Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 514.763.2

ТЕОРЕМА КАРАТЕОДОРИ — РАШЕВСКОГО — ЧОУ ДЛЯ ЛИПШИЦЕВЫХ НЕГОЛОНОМНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

К. В. Сторожук

Аннотация. Доказано, что если липшицево k-мерное распределение H в $\mathbb{R}^{k+1}$ неголономно в связной области, то любые точки соединимы H-ломаной.

Ключевые слова: теорема Рашевского — Чоу, неголономное распределение.

1. Введение и обзор результатов статьи

Пусть H — гладкое k-мерное распределение линейных подпространств на $\mathbb{R}^n$ или в касательном расслоении к гладкому многообразию M^n. Обозначим символом $[H, H]$ распределение, порождаемое коммутаторами (скобками Ли) всевозможных гладких векторных полей, лежащих в H (будем далее такие поля называть *H-полями* или *горизонтальными полями*, а их траектории — *горизонтальными кривыми*).

Если распределение H инволютивно, т. е. $[H, H] \subset H$, то оно интегрируемо, т. е. касается k-мерных интегральных многообразий (теорема Фробениуса).

В неинтегрируемом случае итерированные коммутаторы распределения H образуют возрастающую цепочку распределений

$$H_1 := H,\ H_2 := \mathrm{Lin}\{H, [H, H]\},\ \dots,\ H_m := \mathrm{Lin}\{H_{m-1}, [H_{m-1}, H]\}. \qquad (1)$$

Если максимальное подпространство H_m совпадает с $\mathbb{R}^n$, то распределение H называется *вполне неинтегрируемым* или *вполне неголономным*.

Если H порождено достаточно гладкими векторными полями $X_1, \dots, X_k$, то распределения H_l в цепочке (1) порождаются итерированными коммутаторами вида $[X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots, [X_{i_{s-1}}, X_{i_s}] \dots]]$ длин s, не больших l. Условие вполне неинтегрируемости такого H называется *условием Хермандера* для этих полей.

Теорема Рашевского — Чоу [1, 2] утверждает: если H вполне неголономно, то любые точки можно соединить H-траекториями, т. е. кусочно гладкими кривыми, касающимися распределения H.

В работе Каратеодори [3] содержится результат, согласно которому орбиты неинтегрируемого аналитического распределения коразмерности 1 совпадают со всем многообразием. Теорема Рашевского — Чоу является естественным геометрическим обобщением результата Каратеодори. Основной результат нашей статьи — теорема Каратеодори в липшицевом случае (теорема 1).

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ–921.2012.1).

Из этого результата следует, в частности, теорема Рашевского — Чоу для двух липшицевых векторных полей в $\mathbb{R}^3$. В [4] такая теорема доказана для векторных полей специального вида (зависящих от двух переменных). Заметим, что наше доказательство, хотя и совсем общее, не дает оценок на метрику Карно — Каратеодори типа полученных в [4], ибо опирается на топологические методы. Зато топологичность доказательства позволяет обобщить формулировку приведенной теоремы в двух направлениях.

Во-первых, можно ослабить условие липшицевости H, потребовав просто хорошие свойства решений задач Коши для векторных полей, порождающих распределение H (теорема 2). Из теоремы 2 следует, в частности, теорема Рашевского — Чоу для векторных полей специального вида с измеримыми коэффициентами по части переменных, доказанная в [5]. Во-вторых, мы показываем, что в случае коразмерности, большей 1, можно утверждать во всяком случае, что орбита неинтегрируемого k-распределения содержит топологический $(k+1)$-мерный куб (теорема 3). Последняя теорема верна и для соответствующих распределений в банаховом пространстве.

В конце статьи кратко обсуждается теорема об орбите [6, 7] и приводится ее приложение для доказательства одного из вариантов C^1-теоремы Рашевского — Чоу из [8]. Некоторые аргументы (например, лемма об орбите) позволяют предположить, что для липшицевых распределений тоже выполнена теорема об орбите, аналогичная теоремам Стефана и Зюссмана. Пока это гипотеза.

