D_\tau} (|u_n|^{\alpha+2})_t \, dxdt = 2\int\limits_{D_\tau} f_n u_{nt} \, dxdt.$$

Положим $\Omega_\tau := \overline{D}_\infty \cap \{t = \tau\}$, $0 < \tau \le T$. Тогда с учетом (2.5) интегрированием по частям левой части последнего равенства получаем

$$2\int\limits_{D_\tau} f_n u_{nt}\,dxdt = \int\limits_{\tilde\gamma_{1,\tau}} \nu_t^{-1}\big[(u_{nx}\nu_t - u_{nt}\nu_x)^2 + u_{nt}^2\big(\nu_t^2 - \nu_x^2\big)\big]\,ds$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\tau} \big(u_{nx}^2 + u_{nt}^2\big)\,dx + \frac{2\lambda}{\alpha+2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u_n|^{\alpha+2}\,dx, \quad (2.7)$$

$\nu := (\nu_x, \nu_t)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂D_τ, $\tilde\gamma_{1,\tau} := \tilde\gamma_{1,T} \cap \{t \le \tau\}$.

Принимая во внимание, что $\nu_t \frac{\partial}{\partial x} - \nu_x \frac{\partial}{\partial t}$ является внутренним дифференциальным оператором на $\tilde\gamma_{1,T}$, в силу первого условия из (2.5) имеем

$$(u_{nx}\nu_t - u_{nt}\nu_x)|_{\tilde\gamma_{1,T}} = 0. \quad (2.8)$$

Поскольку D_τ: $0 < x < \tilde k t$, $t < \tau$, как легко видеть,

$$\big(\nu_t^2 - \nu_x^2\big)\big|_{\tilde\gamma_{1,\tau}} < 0, \quad \nu_t|_{\tilde\gamma_{1,\tau}} < 0. \quad (2.9)$$

С учетом (2.8), (2.9) из (2.7) в случае $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$ получаем

$$w_n(\tau) := \int\limits_{\Omega_\tau} \big(u_{nx}^2 + u_{nt}^2\big)\,dx \le 2\int\limits_{D_\tau} f_n u_{nt}\,dxdt. \quad (2.10)$$

Из (2.10), приняв во внимание неравенство $2f_n u_{nt} \le \varepsilon u_{nt}^2 + \frac{1}{\varepsilon} f_n^2$, справедливое для любого $\varepsilon := \mathrm{const} > 0$, имеем

$$w_n(\tau) \le \varepsilon \int\limits_0^\tau w_n(s)\,ds + \frac{1}{\varepsilon}\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)}, \quad 0 < \tau \le T.$$

Отсюда с учетом того, что величина $\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)}$ как функция от τ является неубывающей, в силу леммы Гронуолла следует, что

$$w_n(\tau) \le \frac{1}{\varepsilon}\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)} \exp(\tau\varepsilon).$$

Окончательно, учитывая равенство $\inf\limits_{\varepsilon>0} \frac{\exp(\tau\varepsilon)}{\varepsilon} = e\tau$, которое достигается при $\varepsilon = \frac{1}{\tau}$, получим

$$w_n(\tau) \le e\tau\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)}, \quad 0 < \tau \le T. \quad (2.11)$$

Если $(x,t) \in \overline{D}_T$, то в силу первого условия из (2.5) имеет место равенство

$$u_n(x,t) = u_n(x,t) - u_n(\tilde k t, t) = \int\limits_{\tilde k t}^{x} u_{nx}(s,t)\,ds,$$

откуда согласно (2.11)

$$|u_n(x,t)|^2 \le \int\limits_x^{\tilde k t} ds \int\limits_x^{\tilde k t} u_{nx}^2(s,t)\,ds \le (\tilde k t - x)\int\limits_{\Omega_t} u_{nx}^2(s,t)\,ds \le \tilde k t w_n(t)$$

$$\le \tilde k e t^2 \|f_n\|^2_{L_2(D_t)} \le \tilde k e t^2 \|f_n\|^2_{C(\overline{D}_t)} \operatorname{mes}\, D_t = 2^{-1}\tilde k^2 e t^4 \|f_n\|^2_{C(\overline{D}_t)}. \quad (2.12)$$

Отсюда
$$\|u_n\|_{C(\overline{D}_T)} \le \widetilde{k} T^2 \sqrt{e/2} \|f_n\|_{C(\overline{D}_T)}.$$
Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, ввиду (2.2), (2.4), (2.6) получим
$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \le \tilde{k} T^2 \sqrt{e/2} \|f\|_{C(\overline{D}_T)}. \tag{2.13}$$
Из (2.13) следует оценка (2.1) в случае $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$.

Рассмотрим случай $-1 < \alpha < 0$ при произвольном $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

При $-1 < \alpha < 0$, т. е. в случае $1 < \alpha + 2 < 2$, применяя известное неравенство
$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \left(a = |u_n|^{\alpha+2},\ b = 1,\ p = \frac{2}{\alpha+2} > 1,\ q = -\frac{2}{\alpha} > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$
получим
$$2\int\limits_{\Omega_\tau} |u_n|^{\alpha+2}\, dx \le \int\limits_{\Omega_\tau} \left[(\alpha+2)u_n^2 - \alpha\right] dx = (\alpha+2)\int\limits_{\Omega_\tau} u_n^2\, dx + |\alpha|\tilde{k}\tau.$$
В силу (2.8) и (2.9) из (2.7) следует, что
$$w_n(\tau) \le |\lambda| \int\limits_{\Omega_\tau} u_n^2\, dx + 2\int\limits_{D_\tau} f_n u_{nt}\, dxdt + \frac{|\lambda\alpha|\tilde{k}\tau}{\alpha+2}. \tag{2.14}$$
Из первого условия в (2.5) имеем
$$u_n(x,\tau) = \int\limits_{x/\tilde{k}}^{\tau} u_{nt}(x,t) dt, \quad (x,\tau) \in \Omega_\tau.$$
Отсюда, применяя неравенство Коши — Буняковского, получим
$$u_n^2(x,\tau) \le \tau \int\limits_{x/\tilde{k}}^{\tau} u_{nt}^2(x,t)\, dt,$$
и тем самым
$$\int\limits_{\Omega_\tau} u_n^2\, dx \le \tau \int\limits_{\Omega_\tau} dx \int\limits_{x/\tilde{k}}^{\tau} \left(u_{nx}^2 + u_{nt}^2\right) dt = \tau \int\limits_{D_\tau} \left(u_{nx}^2 + u_{nt}^2\right) dxdt. \tag{2.15}$$
Поскольку $2f_n u_{nt} \le f_n^2 + u_{nt}^2$, в силу (2.15) из (2.14) имеем
$$w_n(\tau) \le |\lambda|\tau \int\limits_{D_\tau} \left(u_{nx}^2 + u_{nt}^2\right) dxdt + \int\limits_{D_\tau} u_{nt}^2\, dxdt + \int\limits_{D_\tau} f_n^2\, dxdt + \frac{|\lambda\alpha|\tilde{k}\tau}{2(\alpha+2)}.$$

С учетом вида функции w_n из (2.10) отсюда следует, что
$$w_n(\tau) \le (|\lambda|\tau + 1) \int\limits_0^{\tau} w_n(s)\, ds + \|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)} + \frac{|\lambda\alpha|\tilde{k}\tau}{2(\alpha+2)},$$

так что с учетом леммы Гронуолла

$$w_n(\tau) \le \left[\|f_n\|^2_{L_2(D_T)} + \frac{|\lambda\alpha|\tilde{k}T}{2(\alpha+2)}\right] \exp[|\lambda|T^2 + T].$$

Аналогично тому, как из (2.11) получено (2.12), из последнего неравенства имеем

$$|u_n(x,t)|^2 \le \tilde{k}tw_n(t) \le \tilde{k}T\left[\|f_n\|^2_{C(\overline{D}_T)} \operatorname{mes} D_T + \frac{|\lambda\alpha|\tilde{k}T}{2(\alpha+2)}\right] \exp[|\lambda|T^2 + T]$$
$$\le \frac{1}{2}\tilde{k}^2T^2\left[T\|f_n\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \frac{|\lambda\alpha|}{\alpha+2}\right] \exp[|\lambda|T^2 + T].$$

Стало быть,

$$\|u_n\|_{C(\overline{D}_T)} \le \tilde{k}T\left[\sqrt{\frac{T}{2}}\|f_n\|_{C(\overline{D}_T)} + \sqrt{\frac{|\lambda\alpha|}{2(\alpha+2)}}\right] \exp[2^{-1}(|\lambda|T^2 + T)]. \tag{2.16}$$

Переходя в неравенстве (2.16) к пределу при $n \to \infty$, в силу (2.2), (2.4), (2.6) получим

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \le \tilde{k}T\sqrt{\frac{T}{2}} \exp[2^{-1}(|\lambda|T^2+T)]\|f\|_{C(\overline{D}_T)} + \tilde{k}T\sqrt{\frac{|\lambda\alpha|}{2(\alpha+2)}} \exp[2^{-1}(|\lambda|T^2+T)]. \tag{2.17}$$

Этим оценка (2.1) доказана полностью.

