Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 517.958

ИЕРАРХИЯ ПОДМОДЕЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. В. Хабиров

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений, допускающая группу преобразований. По алгебре Ли этой группы можно построить иерархию подмоделей. Эту иерархию можно выбрать так, что решения любой подмодели будут решениями некоторой другой подмодели этой же иерархии. Для этого надо вычислить оптимальную систему подалгебр и построить граф вложенных подалгебр, а затем вычислить дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования для каждой подалгебры. Инварианты надалгебры будут функциями инвариантов подалгебры. Операторы инвариантного дифференцирования надалгебры линейно выражаются через операторы инвариантного дифференцирования подалгебры над полем инвариантов подалгебры. Сравнение представлений групповых решений дает связь между решениями подмоделей надалгебры и подалгебры. Приведены примеры вложенных подмоделей для уравнений газовой динамики.

Ключевые слова: дифференциально инвариантные подмодели, иерархия подмоделей, газовая динамика.

Введение

Система дифференциальных уравнений, связанная с приложениями (модель), всегда допускает группу преобразований. В групповом анализе дифференциальных уравнений [1] эта группа используется для нахождения точных решений и классификации точных решений (редукции системы). В абстрактном виде классификацию редукций задает оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли, соответствующей допускаемой группе преобразований [2]. По каждой подалгебре можно построить подмодель, которая связывает лишь инварианты подалгебры и поэтому имеет меньшее число переменных. Если инварианты точечные, то получаются инвариантные и частично инвариантные подмодели [3]. Для подалгебры большой размерности точечных инвариантов не хватает для конструктивного построения подмодели, поэтому привлекаются базис дифференциальных инвариантов и операторы инвариантного дифференцирования для построения дифференциально инвариантных подмоделей [4].

Подмодель, построенная по подалгебре, допускает фактор нормализатора этой подалгебры, что позволяет строить подмодели следующего уровня. Получается иерархия подмоделей [5]. Но иерархия подмоделей строится не только

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11–01–00026–а, 11–01–00147–а, 12–01–00648), Федерального агентства по науке и инновациям РФ (код проекта НШ–6706.2012.1), а также гранта № 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению № 220.

© 2013 Хабиров С. В.

по нормализаторам. Если взять две подалгебры, одна из которых — подалгебра другой, вторая — надалгебра первой, то их инварианты можно выбрать так, что решение любой подмодели надалгебры будет решением некоторой подмодели подалгебры. Это относится к любым подмоделям: инвариантным, частично инвариантным или дифференциально инвариантным.

Такое вложение показано на примере графа вложенных подалгебр одной самонормализованной пятимерной подалгебры, допускаемой уравнениями газовой динамики.

Подмодели задаются системами уравнений, которые проще исходной потому, что содержат меньшее число переменных, но в то же время более сложные, так как появляются дополнительные нелинейности. Предлагаемая иерархия подмоделей позволяет находить точные решения подмоделей регулярным образом.

Кроме того, предлагаемая идеология дает возможность находить новые решения у моделей, вкладывая их в объемлющие модели (например, с большим числом независимых переменных) с расширенной группой симметрий.

Из сказанного следует, что оптимальная система нужна для построения графа вложенных подалгебр. Представить граф в целом сложно. Он представляется фрагментами с использованием преобразований внутренних автоморфизмов алгебры для выделения нужного представителя из класса подобных.

1. Дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования

Пусть система дифференциальных уравнений E (модель) с m искомыми функциями $u \in R^m$ от n независимых переменных $x \in \mathbb{R}^n$ допускает в смысле Ли локальную группу Ли преобразований G. Группе G соответствует алгебра Ли L операторов дифференцирования первого порядка [1]. Каждой подалгебре $H \subset L$ может соответствовать множество решений системы E, которое называется *подмоделью.* В зависимости от того, какие инварианты имеет подалгебра H, подмодели бывают разных типов. Инварианты могут быть точечными $J^0(x,u)$ и дифференциальными $J^i(x,u,u_1,u_2,\ldots,u_i)$, где u_i — производные порядка i. Для их вычисления надо продолжить базисные операторы X_α подалгебры H на производные и найти полный набор функционально независимых решений переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка $X_\alpha I = 0$. Существует конечный базис дифференциальных инвариантов, из которого все дифференциальные инварианты получаются действием n операторами инвариантного дифференцирования Y_i и взятием функций от них [1].

Лемма 1 (о последовательном вычислении инвариантов подалгебры). *Дифференциальные инварианты подалгебры можно вычислить последовательно, на каждом шаге вычисляя инварианты одного оператора, не приводя систему операторов к полной абелевой системе.*

Доказательство. Пусть подалгебра H задается базисом $X_1,\ldots,X_k$ (порядок операторов неважен). Уравнение $X_1 I = 0$ имеет полный набор функционально независимых интегралов (инвариантов) $I_1,\ldots,I_{n+m-1}$. Вводятся новые переменные $x^1, I_1,\ldots,I_{n+m-1}$, где $X_1 x^1 \neq 0$. Базисные операторы принимают вид $X_1 = (X_1 x^1)\partial_{x^1}$, $X_2 = (X_2 x^1)\partial_{x^1} + F_{2j}(x^1, I)\partial_{I_j}$, ..., где $F_{2j} = X_2 I_j,\ldots$. Уравнения для нахождения инвариантов принимают вид $I_{x^1} = 0$, $F_{2j} I_{I_j} = 0,\ldots$

Здесь x^1 — свободный параметр, от которого I не зависит. Значит, можно расщепить уравнения по переменной x^1, т. е. приравнять нулю коэффициенты при линейно независимых функциях от x^1. Получится не более $k-1$ линейно не связных уравнений. Их не может быть больше, иначе подалгебра H имела бы большую размерность. Индуктивный переход доказан. Далее надо взять один из оставшихся операторов, записанный в инвариантах первого, и вычислить у него инварианты, записать другие операторы через инварианты выбранного, расщепить по свободной переменной и т. д. Если исходные операторы линейно связные, последний оператор тождественно равен нулю.

