Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 517.929

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ НА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВАЖЕВСКОГО С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Н. В. Перцев

Аннотация. Рассматривается задача Коши для систем линейных дифференциальных уравнений Важевского с конечным запаздыванием. Правые части систем уравнений содержат неотрицательные матрицы и диагональные матрицы с отрицательными диагональными элементами. Начальные данные заданы в виде неотрицательных функций. Входящие в уравнения матрицы таковы, что нулевое решение изучаемых систем асимптотически устойчиво. С помощью метода монотонных операторов и свойств невырожденных М-матриц построены двусторонние оценки на решения задачи Коши. Нижние оценки представляют собой нулевые функции, верхние оценки — экспоненциальные функции, параметры которых задаются через решения вспомогательных систем неравенств и уравнений. Приведены примеры построения оценок для решений конкретных задач.

Ключевые слова: система линейных дифференциальных уравнений Важевского с запаздыванием, экспоненциальная устойчивость, критерий Севастьянова — Котелянского, экспоненциальная оценка, М-матрица, квазинеотрицательная матрица, перронов корень.

1. Введение

Системы дифференциальных уравнений с запаздыванием широко используются при построении математических моделей различных процессов и систем. В ряде случаев в качестве математических моделей выступают системы линейных автономных дифференциальных уравнений с запаздыванием, дополненные начальными данными. Структура некоторых моделей такова, что используемые системы уравнений содержат матрицы специального вида. Такие модели могут быть записаны в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-\tau}^{0} dA(\theta)x(t+\theta) - Bx(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = x^{(0)}(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{2}$$

Соотношения (1), (2) будем рассматривать как задачу Коши для автономной системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. В задаче (1), (2) принято, что $x(t) \in \mathbb{R}^m$ — искомая функция, $t > 0$, $x^{(0)}(t) \in$

Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН «Дифференциально-разностные и интегродифференциальные уравнения. Приложения к задачам естествознания» (проект № 80, 2012–2014 гг.).

$\mathbb{R}^m$ — заданная на $[-\tau, 0]$ начальная функция с непрерывными неотрицательными компонентами, причем хотя бы одна из них тождественно не равна нулю, $0 < \tau < \infty$ — запаздывание. Символ $dx(t)/dt$ означает правостороннюю производную [1]. Интеграл $\int\limits_{-\tau}^{0} dA(\theta)x(t+\theta)$ понимается в смысле Римана — Стилтьеса [2], где $A(\theta) = (a_{ij}(\theta))$ — $(m \times m)$-матрица, элементы которой представляют собой неубывающие на $[-\tau, 0]$ функции. Диагональная матрица $B = \mathrm{diag}(b_{11}, \dots, b_{mm})$ такова, что $b_{ii} > 0$, $1 \le i \le m$. Без ограничения общности полагаем, что каждая строка матрицы $V_A = A(0) - A(-\tau)$ ненулевая, т. е. система (1) не содержит уравнений вида $dx_i(t)/dt = -b_{ii}x_i(t)$. *Решением задачи* (1), (2) будем называть функцию $x(t)$, определенную и непрерывную на $[-\tau, \infty)$, удовлетворяющую начальному условию (2) и уравнению (1) на каждом промежутке $t \in [0, T_0)$, $0 < T_0 < \infty$. Существование и единственность решения $x(t)$ для задачи (1), (2) вытекает из соответствующих теорем для систем линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием общего вида [1, 3].

Следуя [4, 5], систему уравнений (1) будем называть *системой уравнений Важевского с запаздыванием.* В [5] для систем уравнений Важевского с запаздыванием установлено необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости решения $x(t) \equiv 0$. Это условие состоит в том, чтобы матрица $H = V_A - B$ удовлетворяла критерию Севастьянова — Котелянского [6], а именно, если $M^{(k)}$ — угловой минор H порядка k, то должны выполняться неравенства

$$(-1)^k M^{(k)} > 0, \quad 1 \le k \le m. \tag{3}$$

Отметим, что H относится к классу квазинеотрицательных матриц, т. е. матриц, все внедиагональные элементы которых неотрицательны.

Результат из [5] может быть переписан в терминах невырожденных M-матриц. Приведем несколько свойств таких матриц. Пусть далее неравенства между векторами из $\mathbb{R}^m$ понимаются как неравенства между их компонентами. Для $\xi, \varphi, \psi \in \mathbb{R}^m$ запись $\xi > 0$, $\varphi \ge 0$, $\psi \ne 0$ означает, что все компоненты ξ положительны, все компоненты φ неотрицательны и хотя бы одна компонента ψ отлична от нуля. Рассмотрим матрицу $S = (s_{ij})$ с элементами $s_{ij} \le 0$ для всех $i \ne j$, $1 \le i, j \le m$. Следуя [7], матрицу S будем называть *невырожденной* M-*матрицей*, если выполняется одно из пятидесяти эквивалентных свойств, среди которых выделим следующие:

(P_1) матрица S^{-1} существует и имеет неотрицательные элементы;

(P_2) все главные миноры S положительны;

(P_3) все диагональные миноры S положительны;

(P_4) существует $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi > 0$, такой, что $S\xi > 0$;

(P_5) все собственные числа λ_S матрицы S имеют положительные вещественные части ($\mathrm{Re}(\lambda_S) > 0$).

Простейшим примером невырожденной M-матрицы является единичная матрица I. Считая S неразложимой, свойства $P_1, \dots, P_5$ можно дополнить еще одним: матрица S^{-1} существует и все ее элементы положительны. Кроме того, в [7] описаны свойства M-матриц общего вида. Так, например, если S — вырожденная неразложимая M-матрица, то существует $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi > 0$, такой, что $S\xi = 0$; каждая главная подматрица S, исключая S, является невырожденной M-матрицей.