Подчеркнем, что теоремы 1–3 имеют качественный характер. В работах, содержащих конкретные оценки длин горизонтальных кривых, приходится использовать итерированные коммутаторы. Но при коммутировании векторных полей их гладкость падает, поэтому начальное распределение должно быть достаточно гладким. Если гладкость недостаточна, то используют аппроксимации коммутаторов ε-коммутаторами вида (3) и (4) (см. ниже). При этом полученные результаты остаются применимыми к гладким задачам. Такой подход тоже позволяет получить «количественные аналоги» гладких теорем о пространствах Карно — Каратеодори и расстояниях в них (см. [9–14]).

2. Определения и геометрическая подготовка

Будем говорить, что *из точки p попадаем в q, двигаясь в направлении поля X за время ε*, и писать $p \xrightarrow{X,\varepsilon} q$, если $q = u(\varepsilon)$, где u — решение задачи Коши

$$u(0) = p, \quad \dot{u}(t) = X(u(t)). \tag{2}$$

Векторное поле назовем *горизонтальным полем* или *H-полем*, если оно в каждой точке принадлежит распределению H. *Горизонтальной траекторией* или *H-траекторией* называем кусочно гладкую кривую, касательную к H. Наконец, *H-орбита* точки p — это множество точек, в которые можно попасть из точки p, двигаясь вдоль H-траекторий. Обозначим орбиту точки p символом $O(p)$. Символом $O_\varepsilon(p)$ обозначим множество точек q, H-достижимых из точки p за время, не большее ε. Подобные множества назовем *локальными орбитами.*

Называем k-мерное распределение в $\mathbb{R}^n$ *интегрируемым в точке p*, если найдется топологический k-мерный диск $B^k \subset \mathbb{R}^n$, содержащий локальную орбиту точки p. (Ниже будет ясно, что в этом случае диск можно считать C^1-гладким, но для целей настоящей статьи это несущественно). Соответственно назовем H *неинтегрируемым* или *неголономным*, если H неинтегрируемо ни в какой точке. Последнее определение согласуется со стандартным.

Теорема 1 (Каратеодори — Рашевского — Чоу для липшицева распределения гиперплоскостей). *Пусть H — липшицево неголономное k-мерное распределение в связной области $U \subset \mathbb{R}^n$, $n = k + 1$. Тогда любые точки $p, q \in U$ H-соединимы.*

Опишем геометрическую идею доказательства «гладкой» теоремы Рашевского — Чоу, это пригодится в негладком случае.

Коммутаторы векторных полей $[X, Y]$ можно, используя четырехзвенные ломаные, получить с помощью предела (3) или, более общо, (4):

$$[X,Y] := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{p_{XYXY}(\varepsilon)}{\varepsilon^2}, \quad p \xrightarrow{X,\varepsilon} p_X \xrightarrow{Y,\varepsilon} p_{XY} \xrightarrow{X,-\varepsilon} p_{XYX} \xrightarrow{Y,-\varepsilon} p_{XYXY}, \tag{3}$$

$$[X,Y] = \lim_{s,t\to 0} \frac{p_{XYXY}(s,t)}{st}, \quad p \xrightarrow{X,s} p_X \xrightarrow{Y,t} p_{XY} \xrightarrow{X,-s} p_{XYX} \xrightarrow{Y,-t} p_{XYXY}. \tag{4}$$

Если вектор $[X, Y]$ не лежит в плоскости векторов X, Y, то концы траекторий вида (3), (4) будут при малых ε образовывать траекторию, трансверсальную этой плоскости, и ломаные траектории, идущие попеременно вдоль X и Y, заполняют некоторое уже «трехмерное» множество в окрестности точки p. При итерации подобных «ε-коммутаторов» будем заметать размерность 4, 5 и в конце концов заметем H-ломаными окрестность точки p.

Перейдем к липшицевому случаю.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и H — липшицево k-мерное распределение в $\mathbb{R}^n$. Покажем, что липшицевы поля, порождающие H, можно сделать весьма специальными.

Лемма 1. *Если $H(p)$ трансверсально $(n-k)$-мерному линейному подпространству $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$, то в окрестности точки p распределение H можно задать липшицевыми полями $X_1, \dots, X_k$, являющимися строками матрицы размера $k \times n$ (где $h_1, \dots, h_k$ — липшицевы функции из U в $\mathbb{R}^{n-k}$):*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & h_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & h_k \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Доказательство. Надо взять в качестве вектора X_i, $i = 1, 2, \dots, k$, направляющий вектор прямой, получающейся пересечением H с $(n-k+1)$-мерной плоскостью, параллельной соответствующим координатным осям пространства $\mathbb{R}^n$.