При непосредственном вычислении инвариантов порядок выбора операторов играет существенную роль из-за того, что приходится находить интегралы — инварианты, решая системы обыкновенных дифференциальных уравнений, но это предполагает некоторое искусство и не всегда интеграл можно записать явно через элементарные функции.

Лемма 2 (о вычислении операторов инвариантного дифференцирования). *Операторы инвариантного дифференцирования* (ОИД) *подалгебры H могут быть найдены с помощью дифференциальных инвариантов достаточно высокого* (*но конечного*) *порядка.*

Доказательство. Пусть $I_1(x), \dots, I_{k_1}(x)$; $J_1^0(x,u), \dots, J_l^0(x,u)$; $J_1^1(x,u,u_1)$, $\dots, J_{l_1}^1(x,u,u_1), \dots$ — полный набор дифференциальных инвариантов подалгебры H. Существует базис дифференциальных инвариантов $J_b^0(x,u)$, $J_b^1(x,u,u_1)$, $\dots, J_b^k(x,u,u_1,\dots,u_k)$, из которого все остальные инварианты получаются с помощью ОИД и функциональных операций [1, § 3]. Для вычисления ОИД надо взять дифференциальный инвариант, не входящий в базис возможно меньшего порядка, и представить его как действие ОИД на инвариант из базиса. Тогда для ОИД Y_j получаются тождества $Y_j J_b^0(x,u) = J^1(x,u,u_1)$, $Y_j J_b^1(x,u,u_1) = J^2(x,u,u_1,u_2), \dots$. Из теоремы о существовании базиса следует, что Y_j обязательно найдутся с точностью до линейной комбинации над полем инвариантов, порожденным базисом.

Лемма 3 (об инвариантах надалгебры). *Инварианты надалгебры суть функции инвариантов подалгебры.*

Доказательство. Базис операторов подалгебры дополняется до базиса операторов надалгебры. Сначала вычисляются инварианты подалгебры. В новых переменных из инвариантов подалгебры и неинвариантных свободных переменных (замена переменных) записываются уравнения для инвариантов надалгебры (лемма 1). Ранг матрицы из коэффициентов уравнений для инвариантов подалгебры, записанных в новых переменных, равен числу линейно не связных операторов подалгебры. Значит, инварианты надалгебры не зависят от свободных переменных. После расщепления по свободным переменным получим уравнения для инвариантов надалгебры, записанные только через переменные — инварианты подалгебры. Отсюда следует, что инварианты надалгебры суть функции инвариантов подалгебры.

Лемма 4 (об операторах инвариантного дифференцирования надалгебры). ОИД *надалгебры есть линейная комбинация* ОИД *подалгебры над полем инвариантов подалгебры.*

Доказательство. Пусть базис инвариантов подалгебры имеет порядок инвариантов не более чем k, а базис инвариантов надалгебры — не более чем

$\bar{k} \geq k$. Тогда справедливы тождества с операторами инвариантного дифференцирования $Y_j J^{\bar{k}} = J^{\bar{k}+1}(x, u, u_1, \dots, u^{\bar{k}+1})$ — линейными функциями производных $u^{\bar{k}+1}$, $\overline{Y}_j \overline{J}^{\bar{k}} = \overline{J}^{\bar{k}+1}(x, u, u_1, \dots, u^{\bar{k}+1})$ — линейными функциями производных $u^{\bar{k}+1}$. По лемме 3 $\overline{J}^{\bar{k}} = \Phi(J^0, \dots, J^{\bar{k}})$, $\overline{J}^{\bar{k}+1} = \Psi(J^0, \dots, J^{\bar{k}+1})$. В силу предыдущих равенств получаем тождество $\Phi_{J^{\bar{k}}} \overline{Y}_j J^{\bar{k}} + \dots = \Psi(J^0, \dots, J^{\bar{k}}, Y_j J^{\bar{k}})$. Отсюда следует, что функция Ψ линейна по $J^{\bar{k}+1}$, а коэффициенты этой зависимости будут функциями инвариантов подалгебры по лемме 3. Тождества выполняются для любого инварианта из наборов J^l, $l \geq \bar{k}$, а ОИД действует только на инвариантах по одному и тому же правилу. Значит, операторы $\overline{Y}_j$ будут линейными комбинациями операторов Y_j над полем инвариантов подалгебры.

2. Дифференциально инвариантные подмодели

Базис дифференциальных инвариантов подалгебры H представляется в следующем виде: $I(x) = (I_1, \dots, I_k)$ — функционально независимые инварианты, зависящие от x; $J^0 = \left(J^0_1, \dots, J^0_{l_0}\right)$ — функционально независимые инварианты, зависящие от x, u; $J^i = \left(J^i_1, \dots, J^i_{l_i}\right)$, $i = 1, \dots, p$, — функционально независимые инварианты i-го порядка, зависящие от $x, u, u_1, \dots, u_i$ (сюда не входят инварианты, полученные из инвариантов меньшего порядка действием операторами инвариантного дифференцирования). Инварианты I, J^0 — инварианты нулевого порядка. Для любой подалгебры число p конечно [1]. ОИД Y_j, $j = 1, \dots, n$, задают все возможные инварианты порядка p: $Y_{j_1} \dots Y_{j_p} J^0$, $Y_{j_1} \dots Y_{j_{p-1}} J^1, \dots, J^p$ (здесь p — любое неотрицательное целое число).