Замечание 2.1. Из (2.13) и (2.17) следует, что в оценке (2.1) постоянные c_1 и c_2 определяются формулами

$$c_1 = \tilde{k}T^2\sqrt{\frac{e}{2}}, \quad c_2 = 0 \quad \text{при } \alpha > 0,\ \lambda > 0, \tag{2.18}$$

$$\begin{gathered} c_1 = \tilde{k}T\sqrt{\frac{T}{2}} \exp[2^{-1}(|\lambda|T^2 + T)], \\ c_2 = \tilde{k}T\sqrt{\frac{|\lambda\alpha|}{2(\alpha+2)}} \exp[2^{-1}(|\lambda|T^2 + T)] \quad \text{при } -1 < \alpha < 0,\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \end{gathered} \tag{2.19}$$

3. Эквивалентная редукция задачи (1.1), (1.2) к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра

В новых независимых переменных $\xi = \frac{1}{2}(t+x)$, $\eta = \frac{1}{2}(t-x)$ область D_T перейдет в треугольную область E_T с вершинами в точках $O(0,0)$, $Q_1\big(\frac{1}{1+k}T, \frac{k}{1+k}T\big)$, $Q_2\big(\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T\big)$ плоскости переменных ξ, η, а задача (1.1), (1.2) — в задачу

$$\widetilde{L}_\lambda \tilde{u} := \tilde{u}_{\xi\eta} + \lambda|\tilde{u}|^\alpha \tilde{u} = \tilde{f}(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in E_T, \tag{3.1_λ}$$

$$\tilde{u}|_{\gamma_{1,T}} = 0, \quad (\tilde{u}_\xi - \tilde{u}_\eta)|_{\gamma_{2,T}} = 0 \tag{3.2_λ}$$

относительно новой неизвестной функции $\tilde{u}(\xi,\eta) := u(\xi-\eta, \xi+\eta)$ с правой частью $\tilde{f}(\xi,\eta) := f(\xi-\eta, \xi+\eta)$. Здесь

$$\gamma_{1,T} : \eta = k\xi,\ 0 \le \xi \le \xi_T := \frac{1}{1+k}T, \quad \gamma_{2,T} : \xi = \eta,\ 0 \le \eta \le \eta_T := \frac{1}{2}T, \tag{3.3}$$

$$0 < k := \frac{1-\tilde{k}}{1+\tilde{k}} < 1. \tag{3.4}$$

Замечание 3.1. В соответствии с определением 1.1 вводится понятие сильного обобщенного решения $\tilde{u}$ задачи $(3.1_\lambda), (3.2_\lambda)$ класса C в области E_T, т. е. существует такая последовательность функций $\tilde{u}_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{E}_T, \gamma_{1,T}, \gamma_{2,T}) := \{w \in C^2(\overline{E}_T) : w|_{\gamma_{1,T}} = 0,\ (w_\xi - \widetilde{w}_\eta)|_{\gamma_{2,T}} = 0\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{C(\overline{E}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{L}_\lambda \tilde{u}_n - \tilde{f}\|_{C(\overline{E}_T)} = 0. \tag{3.5}$$

Отметим, что если u является сильным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) класса C в области D_T в смысле определения 1.1, то $\tilde{u}$ будет сильным обобщенным решением задачи (3.1_λ), (3.2_λ) класса C в области E_T в смысле данного определения, и обратно.

Обозначим через G_T треугольную область с вершинами в точках $O(0,0)$, $Q_1\big(\frac{1}{1+k}T, \frac{k}{1+k}T\big)$, $Q_1^*\big(\frac{k}{1+k}T, \frac{1}{1+k}T\big)$, симметричную относительно прямой $\xi = \eta$, причем, как легко видеть, $G_T \cap \{\eta < \xi\} = E_T$.

Продолжим функции $\tilde{u}_n$ и $\tilde{f}$ четным образом относительно прямой $\xi = \eta$ в область G_T, оставляя за ними прежние обозначения, т. е.

$$\tilde{u}_n(\xi,\eta) = \tilde{u}_n(\eta,\xi), \quad \tilde{f}(\xi,\eta) = \tilde{f}(\eta,\xi), \quad (\xi,\eta) \in G_T. \tag{3.6}$$

Замечание 3.2. Поскольку $\tilde{f}|_{\overline{E}_T} \in C(\overline{E}_T)$ и $\tilde{u}_n|_{\overline{E}_T} \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{E}_T, \gamma_{1,T}, \gamma_{2,T})$, с учетом (3.6) имеем

$$\tilde{f} \in C(\overline{G}_T), \quad \tilde{u}_n \in C^2(\overline{G}_T), \tag{3.7}$$

$$\tilde{u}_n|_{\gamma_{1,T}} = 0, \quad \tilde{u}_n|_{\gamma^*_{1,T}} = 0, \tag{3.8}$$

где $\gamma^*_{1,T} := OQ_1^* \in \partial\, G_T$, т. е. $\gamma^*_{1,T} : \xi = k\eta,\ 0 \le \eta \le \frac{1}{1+k}T$.

Замечание 3.3. Для продолженных в область G_T функций $\tilde{u}_n, \tilde{f}$ предельные равенства типа (3.5) остаются в силе, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{C(\overline{G}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{L}_\lambda \tilde{u}_n - \tilde{f}\|_{C(\overline{G}_T)} = 0. \tag{3.9}$$

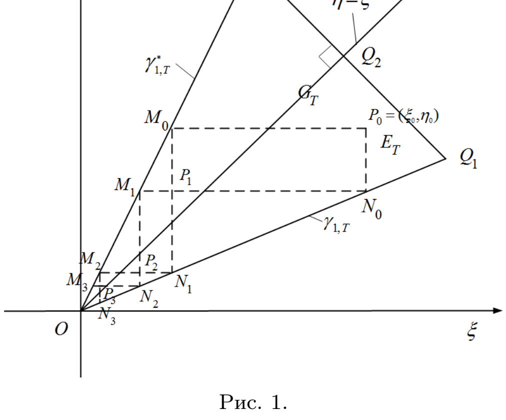

Рис. 1.

Если $P_0(\xi_0, \eta_0) \in E_T$, то обозначим через $P_1M_0P_0N_0$ характеристический относительно уравнения (3.1_λ) прямоугольник, вершины N_0 и M_0 которого лежат соответственно на отрезках $\gamma_{1,T}$ и $\gamma^*_{1,T}$, т. е. в силу (3.3) $N_0 := (\xi_0, k\xi_0)$, $M_0 := (k\eta_0, \eta_0)$, $P_1 := (k\eta_0, k\xi_0)$. Поскольку $P_1 \in G_T$, аналогичным образом построим характеристический прямоугольник $P_2M_1P_1N_1$, вершины N_1 и M_1 которого лежат соответственно на отрезках $\gamma_{1,T}$ и $\gamma^*_{1,T}$. Продолжая этот процесс, получим характеристический прямоугольник $P_{i+1}M_iP_iN_i$, для которого $N_i \in \gamma_{1,T}$,

$M_i \in \gamma^*_{1,T}$, причем $N_i := (\xi_i, k\xi_i)$, $M_i := (k\eta_i, \eta_i)$, $P_{i+1} := (k\eta_i, k\xi_i)$, если $P_i := (\xi_i, \eta_i)$, $i = 0, 1, \ldots$ (рис. 1).

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} P_{2m} &= (k^{2m}\xi_0, k^{2m}\eta_0), \quad P_{2m+1} = (k^{2m+1}\eta_0, k^{2m+1}\xi_0),\\ M_{2m} &= (k^{2m+1}\eta_0, k^{2m}\eta_0), \quad M_{2m+1} = (k^{2m+2}\xi_0, k^{2m+1}\xi_0),\\ N_{2m} &= (k^{2m}\xi_0, k^{2m+1}\xi_0), \quad N_{2m+1} = (k^{2m+1}\eta_0, k^{2m+2}\eta_0), \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $m = 0, 1, 2 \ldots.$

Как известно, для любой функции v класса C^2 в замкнутом характеристическом прямоугольнике $P_{i+1}M_iP_iN_i$ справедливо следующее равенство (см., например, [13, с. 173]):

$$v(P_i) = v(M_i) + v(N_i) - v(P_{i+1}) + \int\limits_{P_{i+1}M_iP_iN_i} \widetilde{L}_0 v \, d\xi_1 d\eta_1, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{3.11}$$

где оператор $\widetilde{L}_0$ определен в (3.1_0).