Ясно, что H-соединимость является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности не пересекаются. Теорема сразу вытекает из связности U, если удастся доказать, что каждый класс — открытое множество. Итак, для доказательства теоремы 1 достаточно доказать такую лемму.

Лемма 2. *Пусть $k + 1 = n$. Для каждого липшицева распределения, порождаемого строками матрицы (5) в $\mathbb{R}^n$, неголономного в точке $p \in U$, H-орбита точки p является окрестностью p.*

3. Доказательство леммы 2

Пусть сначала $n = 3$ и $k = 2$. Трехмерная ситуация содержит все необходимые геометрические идеи, достаточные для общего случая.

Считаем, что $p=(0,0,0)$. С учетом леммы 1 полагаем, что распределение H в U порождено векторными полями $X=(1,0,h_1)$ и $Y=(0,1,h_2)$. Можно считать, что функции $h_{1,2}$ в U ограничены константой $M=\max\{|h_1|,|h_2|\}$.

Пусть ε столь мало, что вертикальная призма $[-\varepsilon,\varepsilon]\times[-\varepsilon,\varepsilon]\times[-7M\varepsilon,7M\varepsilon]$ содержится в U. Малая толщина этой призмы (по отношению к ее высоте) не позволит ломаным, возникающим в доказательстве, покинуть призму через основания раньше времени. Подробности читатель восполнит сам.

Обозначим основание призмы $[-\varepsilon,\varepsilon]\times[-\varepsilon,\varepsilon]$ в плоскости $0xy$ символом $\square$.

Определим отображения Ψ_p^{XY}, $\Theta_p^{XY}:\square\to U$ как точки на следующей интегральной ломаной (ср. формулу (3)):

$$p\xrightarrow{X,x}*\xrightarrow{Y,y}\Psi_p^{XY}(x,y)\xrightarrow{X,-x}*\xrightarrow{Y,-y}\Theta_p^{XY}(x,y),\tag{6}$$

$$p\xrightarrow{Y,y}*\xrightarrow{X,x}\Psi_p^{YX}(x,y)\xrightarrow{Y,-y}*\xrightarrow{X,-x}\Theta_p^{YX}(x,y).\tag{7}$$

Отображения $\Psi_p^{**}(x,y)$ сохраняют первые две координаты.

Наглядное устройство отображения $\Psi_p^{XY}:\square\to U$ показано на рис. 1. Из точки $p=(0,0,0)$ движемся вдоль поля X в плоскости $y=0$ до тех пор, пока абсцисса не сравняется с числом x, затем поворачиваем и движемся вдоль поля Y в плоскости $x=\mathrm{const}$ до тех пор, пока ордината не станет равной y. Пришли в точку $\Psi_p^{XY}(x,y)$. Аналогично чтобы попасть в точку Ψ_p^{YX}, надо сначала идти вдоль поля Y, а потом — вдоль X.

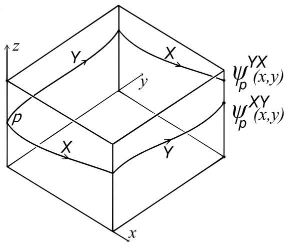

Рис. 1.

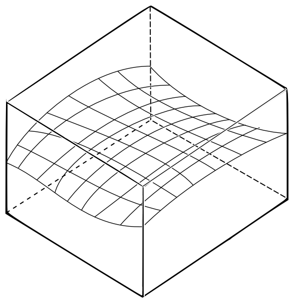

Рис. 2.

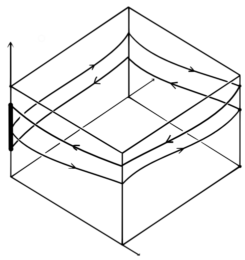

Рис. 3.

Из теорем существования, единственности и непрерывной зависимости от параметра решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения следует, что отображения Ψ_p^{**} корректно определены и непрерывны. Ясно, что $X=\frac{\partial}{\partial x}\Psi_p^{YX}$, $Y=\frac{\partial}{\partial y}\Psi_p^{XY}$.