По теореме о представлении инвариантного многообразия [1] система E записывается через дифференциальные инварианты, тем самым определяются независимые дифференциальные инварианты базиса.

Определение [4]. *Дифференциально инвариантной подмоделью* (ДИП) ранга $r + r_1$ называется представление системы E как $(r + r_1)$-мерного многообразия в пространстве всех дифференциальных инвариантов, проекция которого в пространство инвариантов нулевого порядка есть r-мерное многообразие.

Если $r + r_1 = k$, то происходит редукция к инвариантным подмоделям.

Если $r + r_1 > k$, то возникает переопределенная система уравнений, которую можно разбить на две подсистемы. Первая подсистема получается после действия ОИД Y_j на $r + r_1 - k$ независимых дифференциальных инвариантов базиса и приравнивания результата новым функциям ψ от $r + r_1$ переменных-инвариантов. Так как операторы Y_j образуют алгебру Ли дифференцирований со структурными постоянными, зависящими от базисных инвариантов, условия совместности задают переопределенную систему в инволюции на функции ψ. Общее решение этой системы задает представление решения исходной системы E.

Вторая подсистема определяется тем, что некоторые дифференциальные инварианты связаны исходной системой E. После подстановки представления решения и изучения совместности получается дифференциально инвариантная подмодель.

Если $r = k$ (инварианты J^0 зависят только от I), а r_1 равно числу независимых дифференциальных инвариантов, то получается регулярная частично инвариантная подмодель (РЧИП). Нерегулярная частично инвариантная подмодель (НЧИП) получается, когда $J^0 = (J^0)' \cup (J^0)''$ и инварианты $(J^0)''$ зависят от $I, (J^0)'$, а r_1 равно числу независимых дифференциальных инвариантов порядка, большего нуля. Число $r - k$ есть дефект инвариантности [3]. Если у представления $J^0(I)$ определяются все m функций, то получается инвариантная подмодель (ИП).

Таким образом, ДИП может быть подмоделью РЧИП или НЧИП, когда дифференциальные инварианты порядка, большего нуля, суть функции общего вида, т. е. зависят от n переменных.

3. Основная теорема

Теорема 1 (о вложении подмодели надалгебры в подмодель подалгебры). *Пусть подалгебра вложена в надалгебру большей размерности. Любая* ДИП *надалгебры задает семейство точных решений некоторой* ДИП *подалгебры. Для определения точных решений* ДИП *подалгебры надо получить представление решения* ДИП *подалгебры из представления решения* ДИП *надалгебры.*

Доказательство. Пусть $H \subset \overline{H}$, H — подалгебра, $\overline{H}$ — надалгебра. Дифференциальные инварианты подалгебры H таковы: $I(x)$, $J^0(x,u)$, $J^i(x,u,u_1,\dots,u_i)$, $i = 1,\dots,p$; операторы инвариантного дифференцирования суть Y_j, $j = 1,\dots,n$. В силу лемм 1–4 дифференциальные инварианты надалгебры $\overline{H}$ представляются в виде $\overline{I}(I)$, $\overline{J}^0(I,J^0)$, $\overline{J}^i(I,J^0,\dots,J^i)$, а операторы инвариантного дифференцирования — в виде $\overline{Y}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} g_{ji}(I,J^0,J^i)Y_i$. ДИП ранга $\bar r + \bar r_1$ надалгебры имеет параметрическое представление вида $\bar\alpha = (\bar\alpha', \bar\alpha'') \in R^{\bar r + \bar r_1}$, $\alpha' = (\overline{I}, (\overline{J}^0)')$, $\overline{J}^0 = (\overline{J}^0)' \cup (\overline{J}^0)''$, $\dim(\overline{I} \cup (\overline{J}^0)') = \bar r$, $(\overline{J}^0)'' = \overline{\Psi}(\bar\alpha')$, $\overline{J}^i = \bar\xi(\bar\alpha)$. Это представление можно записать через инварианты подалгебры H: $(\overline{J}^0)''(I,J^0) = \overline{\Psi}(\overline{I}(I), (\overline{J}^0)'(I,J^0))$, $\overline{J}^i(I,J^0,J^i) = \bar\xi(\overline{I}(I), (\overline{J}^0)'(I,J^0), \bar\alpha''(I,J^0,J^i))$. Отсюда определяется представление ДИП подалгебры H: $(J^0)'' = \Psi(I,(J^0)') = \Psi(\alpha')$, $\dim(I,(J^0)') = r \geq \bar r$, $J^i = \xi(I,(J^0)',\alpha'')$, $\dim(\alpha'') = r_1 \geq \bar r_1$. Так как ОИД надалгебры линейно выражаются через ОИД подалгебры, новые инвариантные функции $\overline{\Psi}$ для надалгебры и инвариантные функции для подалгебры Ψ удовлетворяют системам одного типа (условие алгебры для ОИД), но с разным числом независимых переменных. Для надалгебры число переменных должно быть меньше. Итак, по представлению ДИП надалгебры определяется представление ДИП подалгебры, и, следовательно, решения первой подмодели могут быть решениями второй подмодели.

Построение вложенной подмодели по надалгебре отличается от построения вложенной подмодели по фактору нормализатора. Переменные — инварианты подмоделей должны быть согласованы, а именно переменные — инварианты надалгебры должны быть функциями переменных — инвариантов подалгебры; групповой природы здесь нет. Для нормализатора такое соответствие получается за счет индуцированного действия фактора нормализатора на подмодели подалгебры (групповая основа).