Из (3.10) в силу (3.8) имеем $\tilde{u}_n(M_i) = \tilde{u}_n(N_i) = 0$, $i = 0, 1, 2 \ldots.$ Поэтому из (3.11) при $v = \tilde{u}_n$ получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(\xi_0, \eta_0) &= \tilde{u}_n(P_0) = \tilde{u}_n(M_0) + \tilde{u}_n(N_0) - \tilde{u}_n(P_1) + \int\limits_{P_1M_0P_0N_0} \widetilde{L}_0\tilde{u}_n \, d\xi_1 d\eta_1 \\ &= -\tilde{u}_n(P_1) + \int\limits_{P_1M_0P_0N_0} \widetilde{L}_0\tilde{u}_n \, d\xi_1 d\eta_1 = -\tilde{u}_n(M_1) - \tilde{u}_n(N_1) + \tilde{u}_n(P_2) \\ &- \int\limits_{P_2M_1P_1N_1} \widetilde{L}_0\tilde{u}_n \, d\xi_1 d\eta_1 + \int\limits_{P_1M_0P_0N_0} \widetilde{L}_0\tilde{u}_n \, d\xi_1 d\eta_1 = \tilde{u}_n(P_2) \\ &- \int\limits_{P_2M_1P_1N_1} \widetilde{L}_0\tilde{u}_n \, d\xi_1 d\eta_1 + \int\limits_{P_1M_0P_0N_0} \widetilde{L}_0\tilde{u}_n \, d\xi_1 d\eta_1 = \cdots = (-1)^m \tilde{u}_n(P_m) \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \int\limits_{P_{i+1}M_iP_iN_i} \widetilde{L}_0\tilde{u}_n \, d\xi_1 d\eta_1, \quad (\xi_0, \eta_0) \in E_T. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Так как точка P_m из (3.12) стремится к точке $O(0,0)$ при $m \to \infty$, в силу (3.8) имеем $\lim\limits_{m\to\infty} \tilde{u}_n(P_m) = 0$. Отсюда, переходя в равенстве (3.12) к пределу при $m \to \infty$, для функции $\tilde{u}_n \in C^2(\overline{G}_T)$ в области E_T получим следующее представление:

$$\tilde{u}_n(\xi_0, \eta_0) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \int\limits_{P_{i+1}M_iP_iN_i} \widetilde{L}_0\tilde{u}_n \, d\xi_1 d\eta_1, \quad (\xi_0, \eta_0) \in E_T. \tag{3.13}$$

Замечание 3.4. Поскольку $\widetilde{L}_0\tilde{u}_n$ принадлежат $C(\overline{E}_T)$ и имеют место неравенства (3.4), а в силу (3.10)

$$\operatorname{mes}\ P_{i+1}M_iP_iN_i = k^{2i}(\xi_0 - k\eta_0)(\eta_0 - k\xi_0), \tag{3.14}$$

ряд в правой части равенства (3.13) равномерно и абсолютно сходится.

Легко видеть, что согласно (3.4) и (3.14)

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \int\limits_{P_{i+1}M_iP_iN_i} \widetilde{L}_0\tilde{u}_n\,d\xi_1 d\eta_1 - \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \int\limits_{P_{i+1}M_iP_iN_i} \tilde{f}\,d\xi_1 d\eta_1\right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty}\|\widetilde{L}_0\tilde{u}_n - \tilde{f}\|_{C(\overline{G}_T)}\,\mathrm{mes}\ P_{i+1}M_iP_iN_i = \|\widetilde{L}_0\tilde{u}_n - \tilde{f}\|_{C(\overline{G}_T)}$$

$$\times \sum_{i=0}^{\infty}k^{2i}(\xi_0 - k\eta_0)(\eta_0 - k\xi_0) \leq \frac{\xi_0\eta_0}{1-k^2}\|\widetilde{L}_0\tilde{u}_n - \tilde{f}\|_{C(\overline{G}_T)}. \tag{3.15}$$

Замечание 3.5. В силу (3.5) при $\lambda = 0$ и (3.15), переходя в равенстве (3.13) к пределу при $n \to \infty$, получим следующее интегральное представление для сильного обобщенного решения $\tilde{u}$ задачи $(3.1_0), (3.2_0)$ класса C в области E_T:

$$\tilde{u}(\xi_0, \eta_0) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \int\limits_{P_{i+1}M_iP_iN_i} \tilde{f}\,d\xi_1 d\eta_1, \quad (\xi_0, \eta_0) \in E_T. \tag{3.16}$$

Замечание 3.6. Из приведенных выше рассуждений следует, что для любой $\tilde{f} \in C(\overline{E}_T)$ линейная задача $(3.1_0), (3.2_0)$ имеет единственное сильное обобщенное решение $\tilde{u}$ класса C в области E_T, которое представимо в виде равномерно и абсолютно сходящегося ряда (3.16) и при $\tilde{\tilde{f}} \in C(\overline{E}_T)$ является классическим решением этой задачи, т. е. $\tilde{u} \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{E}_T, \gamma_{1,T}, \gamma_{2,T})$.

В соответствии с (3.16) введем в рассмотрение оператор $\widetilde{L}_0^{-1} : C(\overline{E}_T) \to C(\overline{E}_T)$, действующий по формуле

$$(\widetilde{L}_0^{-1}\tilde{f})(\xi, \eta) := \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \int\limits_{P_{i+1}M_iP_iN_i} \tilde{f}\,d\xi_1 d\eta_1, \quad (\xi, \eta) \in E_T. \tag{3.17}$$

Здесь в подынтегральном выражении согласно (3.6) под $\tilde{f}$ подразумевается правая часть уравнения (3.1_λ), четным образом продолженная из области E_T в область G_T относительно прямой $\xi = \eta$, причем очевидно, что $\tilde{f} \in C(\overline{E}_T)$.

Замечание 3.7. Ввиду (3.17) и замечания 3.6 единственное сильное обобщенное решение $\tilde{u}$ задачи $(3.1_0), (3.2_0)$ класса C в области E_T представимо в виде $\tilde{u} = \widetilde{L}_0^{-1}\tilde{f}$, причем в силу (3.4), (3.14) имеет место оценка

$$|\tilde{u}(\xi, \eta)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int\limits_{P_{i+1}M_iP_iN_i} |\tilde{f}|\,d\xi_1 d\eta_1 \leq \xi\eta\|\tilde{f}\|_{C(\overline{E}_T)}\sum_{i=0}^{\infty}k^{2i}$$

$$\leq \frac{\xi^2+\eta^2}{2(1-k^2)}\|\tilde{f}\|_{C(\overline{E}_T)} \leq \frac{T^2}{1-k^2}\|\tilde{f}\|_{C(\overline{E}_T)},$$

откуда, в свою очередь, следует, что

$$\|\widetilde{L}_0^{-1}\|_{C(\overline{E}_T)\to C(\overline{E}_T)} \leq \frac{T^2}{1-k^2}. \tag{3.18}$$

Лемма 3.1. *Пусть $\alpha > 0$. Функция $\tilde{u} \in C(\overline{E}_T)$ является сильным обобщенным решением задачи (3.1_λ), (3.2_λ) класса C в области E_T тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением следующего нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра:*

$$\tilde{u}(\xi,\eta) + \lambda\big(\widetilde{L}_0^{-1}|\tilde{u}|^\alpha \tilde{u}\big)(\xi,\eta) = \big(\widetilde{L}_0^{-1}\tilde{f}\big)(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in E_T. \tag{3.19}$$

Доказательство. Действительно, пусть $\tilde{f} \in C(\overline{E}_T)$ и $\tilde{u} \in C(\overline{E}_T)$ является решением уравнения (3.19). Поскольку пространства $C^1(\overline{E}_T)$ и $C^2(\overline{E}_T)$ плотны в $C(\overline{E}_T)$ (см., например, [14, с. 37]), найдутся такие последовательности функций $\tilde{f}_n \in C^1(\overline{E}_T)$ и $w_n \in C^2(\overline{E}_T)$, что $\tilde{f}_n \to \tilde{f}$ и $\widetilde{w}_n \to \tilde{u}$ в пространстве $C(\overline{E}_T)$ при $n \to \infty$. Положим $\tilde{u}_n := -\lambda\big(\widetilde{L}_0^{-1}|w_n|^\alpha w_n\big) + \widetilde{L}_0^{-1}\tilde{f}_n$, $n = 1, 2, \dots$. Так как $|w_n|^\alpha w_n \in C^1(\overline{E}_T)$ при $\alpha > 0$, в силу замечания 3.6 легко видеть, что $\tilde{u}_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{E}_T, \gamma_{1,T}, \gamma_{2,T})$. С одной стороны, ввиду оценки (3.18) и равенства (3.19) имеем $\tilde{u}_n \to -\lambda\big(\widetilde{L}_0^{-1}|\tilde{u}|^\alpha \tilde{u}\big) + \widetilde{L}_0^{-1}\tilde{f} = \tilde{u}$ в пространстве $C(\overline{E}_T)$ при $n \to \infty$, т. е. $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ в $C(\overline{E}_T)$ при $n \to \infty$. С другой стороны, $\widetilde{L}_0\tilde{u}_n = -\lambda|w_n|^\alpha w_n + \tilde{f}_n$, а поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{C(\overline{E}_T)} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|w_n - \tilde{u}\|_{C(\overline{E}_T)} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_{C(\overline{E}_T)} = 0$, с учетом (2.3) имеем $\widetilde{L}_\lambda \tilde{u}_n = \widetilde{L}_0\tilde{u}_n + \lambda|\tilde{u}_n|^\alpha \tilde{u}_n = -\lambda|w_n|^\alpha w_n + \tilde{f}_n + \lambda|\tilde{u}_n|^\alpha \tilde{u}_n = -\lambda\big[|w_n|^\alpha w_n - |\tilde{u}|^\alpha \tilde{u}\big] + \lambda\big[|\tilde{u}_n|^\alpha \tilde{u}_n - |\tilde{u}|^\alpha \tilde{u}\big] + \tilde{f}_n \to \tilde{f}$ в пространстве $C(\overline{E}_T)$ при $n \to \infty$. Таким образом, функция $\tilde{u} \in C(\overline{E}_T)$ является сильным обобщенным решением задачи $(3.1_\lambda), (3.2_\lambda)$ класса C в области E_T. Обратное очевидно.