Если $\Psi_p^{XY}(x,y)=\Psi_p^{YX}(x,y)$ для всех $(x,y)\in\square$, то образ множества $\square$ при отображении $\Psi_p=\Psi_p^{XY}=\Psi_p^{YX}$ будет 2-многообразием M. Касательные к M векторы X, Y — частные производные Ψ_p. Поскольку они непрерывны, многообразие дифференцируемо (и принадлежит классу C^1), а отображение $\Psi_p^{XY}:\square\to M$ — его C^1-параметризация. Это так называемые координаты второго рода. Соответствующая координатная сетка показана на рис. 2. Ясно, что $H=TM$. Последнее означает интегрируемость распределения H в точке p.

Итак, если H неинтегрируемо, то в множестве $\square$ найдется точка (x^0,y^0), в которой $\Psi_p^{XY}\neq\Psi_p^{YX}$.

Образ множества $\square$ под действием отображений Θ_p^{**} связен и лежит на оси OZ (рис. 3). Поэтому любая точка вертикального отрезка с концами $\Theta_p^{XY}(x^0,y^0)$

и $\Theta_p^{YX}(x^0, y^0)$ достижима из точки $p = (0,0,0)$ четырехзвенной горизонтальной ломаной вида (6) или (7).

До сих пор фиксировали точку $p = (0,0,0)$. Теперь получили возможность двигать ее по вертикальному отрезку. Рассмотрим отображение

$$(x, y, t) \mapsto \big(\Psi^{XY}_{(0,0,t)}(x, y)\big). \tag{8}$$

Оно непрерывно и инъективно в некоторой окрестности точки $(0,0,0)$, причем точка $(0,0,0)$ переходит в себя. В силу теоремы Брауэра о вложении области образ этого отображения является окрестностью точки $(0,0,0)$. В то же время ясно, что образ данного отображения состоит из точек, достижимых из точки $(0,0,0)$ с помощью 6-звенных H-ломаных, идущих попеременно вдоль X и вдоль Y. Доказательство леммы для $n = 2$ закончено.

Доказательство для $k > 2$ не содержит дополнительных идей. Приведем его, уже опуская простые оценки. Снова считаем, что p — начало координат. Рассмотрим произвольную окрестность U точки p. Пусть ε мало. Символом $\square_k$ обозначим множество $\{x_1, x_2, \dots, x_k \mid |x_i| \le \varepsilon,\ i = 1, \dots, k\} \subset \mathbb{R}^k$.

Различные перестановки $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ и $J = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ множества $1, 2, \dots, k$ определяют семейства отображений Ψ^I и $\Theta^{IJ} : \square_k \to U$, сопоставляющих набору $r = (x_1, \dots, x_k) \in \square_n$ конец траектории, подобной (6) или (7):

$$p \xrightarrow{X_{i_1}, x_{i_1}} \dots \xrightarrow{X_{i_k}, x_{i_k}} \Psi^I_p(r) \xrightarrow{X_{j_1}, -x_{j_1}} \dots \xrightarrow{X_{j_k}, -x_{j_k}} \Theta^{IJ}_p(r). \tag{9}$$

Образы отображений Θ^{IJ} связны, лежат в «вертикальной» оси $0x_{n=(k+1)}$ и содержат точку p. Итак, образ либо состоит из точки p, либо содержит «вертикальный» отрезок с концами $(0, 0, \dots, 0, \pm\delta)$.

Если отображения Ψ^I совпадают друг с другом при всех перестановках I, т. е. не зависят от порядка «переключений» векторных полей $X_1, X_2, \dots, X_k$, то соответствующее отображение $\Psi : \square_n \to U$ определяет C^1-параметризацию k-мерного интегрального многообразия M^k, заметаемого H-траекториями. В этом случае распределение H интегрируемо.

Предположим, что нашлись точка $r \in \square_k$ и две перестановки I, J такие, что $\Psi^I(r) \ne \Psi^J(r)$. Тогда образ множества $\square_k$ отображения Θ^{IJ} содержит прямолинейный отрезок S оси Ox_{k+1}, поскольку этот образ линейно связен, но не сводится к одной точке. Отображение $(x_1, \dots, x_k, z) \mapsto \Psi^I_{(0,\dots,0,z)}(x_1, \dots, x_k)$, как легко видеть, инъективно при малых $z \in S$. Осталось применить теорему Брауэра. Лемма 2 и теорема 1 доказаны.