4. Примеры построения вложенных подмоделей

Для построения иерархии подмоделей надо сначала построить оптимальную систему неподобных подалгебр алгебры Ли [2], далее представить граф вложенных друг в друга подалгебр с учетом подобия в классе подобных подалгебр. Для каждой ветки графи можно построить вложенные подмодели. Возможность такого вложения для инвариантных подмоделей и только по нормализатору подалгебры была доказана в работе [5], а для частично инвариантных подмоделей — в [6]. Теорема 1 утверждает большее: например, существование вложенных подмоделей для подмоделей самонормализованной подалгебры.

Групповой анализ наиболее продвинут для уравнений газовой динамики (УГД) [7]. На примере этой модели с общим уравнением состояния строится иерархия подмоделей на графе вложенных подалгебр самонормализованной пятимерной подалгебры из оптимальной системы в [8].

Модель УГД записывается в координатах, связанных с декартовыми по формулам $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, $v = q\cos\sigma$, $w = q\sin\sigma$:

$$u_t + uu_x + qY_1u + \rho^{-1}p_x = 0, \quad q_t + uq_x + qY_1q + \rho^{-1}Y_1p = 0,$$
$$q(\sigma_t + u\sigma_x + qY_1\sigma) + \rho^{-1}Y_2p = 0,$$
$$\rho_t + u\rho_x + qY_1\rho + \rho(u_x + Y_1q + qY_2\sigma) = 0, \quad S_t + uS_x + qY_1S = 0,$$

где x, y, z — декартовы координаты частицы, u, v, w — декартовы координаты скорости частицы, давление определяется из уравнения состояния $p = f(\rho, S)$, ρ — плотность, S — энтропия, $Y_1 = \cos\sigma D_y + \sin\sigma D_z = \cos(\sigma-\theta)D_r + r^{-1}\sin(\sigma-\theta)D_\theta$, $Y_2 = -\sin\sigma D_y + \cos\sigma D_z = -\sin(\sigma-\theta)D_r + r^{-1}\cos(\sigma-\theta)D_\theta$. Модель УГД допускает 11-мерную алгебру Ли [8]. Рассматривается пятимерная самонормализованная подалгебра с базисом (обозначения взяты из [8]):

$$X_2 = \partial_y = \cos\theta\partial_r - r^{-1}\sin\theta\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_z = \sin\theta\partial_r + r^{-1}\cos\theta\partial_\theta,$$
$$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v = \partial_\theta + \partial_\sigma, \quad X_{10} = \partial_t,$$
$$X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r.$$

Оптимальная система [8] позволяет построить граф вложенных подалгебр (операторы изображены своими индексами, $a \neq 0$, рис. 1).

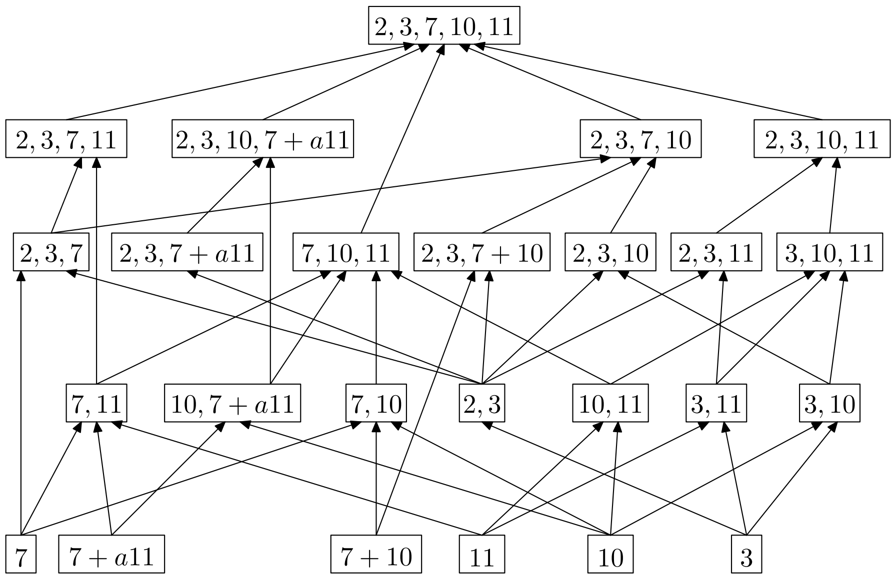

Рис. 1. Граф вложенных подалгебр.

Дифференциальные инварианты (ДИ) и операторы инвариантного дифференцирования (ОИД) для подалгебр из графа вычисляются согласно леммам 1–4. Результаты вычислений сведены в таблицу, в которой сначала записаны базисные операторы подалгебры с помощью своих номеров, затем ДИ (общие для всех подалгебр инварианты ρ, S не записаны), наконец, выписана ОИД:

$$7; \quad t, x, r, u, q, \sigma - \theta; \quad D_t, D_x, D_r, D_\theta.$$

$$10; \quad x, y, z, u, v, w; \quad D_t, D_x, D_y, D_z.$$

$$7 + 10; \quad x, r, \theta - t, u, q, \sigma - \theta; \quad D_t, D_x, Y_1, Y_2.$$

$$7 + a11; \quad xt^{-1}, rt^{-1}, \theta - a^{-1} \ln |t|, u, q, \sigma - a^{-1} \ln |t|; \quad tD_t, tD_x, tD_r, D_\theta.$$

$$11; \quad xt^{-1}, yt^{-1}, zt^{-1}, u, v, w; \quad tD_t, tD_x, tD_y, tD_z.$$

$$3; \quad t, x, y, u, v, w; \quad D_t, D_x, D_y, D_z.$$

$$3, 10; \quad x, y, u, v, w; \quad D_t, D_x, D_y, D_z.$$

$$3, 11; \quad xt^{-1}, yt^{-1}, u, v, w; \quad tD_t, tD_x, tD_y, tD_z.$$

$$10, 11; \quad xr^{-1}, \theta, u, q, \sigma - \theta; \quad rD_t, rD_x, rD_r, D_\theta.$$