4. Случай глобальной разрешимости задачи (1.1), (1.2) в классе непрерывных функций

Лемма 4.1. *Оператор $\widetilde{L}_0^{-1}$, определенный по формуле (3.17), является линейным непрерывным оператором, действующим из пространства $C(\overline{E}_T)$ в пространство $C^1(\overline{E}_T)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что при $\tilde{f} \in C(\overline{E}_T)$ ряд из правой части (3.17), формально продифференцированный по ξ и по η, равномерно сходится на множестве $\overline{E}_T$. Действительно, как легко проверить,

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \int\limits_{P_{i+1}M_iP_iN_i} \tilde{f}\,d\xi_1 d\eta_1\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[k^{2n}\int\limits_{N_{2n}P_{2n}} \tilde{f}\,d\eta_1 + k^{2n+2}\int\limits_{P_{2n+2}M_{2n+1}} \tilde{f}\,d\eta_1 - k^{2n+1}\int\limits_{M_{2n+1}N_{2n}} \tilde{f}\,d\xi_1\right], \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \int\limits_{P_{i+1}M_iP_iN_i} \tilde{f}\,d\xi_1 d\eta_1\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[k^{2^n}\int\limits_{M_{2n}P_{2n}} \tilde{f}\,d\xi_1 + k^{2n+2}\int\limits_{P_{2n+2}N_{2n+1}} \tilde{f}\,d\xi_1 - k^{2n+1}\int\limits_{N_{2n+1}M_{2n}} \tilde{f}d\eta_1\right]. \tag{4.2}$$

В силу (3.10) имеют место равенства

$$|N_{2m}P_{2m}| = k^{2m}(\eta - k\xi), \quad |P_{2m+2}M_{2m+1}| = k^{2m+1}(\xi - k\eta),$$

$$|M_{2m+1}N_{2m}| = k^{2m}(1-k^2)\xi, \quad |M_{2m}P_{2m}| = k^{2m}(\xi - k\eta),$$
$$|P_{2m+2}N_{2m+1}| = k^{2m+1}(\eta - k\xi), \quad |N_{2m+1}M_{2m}| = k^{2m}(1-k^2)\eta.$$

Отсюда и из (3.4) следуют равномерная и абсолютная сходимость рядов (4.1), (4.2) и оценка

$$\max\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial\xi}\big(\widetilde{L}_0^{-1}\tilde{f}\big)\right\|_{C(\overline{E}_T)}, \left\|\frac{\partial}{\partial\eta}\big(\widetilde{L}_0^{-1}\tilde{f}\big)\right\|_{C(\overline{E}_T)}\right\} \le \frac{3}{1-k^4}T\|\tilde{f}\|_{C(\overline{E}_T)},$$

из которой ввиду (3.18) с учетом того, что $\|v\|_{C^1} := \max\{\|v\|_C, \|v_\xi\|_C, \|v_\eta\|_C\}$, вытекает утверждение леммы 4.1.

Замечание 4.1. Поскольку пространство $C^1(\overline{E}_T)$ компактно вложено в $C(\overline{E}_T)$ (см., например, [15, с. 135]), в силу (3.18) и леммы 4.1 оператор $\widetilde{L}_0^{-1}$: $C(\overline{E}_T) \to C(\overline{E}_T)$ линеен и компактен.

Уравнение (3.19) перепишем в виде

$$v = Av := \widetilde{L}_0^{-1}(-\lambda|v|^\alpha v + \tilde{f}), \tag{4.3}$$

где оператор $A : C(\overline{E}_T) \to C(\overline{E}_T)$ непрерывен и компактен, поскольку нелинейный оператор $K : C(\overline{E}_T) \to C(\overline{E}_T)$, действующий по формуле $Kv = -\lambda|v|^\alpha v + \tilde{f}$, при $\alpha > 0$ ограничен и непрерывен, а линейный оператор $\widetilde{L}_0^{-1} : C(\overline{E}_T) \to C(\overline{E}_T)$ в силу замечания 4.1 компактен. В тоже время согласно леммам 2.1 и 3.1, а также равенствам (2.18) и (2.19) для любого параметра $\tau \in [0, 1]$ и для любого решения $v \in C(\overline{E}_T)$ уравнения $v = \tau Av$ справедлива априорная оценка $\|v\|_{C(\overline{E}_T)} \le c_1\|\tilde{f}\|_{C(\overline{E}_T)} + c_2$ с теми же неотрицательными постоянными c_1 и c_2, что и в (2.1), не зависящими от v, τ и $\tilde{f}$. Поэтому по теореме Лере — Шаудера (см., например, [16, с. 375]) уравнение (4.3) при условиях леммы 2.1 в случае $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ имеет хотя бы одно решение $v \in C(\overline{E}_T)$. Тем самым в силу леммы 3.1 доказана следующая

Теорема 4.1. *Пусть $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. Тогда задача* (1.1), (1.2) *глобально разрешима в классе C в смысле определения* 1.2, *т. е. если $f \in C(\overline{D}_\infty)$, то для любого $T > 0$ задача* (1.1), (1.2) *имеет сильное обобщенное решение класса C в области D_T.*

5. Гладкость и единственность решения задачи (1.1), (1.2). Существование глобального классического решения в D_∞

Из равенств (3.19), (4.1), (4.2) в силу лемм 3.1 и 4.1 непосредственно вытекает

Лемма 5.1. *Пусть u является сильным обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2) *класса C в области D_T в смысле определения* 1.1. *Тогда если $\alpha > 0$ и $f \in C^1(\overline{D}_T)$, то $u \in C^2(\overline{D}_T)$.*

Лемма 5.2. *При $\alpha > 0$ задача* (1.1), (1.2) *не может иметь более одного сильного обобщенного решения класса C в области D_T.*

Доказательство. Действительно, предположим, что задача (1.1), (1.2) имеет два возможных различных сильных обобщенных решения u_1 и u_2 класса

C в области D_T. Согласно определению 1.1 существует такая последовательность функций $u_{in} \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \tilde{\gamma}_{1,T}, \tilde{\gamma}_{2,T})$, $i = 1, 2$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{in} - u_i\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|L_\lambda u_{in} - f\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{5.1}$$

Положим $\omega_n := u_{2n} - u_{1n}$. Легко видеть, что функция $\omega_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_T, \tilde{\gamma}_{1,T}, \tilde{\gamma}_{2,T})$ является классическим решением следующей задачи:

$$L_0\omega_n + g_n\omega_n = f_n, \tag{5.2}$$

$$\omega_n|_{\tilde{\gamma}_{1,T}} = 0, \quad \omega_{nx}|_{\tilde{\gamma}_{2,T}} = 0. \tag{5.3}$$

Здесь

$$g_n := \lambda(1+\alpha)\int_0^1 |u_{1n} + t(u_{2n} - u_{1n})|^\alpha\, dt, \tag{5.4}$$

$$f_n := L_\lambda u_{2n} - L_\lambda u_{1n}, \tag{5.5}$$

где использовано очевидное равенство

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (x_2 - x_1)\int_0^1 \varphi'[x_1 + t(x_2 - x_1)]\, dt$$

для функции $\varphi(x) := |x|^\alpha x$ при $x_2 = u_{2n}$, $x_1 = u_{1n}$, $\alpha > 0$. В силу первого равенства из (5.1) найдется такое число $M := \mathrm{const} > 0$, не зависящее от индексов i и n, что $\|u_{in}\|_{C(\overline{D}_T)} \le M$, откуда, в свою очередь, с учетом (5.4) следует, что

$$\|g_n\|_{C(\overline{D}_T)} \le |\lambda|(1+\alpha)M^\alpha \quad \forall n. \tag{5.6}$$

В силу (5.5) и второго равенства из (5.1)

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{C(\overline{D}_T)} = 0. \tag{5.7}$$

Умножая обе части равенства (5.2) на ω_{nt} и интегрируя по области D_τ, $0 < \tau \le T$, ввиду краевых условий (5.3) так же, как при получении неравенства (2.10) из (2.4), (2.5), имеем

$$w_n(\tau) := \int_{\Omega_\tau} \left(\omega_{nx}^2 + \omega_{nt}^2\right) dx \le 2\int_{D_\tau} (f_n - g_n\omega_n)\omega_{nt}\, dxdt. \tag{5.8}$$