4. Два дополнения: ослабление липшицевости и того, что codim = 1

I. В доказательстве леммы 2 липшицевость полей X_i использовалась только для того, чтобы гарантировать хорошие свойства решений уравнения (2) для полей X_i. Поэтому можно ослабить формулировку теоремы 1, потребовав выполнение именно этих свойств. Например, назовем непрерывное векторное поле X *хорошим в окрестности точки* p, если в некоторой окрестности U точки p задача Коши $u(0) = r$, $\dot u(t) = X(u(t))$ имеет единственное решение, непрерывное по (r, t).

Назовем семейство кривых в области U *хорошим в окрестности* p, если это семейство является семейством интегральных кривых некоторого хорошего в окрестности p ненулевого векторного поля.

Назовем k-мерное распределение H в области $U \subset \mathbb{R}^n$ *хорошим*, если для каждой точки p пересечение H с каждой трансверсальной к $H(p)$ $(n-k+1)$-мерной плоскостью Π образует в Π хорошее в окрестности p семейство кривых. Ясно, что липшицевы распределения хорошие. Следующая теорема доказывается так же, как и теорема 1. Высоту «призмы» $\square_k \times [-?, ?]$ читатель снова оценит сам, используя несложные соображения компактности и равномерной непрерывности.

Теорема 2. *Пусть H — хорошее k-мерное распределение в $\mathbb{R}^{k+1}$, порожденное непрерывными векторными полями $X_1, \dots, X_k$. Если оно неголономно в связной области U, то любые точки $p, q \in U$ являются H-соединимыми.*

II. Пусть $m = n - k$ — коразмерность распределения H. До сих пор m равнялось 1. В доказательстве леммы 2 построено инъективное отображение $(x_1, \dots, x_k, z) \mapsto \Psi^I_{(0,\dots,0,z)}(x_1, \dots, x_k)$, действующее на множестве $\square_k \times S$, где S — «вертикальный» отрезок. Этот отрезок был получен как невырожденный образ некоторого непостоянного отображения $\Theta^{IJ}(\square_k) \subset \mathbb{R}^{m=1}$. Существование отрезка S было ключевым геометрическим моментом доказательства леммы 2 и теоремы 1.

Если $m > 1$, то линейно связное множество в $\mathbb{R}^m$ тоже содержит некоторый топологический отрезок S. Интуитивно это кажется очевидным, однако доказательство содержательно (см., например, [15, § 50, примечание к теореме 2]). Пусть $\gamma : [0,1] \to S$ — параметризация этого отрезка. Отображение компакта $\square_k \times [0,1]$ в $\mathbb{R}^n$, действующее по формуле $(x_1, \dots, x_k, z) \mapsto \Psi^I_{\gamma(z)}(x_1, \dots, x_k)$, инъективно (ср. конец доказательства леммы 2). Тем самым доказана

Теорема 3. *Пусть H — k-мерное липшицево распределение в $\mathbb{R}^n$. Если H неинтегрируемо в точке p, то локальные H-орбиты точки p содержат гомеоморфный образ $k+1$-мерного куба.*

Замечание. Можно взять распределение в банаховом пространстве.

5. C^1-орбиты и липшицевы орбиты

В [6] Зюссман показал, что орбита произвольной системы C^∞-гладких векторных полей является гладким инъективным образом некоторого C^∞-многообразия. В работе Стефана [7] соответствующий результат получен для C^q-категории, $q \geq 1$. Теорема Стефана — Зюссмана в ее общем виде не дает оценок, но является «руководящей и направляющей» силой для доказательства теорем типа Рашевского — Чоу. Докажем, например, с помощью нее результат Басалаева и Водопьянова из [8] немного в другой формулировке.

Следствие теоремы об орбите. *Пусть H — распределение на гладком многообразии M^n, порождаемое C^1-полями $X_1, \dots, X_s$. Пусть для каждого $i \geq 1$ распределение H_{i+1} получается взятием линейной оболочки всех C^1-полей из H_i и их однократных коммутаторов. Предположим, что все распределения $H_1, H_2, \dots, H_N$ являются C^1-гладкими и $H_N(p) = TM$. Тогда орбита точки p под действием системы полей $X_1, \dots, X_s$ — окрестность точки p в M. Более того, существует натуральное число L такое, что окрестность точки p заметется ломаными, состоящими не более чем из L звеньев.*