$$7, 10; \quad x, r, , u, q, \sigma - \theta; \quad D_t, D_x, D_r, D_\theta.$$

$$7, 11; \quad xt^{-1}, rt^{-1}, u, q, \sigma - \theta; \quad tD_t, tD_x, tD_r, D_\theta.$$

$$10, 7 + a11; \quad xe^{-a\theta}, re^{-a\theta}, u, q, \sigma - \theta; \quad rD_t, rD_x, rD_r, D_\theta.$$

$$2, 3, 10; \quad x, u, v, w; \quad D_t, D_x, D_y, D_z.$$

$$2, 3, 11; \quad xt^{-1}, u, v, w; \quad tD_t, tD_x, tD_y, tD_z.$$

$$3, 10, 11; \quad xy^{-1}, u, v, w; \quad yD_t, yD_x, yD_y, yD_z.$$

$$2, 3, 7; \quad t, x, u, q, \sigma_t, \sigma_x, Y_1\sigma, Y_2\sigma; \quad D_t, D_x, Y_1, Y_2.$$

$$2, 3, 7 + a11; \quad xt^{-1}, u, q, \sigma - a^{-1} \ln |t|; \quad tD_t, tD_x, tD_r, D_\theta.$$

$$7, 10, 11; \quad xr^{-1}, u, q, \sigma - \theta; \quad rD_t, rD_x, rD_r, D_\theta.$$

$$2, 3, 7 + 10; \quad x, u, q, \sigma - t; \quad D_t, D_x, Y_1, Y_2.$$

$$2, 3, 7, 10; \quad x, u, q, \sigma_t, \sigma_x, Y_1\sigma, Y_2\sigma; \quad D_t, D_x, Y_1, Y_2.$$

$$2, 3, 7, 11; \quad xt^{-1}, u, q, \sigma_t, \sigma_x, Y_1\sigma, Y_2\sigma; \quad D_t, D_x, Y_1, Y_2.$$

$$2, 3, 10, 11; \quad u, v, w; \quad D_t, D_x, D_y, D_z.$$

$$2, 3, 10, 7 + a11; \quad u, q, \sigma - a^{-1} \ln |x|; \quad xD_t, xD_x, xD_r, D_\theta.$$

$$2, 3, 7, 10, 11; \quad u, q, \sigma_t, \sigma_x, Y_1\sigma, Y_2\sigma; \quad D_t, D_x, Y_1, Y_2.$$

Рассматриваются подмодели (ИП, ЧИП, ДИП) подалгебр из графа.

Для подалгебры 7 представление инвариантного решения таково: величины $\vartheta = \sigma - \theta$, u, q, ρ, S зависят от t, x, r. УГД дают подмодель ИП(7) вращательных симметричных движений:

$$u_t + uu_x + q \cos\vartheta u_r + \rho^{-1} p_x = 0, \quad q_t + uq_x + q \cos\vartheta q_r + \rho^{-1} \cos\vartheta p_r = 0,$$

$$\rho q[\vartheta_t + u\vartheta_x + q(\cos\vartheta \vartheta_r - r^{-1} \sin\vartheta)] - \sin\vartheta p_r = 0,$$

$$\rho_t + u\rho_x + q \cos\vartheta \rho_r + \rho[u_x + \cos\vartheta q_r + q(-\sin\vartheta \vartheta_r + r^{-1} \cos\vartheta)] = 0,$$

$$S_t + uS_x + q \cos\vartheta S_r = 0.$$

При $\vartheta = 0$ получается подмодель осесимметричных движений.

Для подалгебры 10 получается подмодель ИП(10) стационарных течений, в которой все функции не зависят от времени t.

Подалгебра 7+10 задает ИП(7+10) вращательных движений с представлением решения: функции u, q, $\vartheta = \sigma - \theta$, ρ, S зависят от x, r, $\phi = \theta - t$,

$$-u_\phi + uu_x + qY_1u + \rho^{-1}p_x = 0, \quad -q_\phi + uq_x + qY_1q + \rho^{-1}Y_1p = 0,$$

$$\rho q[-\vartheta_\phi + u\vartheta_x + q(Y_1\vartheta + r^{-1}\sin\vartheta)] + \rho^{-1}Y_2p = 0,$$

$$-\rho_\phi + u\rho_x + qY_1\rho + \rho[u_x + Y_1q + q(Y_2\vartheta + r^{-1}\cos\vartheta)] = 0,$$

$$-S_\phi + uS_x + qY_1S = 0,$$

где $Y_1 = \cos\vartheta\partial_r + r^{-1}\sin\vartheta\partial_\phi$, $Y_2 = -\sin\vartheta\partial_r + r^{-1}\cos\vartheta\partial_\phi$.

Подалгебра $7 + a11$, $a \neq 0$, задает ИП($7 + a11$) с коническими спиральными линиями уровня с представлением решения: функции u, q, $\vartheta = \sigma - \theta$, ρ, S зависят от $x_1 = xt^{-1}$, $r_1 = rt^{-1}$, $\theta_1 = \theta - a^{-1}\ln|t|$,

$$(u - x_1)u_{x_1} - a^{-1}u_{\theta_1} + qY_1u + \rho^{-1}p_{x_1} = 0,$$

$$(u - x_1)q_{x_1} - a^{-1}q_{\theta_1} + qY_1q + \rho^{-1}Y_1p = 0,$$

$$\rho q\big[(u - x_1)\vartheta_{x_1} - a^{-1}\vartheta_{\theta_1} + q\big(Y_1\vartheta + r_1^{-1}\sin\vartheta\big)\big] + Y_2p = 0,$$

$$(u - x_1)\rho_{x_1} - a^{-1}\rho_{\theta_1} + qY_1\rho + \rho\big[u_{x_1} + Y_1q + q\big(Y_2\vartheta + r_1^{-1}\cos\vartheta\big)\big] = 0,$$

$$(u - x_1)S_{x_1} - a^{-1}S_{\theta_1} + qY_1S = 0,$$

где $Y_1 = \cos\vartheta\partial_{r_1} + r_1^{-1}\sin\vartheta\partial_{\theta_1}$, $Y_2 = -\sin\vartheta\partial_{r_1} + r_1^{-1}\cos\vartheta\partial_{\theta_1}$.