В силу оценки (5.6) и неравенства Коши

$$\begin{aligned}
2\int_{D_\tau} (f_n - g_n\omega_n)\omega_{nt}\, dxdt &\le \int_{D_\tau} \omega_{nt}^2\, dxdt + \int_{D_\tau} (f_n - g_n\omega_n)^2\, dxdt \\
&\le \int_{D_\tau} \omega_{nt}^2\, dxdt + 2\int_{D_\tau} f_n^2\, dxdt + 2\int_{D_\tau} g_n^2\omega_n^2\, dxdt \le \int_{D_\tau} \omega_{nt}^2\, dxdt \\
&\quad + 2\int_{D_\tau} f_n^2\, dxdt + 2\lambda^2(1+\alpha)^2 M^{2\alpha}\int_{D_\tau} \omega_n^2\, dxdt.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Согласно (5.3) и равенству $\omega_n(x,t) = \int\limits_{x/\tilde{k}}^{t} \omega_{nt}(x,s)\,ds$, $(x,t) \in \overline{D}_T$, стандартными рассуждениями приходим к неравенству (см., например, [17, с. 63])

$$\int\limits_{D_\tau} \omega_n^2\,dxdt \le \tau^2 \int\limits_{D_\tau} \omega_{nt}^2\,dxdt,$$

откуда с учетом (5.8) и (5.9) следует, что

$$\begin{aligned} w_n(\tau) &\le [1 + 2\lambda^2(1+\alpha)^2 M^{2\alpha}\tau^2] \int\limits_{D_\tau} \omega_{nt}^2\,dxdt + 2\int\limits_{D_\tau} f_n^2\,dxdt \\ &\le [1 + 2\lambda^2(1+\alpha)^2 M^{2\alpha}T^2] \int\limits_0^\tau w_n(s)ds + 2\int\limits_{D_T} f_n^2\,dxdt. \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла получаем, что

$$w_n(\tau) \le c\|f_n\|^2_{L_2(D_T)}, \quad 0 < \tau \le T, \tag{5.10}$$

где $c := 2\exp[1 + 2\lambda^2(1+\alpha)^2 M^{2\alpha}T^2]T$.

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые привели к неравенству (2.12), а также учитывая очевидное неравенство $\|f_n\|^2_{L_2(D_T)} \le \|f_n\|^2_{C(\overline{D}_T)} \operatorname{mes} D_T$, в силу (5.10) при $(x,t) \in \overline{D}_T$ имеем

$$|\omega_n(x,t)|^2 \le \tilde{k}tw_n(t) \le \tilde{k}Tc\operatorname{mes} D_T\|f_n\|^2_{C(\overline{D}_T)} = \frac{c}{2}\tilde{k}^2T^3\|f_n\|^2_{C(\overline{D}_T)}.$$

Отсюда следует, что

$$\|\omega_n\|_{C(\overline{D}_T)} \le T\sqrt{\frac{cT}{2}}\tilde{k}\|f_n\|_{C(\overline{D}_T)}. \tag{5.11}$$

Поскольку $\omega_n := u_{2n} - u_{1n}$, в силу первого равенства из (5.1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|\omega_n\|_{C(\overline{D}_T)} = \|u_2 - u_1\|_{C(\overline{D}_T)}$, тем самым, переходя в неравенстве (5.11) к пределу при $n \to \infty$, ввиду (5.7) получим $\|u_2 - u_1\|_{C(\overline{D}_T)} = 0$, т. е. $u_1 = u_2$, что и доказывает лемму 5.1.

Теорема 5.1. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $\lambda > 0$. *Тогда для любого* $f \in C^1(\overline{D}_\infty)$ задача (1.1), (1.2) *имеет единственное глобальное классическое решение* $u \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_\infty, \tilde{\gamma}_{1,\infty}, \tilde{\gamma}_{2,\infty})$ *в области* D_∞.

Доказательство. Если $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ и $f \in C^1(\overline{D}_\infty)$, то согласно теореме 4.1 и леммам 5.1 и 5.2 в области D_T при $T = n$ существует единственное классическое решение $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_n, \tilde{\gamma}_{1,n}, \tilde{\gamma}_{2,n})$ задачи (1.1), (1.2). Поскольку u_{n+1} является также классическим решением задачи (1.1), (1.2) в области D_n, в силу леммы 5.2 имеем $u_{n+1}|_{D_n} = u_n$. Поэтому функция u, построенная в области D_∞ по правилу: $u(x,t) = u_n(x,t)$ при $n = [t] + 1$, где $[t]$ — целая часть числа t, а $(x,t) \in D_\infty$, будет единственным классическим решением задачи (1.1), (1.2) в области D_∞ класса $\overset{\circ}{C}{}^2(\overline{D}_\infty, \tilde{\gamma}_{1,\infty}, \tilde{\gamma}_{2,\infty})$. Теорема 5.1 доказана полностью.

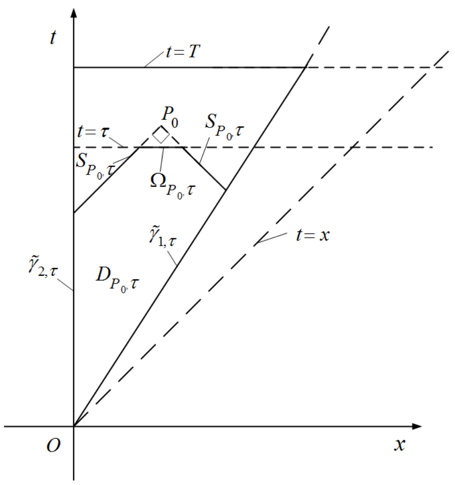

Рис. 2.

6. Случай отсутствия глобального классического решения задачи (1.1), (1.2)

Рассмотрим случай, когда в уравнении (1.1) $\lambda < 0$, а $\alpha > 0$.

При $P_0 := (x_0, t_0) \in D_T$ введем в рассмотрение область $D_{P_0} := \{(x,t) \in D_T : k_0 x < t < t_0 - |x - x_0|\}$, которая ограничена сверху характеристическим углом $S_{P_0} : t = t_0 - |x - x_0|$ с вершиной в точке P_0, а снизу — отрезками $\tilde{\gamma}_{1,T}$ и $\tilde{\gamma}_{2,T}$ носителей данных задачи (1.1), (1.2), где

$$k_0 := 1/\tilde{k} > 1. \tag{6.1}$$

Лемма 6.1. *Пусть $f \in C(\overline{D}_T)$ и $u \in C^2(\overline{D}_T)$ — классическое решение задачи (1.1), (1.2). Тогда если для некоторой точки $P_0 \in D_T$ правая часть f уравнения (1.1) удовлетворяет условию*

$$f|_{D_{P_0}} = 0, \tag{6.2}$$

то и решение u этой задачи удовлетворяет такому же условию

$$u|_{D_{P_0}} = 0. \tag{6.3}$$

Доказательство. Положим $D_{P_0,\tau} := D_{P_0} \cap \{t < \tau\}$, $\Omega_{P_0,\tau} := \overline{D}_{P_0} \cap \{t = \tau\}$, $0 < \tau < t_0$. Тогда $\partial D_{P_0,\tau} = \tilde{\gamma}_{1,\tau} \cup \tilde{\gamma}_{2,\tau} \cup S_{P_0,\tau} \cup \Omega_{P_0,\tau}$, где $\tilde{\gamma}_{i,\tau} := \partial D_{P_0,\tau} \cap \tilde{\gamma}_{i,T}$, $i = 1, 2$, $S_{P_0,\tau} := \partial D_{P_0,\tau} \cap S_{P_0}$ (рис. 2).