Доказательство. $\{X_1, \dots, X_s\}$-орбита точки p с учетом теоремы об орбите является инъективным гладким образом некоторого C^1-многообразия $\widetilde{M}^l$ под действием гладкого инъективного отображения $f : \widetilde{M}^l \to M^n$. Сдвиги вдоль векторных полей X_i оставляют орбиту инвариантной, значит (см., например, [7, лемма 5.1]), коммутаторы этих полей также касаются орбиты. Следовательно, все распределения H_i, суженные на орбиту, будут не более чем l-мерными. Но $H_N(p) = TM$, а значит, $l = n$ и орбита заметает множество с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^n$. Осталось показать существование конечного числа L. Для каждого $j = 1, 2, \dots$ рассмотрим множество K_j, заметаемое ломаными, состоящими из j звеньев длины, не большей j. Эти множества компактны и их объединение — вся орбита. Из теоремы Бэра следует, что внутренность некоторого K_L непуста. Следствие доказано.

Если $n = k + 1$, то из теоремы 1 следует, что H-орбиты неинтегрируемого липшицева распределения открыты в $\mathbb{R}^n$. Если $k + 1 < n$, то между интегрируемостью и полной неинтегрируемостью возникают промежуточные «не вполне интегрируемые» ситуации. В гладком случае H-орбиты имеют размерность максимального подпространства H_N в цепочке итерированных коммутаторов (1). Анализ негладкого случая, очевидно, не может опираться на формулу (1). Изучению H-орбит распределений с малой гладкостью посвящен ряд работ (см., например, библиографию в [14]). В [14] вводится «условие s-интегрируемости» ($k \leq s \leq n$): H-орбиты являются s-мерными C^1-многообразиями.

Автор считает, что глобальная H-орбита липшицева распределения, как и в теореме об орбите, тоже является погруженным многообразием. Главным аргументом в пользу этого для автора является

Лемма об орбите. *Орбита произвольного семейства липшицевых векторных полей топологически однородна.*

Доказательство. Семейство локальных липшицевых изоморфизмов, порождаемых липшицевыми H-полями, действует на орбите транзитивно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рашевский П. К.* О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат. 1938. Т. 3, № 2. С. 83–94.
2. *Chow W. L.* Über Systeme von linearen partiallen Differentialgleichungen erster Ordnung // Math. Ann. 1939. V. 117. P. 98–105.
3. *Carathéodory C.* Untersuchungen Auber die Grundlagen der Termodynamik // Math. Ann. 1909. V. 67. P. 93–161.
4. *Грешнов А. В.* Об одном классе липшицевых векторных полей в $\mathbb{R}^3$ // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 517–527.
5. *Белых А. В., Грешнов А. В.* Квазипространства, индуцированные измеримыми в $\mathbb{R}^3$ векторными полями // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1231–1244.
6. *Sussmann H. J.* Orbits of families of vector fields and integrability of distributions // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 180. P. 171–188.
7. *Stefan P.* Accessible sets, orbits, and foliations with singularities // Proc. London Math. Soc. 1974. V. 29, N 3. P. 699–713.
8. *Basalaev S. G., Vodopyanov S. K.* Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Eurasian Math. J. 2013. V. 4, N 2. P. 10–48.
9. *Simic' S.* Lipschitz distributions and Anosov flows // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. P. 1869–1887.
10. *Garofalo N., Nhieu Duy-Minh.* Lipschitz continuity, global smooth approximations and extension theorems for Sobolev functions in Carnot–Carathéodory spaces // J. Anal. Math. 1998. V. 74. P. 67–97.
11. *Rampazzo F.* Frobenius-type theorems for Lipschitz distributions // J. Differ. Equations. 2007. V. 243, N 2. P. 270–300.

12. *Rampazzo F., Sussmann H. J.* Commutators of flow maps of nonsmooth vector fields // J. Differ. Equations. 2007. V. 232, N 1. P. 134–175.
13. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Субриманова геометрия при минимальной гладкости векторных полей // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 5. С. 583–588.
14. *Montanari A., Morbidelli D.* Almost exponential maps and integrability results for a class of horizontally regular vector fields // Potential Anal. 2013. V 38, N 2. P. 611–633.
15. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.

Статья поступила 21 января 2012 г.

Сторожук Константин Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
stork@math.nsc.ru