Подалгебра 11 задает ИП(11) конических движений с представлением решения: функции u, q, σ, ρ, S зависят от $x_1 = xt^{-1}$, $r_1 = rt^{-1}$, θ,

$$(u - x_1)u_{x_1} - r_1u_{r_1} + qY_1u + \rho^{-1}p_{x_1} = 0,$$

$$(u - x_1)q_{x_1} - r_1q_{r_1} + qY_1q + \rho^{-1}Y_1p = 0,$$

$$\rho q[(u - x_1)\sigma_{x_1} - r_1\sigma_{r_1} + qY_1\sigma] + Y_2p = 0,$$

$$(u - x_1)\rho_{x_1} - r_1\rho_{r_1} + qY_1\rho + \rho(u_{x_1} + Y_1q + qY_2\sigma) = 0,$$

$$(u - x_1)S_{x_1} - r_1S_{r_1} + qY_1S = 0,$$

где $Y_1 = \cos(\vartheta - \theta)\partial_{r_1} + r_1^{-1}\sin(\vartheta - \theta)\partial_\theta$, $Y_2 = -\sin(\vartheta - \theta)\partial_{r_1} + r_1^{-1}\cos(\vartheta - \theta)\partial_\theta$.

Подалгебра 3 задает ИП(3) плоских движений с представлением решения: функции u, q, σ, ρ, S зависят от t, x, y,

$$u_t + uu_x + q\cos\sigma u_y + \rho^{-1}p_x = 0, \quad q_t + uq_x + q\cos\sigma q_y + \rho^{-1}\cos\sigma p_y = 0,$$

$$\rho q(\sigma_t + u\sigma_x + q\cos\sigma\sigma_y) - \rho^{-1}\sin\sigma p_y = 0,$$

$$\rho_t + u\rho_x + q\cos\sigma\rho_y + \rho(u_x + \cos\sigma q_y - q\sin\sigma\sigma_y) = 0,$$

$$S_t + uS_x + q\cos\sigma S_y = 0.$$

Полученные инвариантные подмодели имеют множество точных решений, удовлетворяющих более простым системам уравнений. Для их получения рассматривается надалгебра той подалгебры, по которой строилась подмодель, и сравниваются представления решений подалгебры и надалгебры.

Подалгебра 3,10 является надалгеброй подалгебр 3 и 10. Представление инвариантного решения надалгебры: функции u, q, σ, ρ, S зависят от x, y.

ИП(3,10) плоских установившихся движений очевидно задает точные решения ИП(10) стационарных течений и ИП(3) плоских движений.

Подалгебра 3,11 — надалгебра подалгебр 3 и 11. Представление инвариантного решения надалгебры: функции u, q, σ, ρ, S зависят от $x_1 = xt^{-1}$, $y_1 = yt^{-1}$. Так как подалгебра 3 — идеал надалгебры 3,11, то ИП(3) допускает оператор X_{11} [1] и поэтому ИП(3,11) есть подмодель ИП(3) [5]:

$$(u - x_1)u_{x_1} - y_1 u_{y_1} + q\cos\sigma u_{y_1} + \rho^{-1}p_{x_1} = 0,$$
$$(u - x_1)q_{x_1} - y_1 q_{y_1} + q\cos\sigma q_{y_1} + \rho^{-1}\cos\sigma p_{y_1} = 0,$$
$$\rho q[(u - x_1)\sigma_{x_1} - y_1\sigma_{y_1} + q\cos\sigma\sigma_{y_1}) - \rho^{-1}\sin\sigma p_{y_1} = 0,$$
$$(u - x_1)\rho_{x_1} - y_1\rho_{y_1} + q\cos\sigma\rho_{y_1} + \rho(u_{x_1} + \cos\sigma q_{y_1} - q\sin\sigma\sigma_{y_1}) = 0,$$
$$(u - x_1)S_{x_1} - y_1 S_{y_1} + q\cos\sigma S_{y_1} = 0.$$

ИП(3,11) задает также точные решения ИП(11), если записать ее в переменных $y_1 = yt^{-1}$, $z_1 = zt^{-1}$.

Подалгебра 10,11 есть надалгебра подалгебры 11 и идеала 10. Представление инвариантного решения надалгебры: функции u, q, σ, ρ, S зависят от $x_2 = xr^{-1}$, θ. Стационарная ИП(10) допускает оператор X_{11}, поэтому ИП(10,11) есть подмодель ИП(10):

$$uu_{x_2} + qY_1u + \rho^{-1}p_{x_2} = 0, \quad uq_{x_2} + qY_1q + \rho^{-1}Y_1p = 0, \quad \rho q(u\sigma_{x_2} + qY_1\sigma) + Y_2p = 0,$$
$$u\rho_{x_2} + qY_1\rho + \rho(u_{x_2} + Y_1q + qY_2\sigma) = 0, \quad uS_{x_2} + qY_1S = 0,$$

где $Y_1 = -x_2\cos(\sigma - \theta)\partial_{x_2} + \sin(\sigma - \theta)\partial_\theta$, $Y_2 = x_2\sin(\sigma - \theta)\partial_{x_2} + \cos(\sigma - \theta)\partial_\theta$.