Пусть $u \in C^2(\overline{D}_T)$ — классическое решение задачи (1.1), (1.2). Так же, как и при получении (2.7), умножая обе части равенства (1.1) на u_t и интегрируя по области $D_{P_0,\tau}$, $0 < \tau < t_0$, с учетом (1.2) и (6.2) получим

$$0 = \int\limits_{\tilde{\gamma}_{1,\tau} \cup S_{P_0,\tau}} \nu_t^{-1} \big[(u_x \nu_t - u_t \nu_x)^2 + u_t^2 \big(\nu_t^2 - \nu_x^2\big) \big] \, ds \\ + \frac{2\lambda}{\alpha + 2} \int\limits_{S_{P_0,\tau} \cup \Omega_{P_0,\tau}} |u|^{\alpha+2} \nu_t \, ds + \int\limits_{\Omega_{P_0,\tau}} \big(u_x^2 + u_t^2\big) \, dx. \tag{6.4}$$

В силу (1.2) и (6.1), принимая во внимание, что

$$(u_x \nu_t - u_t \nu_x)|_{\tilde{\gamma}_{1,\tau}} = 0, \quad \big(\nu_t^2 - \nu_x^2\big)\big|_{\tilde{\gamma}_{1,\tau}} < 0, \quad \nu_t|_{\tilde{\gamma}_{1,\tau}} < 0,$$

$$\left(\nu_t^2-\nu_x^2\right)\big|_{S_{P_0,\tau}}=0,\quad \nu_t|_{S_{P_0,\tau}}=\frac{1}{\sqrt{2}}>0,$$

имеем

$$\int\limits_{\tilde{\gamma}_{1,\tau}\cup S_{P_0,\tau}}\nu_t^{-1}\left[\left(u_x\nu_t-u_t\nu_x\right)^2+u_t^2\left(\nu_t^2-\nu_x^2\right)\right]ds\geq 0.$$

С учетом этого неравенства и $\nu_t|_{\Omega_{P_0,\tau}}=1$ из (6.4) получаем

$$w(\tau):=\int\limits_{\Omega_{P_0,\tau}}\left(u_x^2+u_t^2\right)dx\leq M\int\limits_{S_{P_0,\tau}\cup\ \Omega_{P_0,\tau}}u^2\,ds,\quad 0<\tau<t_0. \tag{6.5}$$

Здесь ввиду того, что $u\in C^2(\overline{D}_T)$ и $|\nu_t|_{S_{P_0,\tau}\cup\,\Omega_{P_0,\tau}}\leq 1$, в качестве неотрицательной постоянной M, которая не зависит от параметра τ, можно взять

$$M:=\frac{2|\lambda|}{\alpha+2}\|u\|^{\alpha}_{C(\overline{D}_T)}<+\infty. \tag{6.6}$$

В силу (1.2) имеем

$$u(x,t)=\int\limits_{k_0x}^{t}u_t(x,\sigma)\,d\sigma,\quad (x,t)\in S_{P_0,\tau}\cup\Omega_{P_0,\tau}.$$

Отсюда стандартными рассуждениями получаем неравенство (см., например, [17, с. 63])

$$\int\limits_{S_{P_0,\tau}\cup\,\Omega_{P_0,\tau}}u^2\,ds\leq 2t_0\int\limits_{D_{P_0,\tau}}u_t^2\,dxdt,\quad 0<\tau<t_0.$$

Из (6.5) с учетом последнего неравенства легко находим, что

$$w(\tau)\leq 2t_0M\int\limits_0^{\tau}w(\sigma)\,d\sigma,\quad 0<\tau<t_0.$$

Отсюда в силу (6.6) и леммы Гронуолла непосредственно следует, что $w(\tau)=0$, $0<\tau<t_0$, а тем самым $u_x=u_t=0$ в области D_{P_0}. Поэтому $u|_{D_{P_0}}=\mathrm{const}$ и, приняв во внимание первое граничное условие из (1.2), окончательно получаем, что справедливо (6.3). Лемма 6.1 доказана.

Обозначим через Λ_T треугольную область с вершинами в точках $O(0,0)$, $K(T/k_0,T)$, $K^*(-T/k_0,T)$, симметричную относительно прямой $x=0$.

Пусть $G_\varepsilon:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2: t>|x|+\varepsilon\}$ — угловая область с вершиной в точке $(0,\varepsilon)$ с характеристическими сторонами, где $\varepsilon:=\mathrm{const}>0$. Положим $B_T:=\Lambda_T\backslash\overline{G}_\varepsilon$, $\varepsilon<T\leq\infty$. В силу (6.1) очевидно, что $B_\infty=\big\{(x,t)\in\mathbb{R}^2: k_0|x|<t<|x|+\varepsilon,\ |x|<\frac{\varepsilon}{k_0-1}\big\}$, причем

$$B_\infty\subset\Sigma_b:=\big\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:0<t<b\big\},\quad b:=\frac{\varepsilon k_0}{k_0-1}. \tag{6.7}$$

Легко видеть, что $B_T=B_b=B_\infty$ при $T\geq b$ (рис. 3).

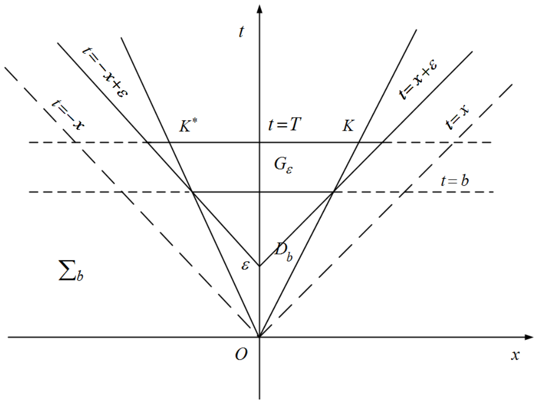

Рис. 3.

Лемма 6.2. *Пусть* $\lambda < 0$, $\alpha > 0$, $f \in C(\overline{D}_T)$, $T \geq b$, $f \geq 0$ *и* $f|_{B_b} = 0$. *Тогда если* $u \in C^2(\overline{D}_T)$ *— классическое решение задачи* (1.1), (1.2), *то* $u|_{D_b} \geq 0$.

Доказательство. Сначала покажем, что $u|_{B_b} = 0$. Действительно, пусть $P_0 \in B_b$. В силу условия леммы справедливо (6.2) и согласно лемме 6.1 имеет место равенство (6.3). Продолжим функции u и f четным образом относительно прямой $x = 0$ из области D_T в область Λ_T, оставляя за ними прежние обозначения. Легко проверить, что в силу (1.2) продолженная функция u принадлежит классу $C^2(\overline{\Lambda}_T)$, является классическим решением уравнения (1.1) и удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{OK} = 0, \quad u|_{OK^*} = 0. \tag{6.8}$$

Еще раз продолжая функции u и f нулем за пределы Λ_b в полосу Σ_b и оставляя за ними те же обозначения, с учетом (6.8) получим, что $u \in C^2(\overline{\Sigma}_b)$ является классическим решением задачи Коши

$$u_{tt} - u_{xx} = -\lambda|u|^\alpha u + f(x,t), \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0 \tag{6.9}$$

в Σ_b. Как известно, для решения $u \in C^2(\overline{\Sigma}_b)$ задачи (6.9) справедливо интегральное представление (см., например, [13, с. 162])

$$u(x,t) = -\frac{\lambda}{2} \int\limits_{\Omega_{x,t}} |u|^\alpha u \, d\xi d\tau + f_0(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_b. \tag{6.10}$$

Здесь

$$f_0(x,t) := \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{x,t}} f(\xi,\tau) \, d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \Sigma_b, \tag{6.11}$$

где $\Omega_{x,t} := \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^2 : |\xi - x| < t, \ 0 < \tau < t - |\xi - x|\}$ — треугольник с вершиной в точке (x,t), основанием которого является отрезок $|\xi - x| < t, \ \tau = 0$ оси ξ в плоскости переменных ξ и τ.

Пусть $P_0 \in D_b$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$v(x,t) = \int\limits_{\Omega_{x,t}} k(\xi,\tau) v(\xi,\tau) \, d\xi d\tau + f_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_{P_0}, \tag{6.12}$$

относительно неизвестной функции $v \in C(\overline{\Omega}_{P_0})$. Здесь

$$k(\xi,\tau) := -\frac{\lambda}{2}|u(\xi,\tau)|^\alpha, \quad (\xi,\tau) \in \overline{\Omega}_{P_0}, \tag{6.13}$$

где u — классическое решение задачи (1.1), (1.2), фигурирующее в лемме 6.2. Поскольку $k, f_0 \in C(\overline{\Omega}_{P_0})$, а оператор в правой части (6.12) является интегральным оператором типа Вольтерра (по переменной t), уравнение (6.12) однозначно разрешимо в пространстве $C(\overline{\Omega}_{P_0})$. При этом решение v уравнения (6.12) может быть получено методом последовательных приближений Пикара:

$$v_0 = 0, \quad v_{m+1}(x,t) = \int\limits_{\Omega_{x,t}} k(\xi,\tau) v_m(\xi,\tau)\, d\xi d\tau + f_0(x,t), \quad m = 0,1,2,\dots. \tag{6.14}$$

Действительно, пусть $\omega_\tau := \Omega_{P_0} \cap \{t = \tau\}$, $w_m|_{\overline{\Omega}_{P_0}} := v_{m+1} - v_m$, $\lambda_m(t) := \max\limits_{x \in \overline{\omega}_t} |w_m(x,t)|$, $m = 0,1,2,\dots$. Очевидно, что $w_0|_{\overline{\Omega}_{P_0}} := f_0$. Тогда если

$$(B_p\varphi)(t) := \delta \int\limits_0^t (t-\tau)^{p-1} \varphi(\tau)\, d\tau, \quad 0 < t < t_0,\ p > 0,\ \delta := 2\|k\|_{C(\overline{\Omega}_{P_0})},$$

то, принимая во внимание равенство (см., например, [18, с. 206])

$$\big(B_p^m \varphi\big)(t) = \frac{[\delta \Gamma(p)]^m}{\Gamma(mp)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{mp-1} \varphi(\tau) d\tau, \quad t > 0,\ m = 1,2,\dots,$$