ИП(10,11) задает также точные решения ИП(11), если сделать замену переменных $x_2 = x_1 r_1^{-1}$, которая следует из сравнения инвариантов.

Абелева подалгебра 7,10 есть надалгебра идеалов 7, 7+10, 10, поэтому ИП(7,10) с представлением решения: u, q, $\vartheta = \sigma - \theta$, ρ, S — функции переменных x, r,

$$uu_x + q\cos\vartheta u_r + \rho^{-1}p_x = 0, \quad uq_x + q\cos\vartheta q_r + \rho^{-1}\cos\vartheta p_r = 0,$$
$$\rho q(u\vartheta_x + q\cos\vartheta\vartheta_r) - \sin\vartheta p_r = 0,$$
$$u\rho_x + q\cos\vartheta\rho_r + \rho(u_x + \cos\vartheta q_r - q\sin\vartheta\vartheta_r) = 0, \quad uS_x + q\cos\vartheta S_r = 0$$

является подмоделью для ИП(7), ИП(7+10), ИП(10).

Абелева подалгебра 7,11 — надалгебра идеалов 7, $7 + a11$, 11 — задает представление: u, q, $\vartheta = \sigma - \theta$, ρ, S — функции переменных $x_1 = xt^{-1}$, $r_1 = rt^{-1}$. ИП(7,11) есть подмодель для ИП(7), ИП(7+10), ИП(11):

$$(u - x_1)u_{x_1} - r_1u_{r_1} + q\cos\vartheta u_{r_1} + \rho^{-1}p_{x_1} = 0,$$
$$(u - x_1)q_{x_1} - r_1q_{r_1} + q\cos\vartheta q_{r_1} + \rho^{-1}\cos\vartheta p_{r_1} = 0,$$
$$\rho q\big[(u - x_1)\vartheta_{x_1} - r_1\vartheta_{r_1} + q\big(\cos\vartheta\vartheta_{r_1} + r_1^{-1}\sin\vartheta\big)\big] - \sin\vartheta p_{r_1} = 0,$$
$$(u - x_1)\rho_x - r_1\rho_{r_1} + q\cos\vartheta\rho_{r_1} + \rho\big(u_{x_1} + \cos\vartheta q_{r_1} - q\sin\vartheta\vartheta_{r_1} + r_1^{-1}q\cos\vartheta\big) = 0,$$
$$(u - x_1)S_{x_1} - r_1S_{r_1} + q\cos\vartheta S_{r_1} = 0.$$

Подалгебра $10, 7 + a11$ — надалгебра своего идеала 10 и подалгебры $7 + a11$. Представление инвариантного решения: u, q, $\vartheta = \sigma - \theta$, ρ, S — функции переменных $x_2 = xe^{-a\theta}$, $r_2 = re^{-a\theta}$ — задает ИП$(10, 7 + a11)$:

$$uu_{x_2} + q\overline{Y}_1u + \rho^{-1}p_{x_2} = 0, \quad uq_{x_2} + q\overline{Y}_1q + \rho^{-1}\overline{Y}_1p = 0,$$

$$\rho q\big[u\vartheta_{x_2} + q\big(\overline{Y}_1\vartheta + r_2^{-1}\sin\vartheta\big)\big] + \overline{Y}_2 p = 0,$$

$$u\rho_{x_2} + q\overline{Y}_1\rho + \rho\big[u_{x_2} + \overline{Y}_1 q + q\big(\overline{Y}_2\vartheta + r_2^{-1}\cos\vartheta\big)\big] = 0, \quad uS_{x_2} + q\overline{Y}_1 S = 0,$$

где $\overline{Y}_1 = \cos\vartheta\partial_{r_2} - ar_2^{-1}\sin\vartheta(x_2\partial_{x_2} + r_2\partial_{r_2})$, $\overline{Y}_2 = -\sin\vartheta\partial_{r_2} - ar_2^{-1}\cos\vartheta(x_2\partial_{x_2} + r_2\partial_{r_2})$, которая есть подмодель для ИП(10) и задает точные решения подмодели ИП($7 + a11$) после замены $x_2 = x_1e^{-a\theta_1}$, $r_2 = r_1e^{-a\theta_1}$. Замена получена из сравнения инвариантов надалгебры и подалгебры.

Подалгебра 2,3 является надалгеброй идеала 3, поэтому ИП(2,3) одномерных движений есть подмодель ИП(3) плоских движений.

Для трехмерных подалгебр рассматриваются только собственные подалгебры, не являющиеся идеалами.

Подалгебра 2,3,7 — надалгебра собственных подалгебр 7, 3. Инвариантных подмоделей для надалгебры нет. Можно рассмотреть регулярную частично инвариантную подмодель ранга 2 дефекта 1 с представлением решения: u, q, ρ, S — функции переменных t, x; σ — функция общего вида. РИЧП(2,3,7) задается переопределенной системой уравнений, которая приведена в инволюцию:

$$u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x = 0, \quad q_t + uq_x = 0, \quad S_t + uS_x = 0,$$

$$\rho_t + u\rho_x + \rho(u_x + kq) = 0, \quad k_t + uk_x + qk^2 = 0,$$

$$-\sin\sigma\sigma_y + \cos\sigma\sigma_z = k(t,x), \quad \sigma_t + u\sigma_x + q(\cos\sigma\sigma_y + \sin\sigma\sigma_z) = 0.$$

Общее решение этой системы определяются равенствами

$$u = x_t, \quad S = S(\xi), \quad q = q(\xi), \quad k^{-1} = tq, \quad \rho tqx_\xi = n(\xi),$$

$$p = f(\rho, S), \quad nx_{tt} + tqp_\xi = 0, \quad F(\xi, y - tq\cos\sigma, z - tq\sin\sigma) = 0,$$

где S, q, n, F — произвольные функции, $x = x(t,\xi)$ — обратная функция к лагранжевой замене $\xi = \xi(t,x) : \xi_t + u\xi_x = 0$.