где Γ — гамма-функция, в силу (6.14) при $(x,t) \in \Omega_{P_0}$ имеем

$$\begin{aligned} |w_m(x,t)| &= \Bigg| \int\limits_{\Omega_{x,t}} k w_{m-1}\, d\xi d\tau \Bigg| \le \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|\xi - x| \le t-\tau} |k||w_{m-1}|\, d\xi \\ &\le \|k\|_{C(\overline{\Omega}_{P0})} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|\xi - x| \le t-\tau} \lambda_{m-1}(\tau)\, d\xi = 2\|k\|_{C(\overline{\Omega}_{P_0})} \int\limits_0^t (t-\tau)\lambda_{m-1}(\tau)\, d\tau \\ &= (B_2\lambda_{m-1})(t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lambda_m(t) &\le (B_2\lambda_{m-1})(t) \le \dots \le \big(B_2^m \lambda_0\big)(t) = \frac{[\delta\Gamma(2)]^m}{\Gamma(2m)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{2m-1} \lambda_0(\tau)\, d\tau \\ &\le \frac{\delta^m}{\Gamma(2m)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{2m-1} \|w_0\|_{C(\overline{\Omega}_{P_0})}\, d\tau \le \frac{\big(\delta t_0^2\big)^m}{2m\Gamma(2m)} \|f_0\|_{C(\overline{\Omega}_{P_0})} \\ &= \frac{\big(\delta t_0^2\big)^m}{(2m)!} \|f_0\|_{C(\overline{\Omega}_{P_0})} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\|w_m\|_{C(\overline{\Omega}_{P_0})} = \|\lambda_m\|_{C([0,t_0])} \le \frac{\big(\delta t_0^2\big)^k}{(2m)!} \|f_0\|_{C(\overline{\Omega}_{P_0})}.$$

Поэтому ряд $v := \lim\limits_{m\to\infty} v_m = v_0 + \sum\limits_{m=0}^{\infty} w_m$ сходится в классе $C(\overline{\Omega}_{P_0})$ и его сумма является решением уравнения (6.12). Аналогично доказывается единственность решения уравнения (6.12) в пространстве $C(\overline{\Omega}_{P_0})$.

Согласно формулам (6.13), (6.11) и условиям леммы функции k и f_0 неотрицательны. Поэтому последовательные приближения v_m из (6.14) неотрицательны. Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty} \|v_m - v\|_{C(\overline{\Omega}_{P_0})} = 0$, решение v неотрицательно в замкнутой области $\overline{\Omega}_{P_0}$. Остается заметить, что в силу (6.10), (6.12) и (6.13) функция u является решением уравнения (6.12), а в силу однозначной разрешимости этого уравнения $u = v \geq 0$ в $\overline{\Omega}_{P_0}$. Таким образом, $u(P_0) \geq 0$ для любой точки $P_0 \in D_b$, что и доказывает лемму 6.2.

Замечание 6.1. Поскольку $T \geq b$ и классическое решение u задачи (1.1), (1.2) в области D_T является также классическим решением этой задачи в области D_b, интегрированием по частям легко проверить, что справедливо следующее интегральное равенство:

$$\int\limits_{D_b} u\Box\varphi\,dxdt = -\lambda\int\limits_{D_b} |u|^\alpha u\varphi\,dxdt + \int\limits_{D_b} f\varphi\,dxdt \tag{6.15}$$

для любой функции φ такой, что

$$\varphi \in C^2(\overline{D}_b), \quad \varphi|_{\tilde{\gamma}_{1,b}} = 0, \quad \varphi_x|_{\tilde{\gamma}_{2,b}} = 0, \quad \varphi|_{\tilde{\gamma}_{3,b}} = 0, \quad \varphi_t|_{\tilde{\gamma}_{3,b}} = 0.$$

При $\lambda < 0$ в силу леммы 6.2 равенство (6.15) можно переписать в виде

$$\int\limits_{D_b} |u|\Box\varphi\,dxdt = |\lambda|\int\limits_{D_b} |u|^p\varphi\,dxdt + \int\limits_{D_b} f\varphi\,dxdt, \quad p := \alpha + 1 > 1. \tag{6.16}$$

Воспользуемся методом пробных функций (см., например, [19, с. 10–12]). Введем в рассмотрение функцию $\varphi^0 := \varphi^0(x,t)$ такую, что

$$\varphi^0 \in C^2(\overline{D}_\infty), \quad \varphi^0|_{D_{T=1}} > 0, \quad \varphi^0|_{\tilde{\gamma}_{1,\infty}} = 0, \quad \varphi^0|_{t\geq 1} = 0, \quad \varphi^0_x|_{\tilde{\gamma}_{2,\infty}} = 0, \tag{6.17}$$

и

$$\varkappa_0 := \int\limits_{D_{T=1}} \frac{|\Box\varphi^0|^{p'}}{|\varphi^0|^{p'-1}}\,dxdt < +\infty, \quad p' = \frac{\alpha+1}{\alpha}. \tag{6.18}$$

Легко проверить, что в качестве функции φ^0, удовлетворяющей условиям (6.17) и (6.18), при достаточно большом натуральном l может быть взята функция

$$\varphi^0(x,t) = \begin{cases} [x(1-t)(t-k_0x)]^l, & (x,t) \in D_{T=1}, \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

Положим $\varphi_b(x,t) := \varphi^0(x/b, t/b)$. В силу (6.17) легко видеть, что

$$\varphi_b \in C^2(\overline{D}_b),\ \varphi_b|_{D_b} > 0,\ \varphi_b|_{\tilde{\gamma}_{1,b}} = 0,\ \frac{\partial\varphi_b}{\partial x}\bigg|_{\tilde{\gamma}_{2,b}} = 0,\ \varphi_b|_{\tilde{\gamma}_{3,b}} = 0,\ \frac{\partial\varphi_b}{\partial t}\bigg|_{\tilde{\gamma}_{3,b}} = 0. \tag{6.19}$$

Имеет место следующая теорема об отсутствии классического решения задачи (1.1), (1.2) в области D_T.

Теорема 6.1. *Пусть $\lambda < 0$, $\alpha > 0$, $f = \mu g$, где $g \in C(\overline{D}_T)$, $g|_{B_b} = 0$, $g \geq 0$, $g \not\equiv 0$, $T \geq b$ и $\mu = \mathrm{const} > 0$, а число b определено в* (6.7). *Тогда найдется такое положительное число μ_0, что при $\mu > \mu_0$ задача* (1.1), (1.2) *не имеет классического решения в области D_T.*

Доказательство. Предположим, что в условиях теоремы существует классическое решение задачи (1.1), (1.2) в области D_T. Тогда в силу лемм 6.1 и 6.2

имеет место равенство (6.16), в котором ввиду (6.19) в качестве φ может быть взята функция $\varphi = \varphi_b$, т. е.

$$\int\limits_{D_b} |u|\Box\varphi_b\,dxdt = |\lambda| \int\limits_{D_b} |u|^p \varphi_b\,dxdt + \mu\zeta_\varepsilon. \tag{6.20}$$

Здесь в силу условий теоремы

$$\zeta_\varepsilon := \int\limits_{D_b} g\varphi_b\,dxdt > 0. \tag{6.21}$$

Равенство (6.20) перепишем в виде

$$|\lambda| \int\limits_{D_b} |u|^p \varphi_b\,dxdt = \int\limits_{D_b} |u|\Box\varphi_b\,dxdt - \mu\zeta_\varepsilon. \tag{6.22}$$

Если в неравенстве Юнга с параметром $\varepsilon_1 > 0$:

$$a_1 a_2 \le \frac{\varepsilon_1}{p} a_1^p + \frac{1}{p'\varepsilon_1^{p'-1}} a_2^{p'}; \quad a_1, a_2 \ge 0,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ p > 1,$$

возьмем $a_1 = |u|\varphi_b^{\frac{1}{p}}$, $a_2 = \frac{|\Box\varphi_b|}{\varphi_b^{\frac{1}{p}}}$, то с учетом того, что $\frac{p'}{p} = p' - 1$, получим

$$|u\Box\varphi_b| = |u|\varphi_b^{\frac{1}{p}} \frac{|\Box\varphi_b|}{\varphi_b^{\frac{1}{p}}} \le \frac{\varepsilon_1}{p}|u|^p\varphi_b + \frac{1}{p'\varepsilon_1^{p'-1}} \frac{|\Box\varphi_b|^{p'}}{\varphi_b^{p'-1}}.$$

Из (6.22) и последнего неравенства имеем

$$\left(|\lambda| - \frac{\varepsilon_1}{p}\right) \int\limits_{D_b} |u|^p\varphi_b\,dxdt \le \frac{1}{p'\varepsilon_1^{p'-1}} \int\limits_{D_b} \frac{|\Box\varphi_b|^{p'}}{\varphi_b^{p'-1}}\,dxdt - \mu\zeta_\varepsilon,$$