Если рассмотреть РЧИП ранга 3 дефекта 1 для подалгебры 7 или 3 с функцией σ общего вида, то, очевидно, решения РЧИП(2,3,7) будут точными решениями этих подмоделей. При переходе к подалгебре ранг увеличивается, а дефект остается прежним. Среди решений РЧИП(2,3,7) найдутся решения ИП(3) или ИП(7), для этого функцию σ надо представить с помощью соответствующих инвариантов подалгебры 3 или 7. Таким образом, при переходе к подалгебре ранг увеличивается, а дефект для некоторых решений уменьшается [1].

Аналогичные рассуждения могут быть проведены для НЧИП или ДИП, которые вкладываются в ЧИП.

Подалгебра 3,10,11 — надалгебра собственных подалгебр 3,10; 10,11; 3,11. ИП надалгебры с представлением: $\vec{u}$, ρ, S — функции переменной $s = xy^{-1}$, задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(u - sv)u_s + \rho^{-1}p_s = 0, \quad (u - sv)(v_s + su_s) = 0, \quad (u - sv)w_s = 0,$$

$$(u - sv)S_s = 0, \quad (u - sv)\rho^{-1}\rho_s + u_s - sv_s = 0.$$

Система имеет два типа решений. Если $u = sv$, то получается изобарическое сдвиговое по оси z, центрированное на оси z течение: $u = v = 0$, $p = p_0 = f(\rho(s), S(s))$, где $w(s)$, $\rho(s)$ — произвольные функции.

Если $u \neq sv$, то получается либо покой, либо простая изэнтропическая волна: $S = S_0$, $w = w_0$, $u = m\cos\psi$, $v = m\sin\psi$, $\psi = C - \int m'\sqrt{a^{-2} - m^{-2}}\,d\rho$, $m(\cos\psi - s\sin\psi) = a\sqrt{1 + s^2}$, где $m^2 = B - \int a^2\rho^{-1}\,d\rho$, $a^2 = f_\rho$ — квадрат скорости звука; S_0, w_0, B, C — постоянные.

Полученные решения являются точными решениями для ИП(3,10), для ИП(3,11) с заменой $s = x_1 y_1^{-1}$, для ИП(10,11) с заменой $x_2 = s\cos\theta$.

НЧИП(3,10,11) ранга 2 дефекта 1 имеет представление: u, v, w, ρ, S — функции переменной $s = xy^{-1}$ и параметра $\alpha = \alpha(t,x,y,z)$, который может быть любой комбинацией инвариантных функций;

$$S_\alpha D\alpha + y^{-1}S_s(u - sv) = 0,$$

$$\vec{u}_\alpha D\alpha + \rho^{-1}p_\alpha\nabla\alpha + y^{-1}[\vec{u}_s(u - sv) + \rho^{-1}p_s(1, -s, 0)] = 0,$$

$$\rho_\alpha D\alpha + \rho\vec{u}_\alpha\cdot\nabla\alpha + y^{-1}[\rho_s(u - sv) + \rho(u_s - sv_s)] = 0,$$

где $D_\alpha = \alpha_t + \vec{u}\cdot\nabla\alpha$. Эта система переопределена. Если из нее определяются величины $D\alpha$ и $\nabla\alpha$, то подмодель редуцируется к ИП некоторой подалгебры [1].

Если рассмотреть НЧИП ранга 3 дефекта 1 для подалгебр, то решения НЧИП(3,10,11) ранга 2 дефекта 1 являются их решениями.

Надалгебра 2,3,10,11 порождает точные решения НЧИП(3,10,11) ранга 2 дефекта 1, если рассмотреть НЧИП(2,3,10,11) ранга 1 дефекта 1. Это будут решения НЧИП(3,10,11) ранга 2 дефекта 1, не зависящие от s, которые задают изэнтропическую простую волну.

НЧИП(2,3,7,10,11) ранга 0 дефекта 1 дает решения НЧИП(2,3,10,11) ранга 1 дефекта 2, решения которой дают решения НЧИП(3,10,11) ранга 2 дефекта 2 и т. д.

Итак, сравнение представления решений надалгебры с представлением решений подалгебры дает связь между решениями соответствующих подмоделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Овсянников Л. В.* Об оптимальных системах подалгебр // Докл. АН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
3. *Овсянников Л. В.* Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. АН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.
4. *Хабиров С. В.* Классификация дифференциально инвариантных подмоделей // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701.
5. *Овсянников Л. В.* Об иерархии инвариантных подмоделей дифференциальных уравнений // Докл. АН. 1998. Т. 361, № 6. С. 740–742.
6. *Golovin S. V.* On the hierarchy of partially invariant submodels of differential equations // J. Physics A, Math. Theor. 2008. V. 41, N 265501 (16 pp.).
7. *Овсянников Л. В.* Некоторые итоги выполнения программы «Подмодели» для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372.
8. *Овсянников Л. В.* Программа подмодели. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.

Статья поступила 7 февраля 2012 г., окончательный вариант — 21 декабря 2012 г.

Хабиров Салават Валеевич
Институт механики Уфимского научного центра РАН,
пр. Октября, 71, Уфа 450054;
Уфимский гос. авиационный технический университет,
ул. Маркса, 12, Уфа 450000
habirov@anrb.ru