откуда при $\varepsilon_1 < |\lambda|p$ следует, что

$$\int\limits_{D_b} |u|^p\varphi_b\,dxdt \le \frac{p}{(|\lambda|p - \varepsilon_1)p'\varepsilon_1^{p'-1}} \int\limits_{D_b} \frac{|\Box\varphi_b|^{p'}}{\varphi_b^{p'-1}}\,dxdt - \frac{p\mu}{|\lambda|p - \varepsilon_1}\zeta_\varepsilon.$$

С учетом того, что $p' = \frac{p}{p-1}$, $p = \frac{p'}{p'-1}$ и $\min\limits_{0<\varepsilon_1<|\lambda|p} \frac{p}{(|\lambda|p-\varepsilon_1)p'\varepsilon_1^{p'-1}} = \frac{1}{|\lambda|^{p'}}$, где $\varepsilon_1 = |\lambda|$, из последнего неравенства вытекает, что

$$\int\limits_{D_b} |u|^p\varphi_b\,dxdt \le \frac{1}{|\lambda|^{p'}} \int\limits_{D_b} \frac{|\Box\varphi_b|^{p'}}{\varphi_b^{p'-1}}\,dxdt - \frac{\mu p'}{|\lambda|}\zeta_\varepsilon. \tag{6.23}$$

Поскольку $\varphi_b(x,t) := \varphi^0(x/b, t/b)$, в силу (6.17), (6.18) после замены переменных $x = bx_1$, $t = bt_1$, легко проверить, что

$$\int\limits_{D_b} \frac{|\Box\varphi_b|^{p'}}{\varphi_b^{p'-1}}\,dxdt = \frac{1}{b^{2(p'-1)}} \int\limits_{D_{T=1}} \frac{|\Box\varphi^0|^{p'}}{|\varphi^0|^{p'-1}} dx_1 dt_1 = \frac{\varkappa_0}{b^{2(p'-1)}} < +\infty. \tag{6.24}$$

Отсюда с учетом (6.19) из (6.23) получим

$$0 \le \int\limits_{D_b} |u|^p\varphi_b\,dxdt \le \frac{\varkappa_0}{|\lambda|^{p'} b^{2(p'-1)}} - \frac{\mu p'}{|\lambda|}\zeta_\varepsilon. \tag{6.25}$$

Ввиду (6.21) и (6.24) если

$$\mu > \mu_0 := \frac{\varkappa_0}{p'|\lambda|^{p'-1}b^{2(p'-1)}\zeta_\varepsilon},$$

то правая часть неравенства (6.25) отрицательна, в то время как левая часть этого неравенства неотрицательна. Полученное противоречие доказывает теорему 6.1.

Следствие 6.1. *Пусть $\lambda < 0$, $\alpha > 0$, $g \in C(\overline{D}_\infty)$, $g \geq 0$, $g \not\equiv 0$ и $g|_{B_\tau} = 0$ для некоторого $\tau \geq b$. Тогда найдется такое положительное число $\mu_0 = \mu_0(\lambda, \alpha, \tilde{k}, \tau, \varepsilon, g)$, что при $\mu > \mu_0$ и $f = \mu g$ задача* (1.1), (1.2) *не имеет глобального классического решения в области D_∞.*

Замечание 6.2. Как видно из доказательства, при выполнении условий теоремы 6.1 если существует решение $u \in C^2(\overline{D}_T)$ задачи (1.1), (1.2) в области D_T, то величина T заключена в интервале $(0, b)$, т. е. $0 < T < b$.

7. Локальная разрешимость задачи (1.1), (1.2) в случае $\lambda < 0$ и $\alpha > 0$

Как показано выше при $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, задача (1.1), (1.2) глобально, а тем самым и локально разрешима. При нарушении условия $\lambda > 0$ в силу теоремы 6.1 задача (1.1), (1.2) не всегда глобально разрешима, хотя, как покажем ниже, она остается локально разрешимой. Действительно, справедлива следующая теорема о локальной разрешимости.

Теорема 7.1. *Пусть $\lambda < 0$ и $\alpha > 0$, $f \in C(\overline{D}_\infty)$, $f \not\equiv 0$. Тогда найдется такое положительное число $T_* := T_*(f)$, что при $T \leq T_*$ задача* (1.1), (1.2) *в области D_T имеет хотя бы одно сильное обобщенное решение u класса C.*

Доказательство. В разд. 4 задача (3.1_λ), (3.2_λ) в пространстве $C(\overline{E}_T)$ эквивалентным образом была редуцирована к функциональному уравнению (4.3), т. е. уравнению

$$v = Av := \widetilde{L}_0^{-1}(-\lambda|v|^\alpha v + \tilde{f}), \tag{7.1}$$

где оператор $A : C(\overline{E}_T) \to C(\overline{E}_T)$, как отмечалось там же, непрерывен и компактен. Поэтому для разрешимости уравнения (7.1) согласно теореме Шаудера достаточно показать, что оператор A переводит некоторый шар $B_R := \{w \in C(\overline{E}_T) : \|w\|_{C(\overline{E}_T)} \leq R\}$ радиуса $R > 0$, который является замкнутым и выпуклым множеством в банаховом пространстве $C(\overline{G}_E)$, в себя. Покажем, что это имеет место при достаточно малых T.

Действительно, в силу (3.18) и (7.1) при $\|v\|_{C(\overline{G}_T)} \leq R$ имеем

$$\|Av\|_{C(\overline{E}_T)} \leq \big\|\widetilde{L}_0^{-1}\big\|_{C(\overline{E}_T)\to C(\overline{E}_T)}\big[|\lambda|\|v\|^{\alpha+1}_{C(\overline{E}_T)} + \|\tilde{f}\|_{C(\overline{E}_T)}\big]$$
$$\leq \frac{T^2}{1-k^2}[|\lambda|R^{\alpha+1} + \|\tilde{f}\|_{C(\overline{E}_T)}], \tag{7.2}$$

где k определено в (3.4).

Зафиксируем произвольным образом положительное число T_1. Тогда в силу оценки (7.2) при $0 < T \leq T_1$ получим

$$\|Av\|_{C(\overline{E}_T)} \leq \frac{T^2}{1-k^2}[|\lambda|R^{\alpha+1} + \|\tilde{f}\|_{C(\overline{E}_{T_1})}].$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что если $T_*^2 := \min\big\{T_1^2, \frac{(1-k^2)R}{|\lambda|R^{\alpha+1}+\|\tilde{f}\|_{C(\overline{E}_{T_1})}}\big\}$, то $\|Av\|_{C(\overline{E}_T)} \leq R$ при $\|v\|_{C(\overline{E}_T)} \leq R$, $0 < T \leq T_*$. Этим теорема 7.1 доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гурса Э.* Курс математического анализа. М.: ГТТИ, 1933. Т. 3, ч. I.

2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

3. *Kharibegashvili S.* Goursat and Darboux type problems for linear hyperbolic partial differential equations and systems // Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 1995. V. 4. P. 1–127.

4. *Моисеев Е. И.* О приближении классического решения задачи Дарбу гладкими решениями // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 1. С. 73–87.

5. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995.

6. *Берикелашвили Г. К., Джохадзе О. М., Мидодашвили Б. Г., Харибегашвили С. С.* О существовании и отсутствии глобальных решений первой задачи Дарбу для нелинейных волновых уравнений // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 3. С. 359–372.

7. *Джохадзе О. М., Харибегашвили С. С.* О первой задаче Дарбу для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 5. С. 693–712.

8. *Jokhadze O.* On existence and nonexistence of global solutions of Cauchy–Goursat problem for nonlinear wave equations // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 340. P. 1033–1045.

9. *Jokhadze O., Midodashvili B.* The first Darboux problem for nonlinear wave equations with a nonlinear positive source term // Nonlinear Anal. 2008. V. 69. P. 3005–3015.

10. *Kharibegashvili S.* Boundary value problems for some classes of nonlinear wave equations // Mem. Differ. Equ. Math. Phys. 2009. V. 46. P. 1–114.

11. *Jokhadze O.* The Cauchy–Goursat problem for one-dimensional semilinear wave equations // Commun. Partial Differ. Equations. 2009. V. 34, Issue 4. P. 367–382.

12. *Berikelashvili G., Jokhadze O., Midodashvili B., Kharibegashvili S.* Finite difference solution of a nonlinear Klein–Gordon equation with an external source // Math. Comput. 2011. V. 80, N 274. P. 847–862.

13. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.

14. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971.

15. *Гильбарг Д., Трудингер Н. С.* Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка. М.: Мир, 1989.

16. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1993.

17. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

18. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.

19. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2001. Т. 234. С. 1–383.

Статья поступила 31 июля 2012 г.

Харибегашвили Сергей Сергеевич
Грузинский технический университет, кафедра высшей математики,
ул. Костава, 77, Тбилиси 0175, Грузия
kharibegashvili@yahoo.com

Джохадзе Отар Михайлович
Тбилисский гос. университет им. И. Джавахишвили,
кафедра дифференциальных уравнений,
ул. Университетская, 2, Тбилиси 0143, Грузия
ojokhadze@yahoo.com