Возвращаясь к неравенствам (3) и используя результаты [6], получаем, что $\mathrm{Re}(\lambda_H) < 0$ для всех собственных чисел λ_H матрицы H. Применяя свойство P_5

к матрице $(-H) = B - V_A$, находим, что решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $(-H)$ является невырожденной М-матрицей.

Из автономности и линейности системы (1) следует, что асимптотическая устойчивость решения $x(t) \equiv 0$ эквивалентна экспоненциальной устойчивости этого решения [1,3]. Такая устойчивость означает, что для решений $\tilde{x}(t)$ системы (1) с заданными при $t = 0$ начальными данными (не обязательно неотрицательными) справедлива оценка $|\tilde{x}(t)| \leq Ne^{-\alpha t}$, $t \geq 0$, где $N > 0$, $\alpha > 0$ — некоторые константы, $|\xi|$ — норма $\xi \in \mathbb{R}^m$. Существование N и α вытекает из ряда теорем общего вида, однако нахождение конкретных значений этих констант в общем случае представляет собой достаточно трудную задачу.

Целью настоящей работы является построение двусторонних оценок

$$0 \leq x(t) \leq ce^{-\gamma t}, \quad c \in \mathbb{R}^m,\ c > 0,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \gamma > 0,\ t \geq 0, \tag{4}$$

для решения $x(t)$ задачи (1), (2) на основе свойств М-матриц.

2. Двусторонние оценки на решения задачи Коши (1), (2)

Следуя [1,3], перепишем задачу (1), (2) в эквивалентном виде:

$$x(t) = e^{-Bt}\left(x^{(0)}(0) + \int_0^t e^{Bs} \int_{-\tau}^0 dA(\theta)x(s+\theta)\,ds\right) = (Lx)(t), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

$$x(t) = x^{(0)}(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{6}$$

В системе (5) $e^{Bs} = \operatorname{diag}(e^{b_{11}s}, \dots, e^{b_{mm}s})$, $s \in R$. Под решением задачи (5), (6) понимаем функцию $x(t)$, определенную и непрерывную на $[-\tau, \infty)$, удовлетворяющую начальному условию (6) и уравнению (5) на каждом промежутке $t \in [0, T_0]$, $0 < T_0 < \infty$. Применим к задаче (5), (6) метод монотонных операторов [8–10] и, опираясь на свойства невырожденных М-матриц, построим оценки (4).

Лемма 1. *Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяют системе неравенств*

$$0 < \gamma < \min(b_{11}, \dots, b_{mm}), \tag{7}$$

$$c > 0, \quad \left(B - \gamma I - \int_{-\tau}^0 e^{-\gamma\theta}\,dA(\theta)\right)c \geq 0, \tag{8}$$

$$c \geq \sup_{t \in [-\tau, 0]} (e^{\gamma t}x^{(0)}(t)). \tag{9}$$

Тогда для решения $x(t)$ задачи (5), (6) справедлива оценка

$$0 \leq x(t) \leq c\,e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Доказательство. По условию начальная функция такова, что $x^{(0)}(t) \geq 0$, $x^{(0)}(t) \not\equiv 0$, $t \in [-\tau, 0]$. Зафиксируем далее $\gamma \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющие (7)–(9), и рассмотрим функцию $u(t) = ce^{-\gamma t} \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Покажем, что верно неравенство

$$0 \leq (Lu)(t) \leq u(t), \quad t \geq 0. \tag{11}$$

Очевидно, что $0 \le (Lu)(t)$ для всех $t \ge 0$. Для проверки правого неравенства в (11) перепишем $(Lu)(t)$:

$$
\begin{aligned}
(Lu)(t) &= e^{-Bt}\left(x^{(0)}(0) + \int\limits_0^t e^{Bs} \int\limits_{-\tau}^0 dA(\theta) c e^{-\gamma(s+\theta)}\, ds\right) \\
&= e^{-Bt}\left(x^{(0)}(0) + \int\limits_0^t e^{(B-\gamma I)s} \int\limits_{-\tau}^0 e^{-\gamma\theta}\, dA(\theta) c\, ds\right) \\
&= e^{-Bt}\left(x^{(0)}(0) + (B-\gamma I)^{-1}(e^{(B-\gamma I)t} - I) \int\limits_{-\tau}^0 e^{-\gamma\theta}\, dA(\theta) c\right), \quad t \ge 0.
\end{aligned}
$$

Используя полученное выражение для $(Lu)(t)$, правую часть неравенства (11) представим в виде

$$
x^{(0)}(0) + (B-\gamma I)^{-1}(e^{(B-\gamma I)t} - I) \int\limits_{-\tau}^0 e^{-\gamma\theta}\, dA(\theta) c \le e^{(B-\gamma I)t} c, \quad t \ge 0. \tag{12}
$$

Рассмотрим (12) покомпонентно:

$$
x_i^{(0)}(0) + \frac{e^{(b_{ii}-\gamma)t} - 1}{b_{ii} - \gamma} \int\limits_{-\tau}^0 \sum_{j=1}^m e^{-\gamma\theta}\, da_{ij}(\theta) c_j \le e^{(b_{ii}-\gamma)t} c_i, \quad t \ge 0,\ 1 \le i \le m. \tag{13}
$$

Преобразуя (13), получаем

$$
x_i^{(0)}(0) - \frac{\int_{-\tau}^0 \sum_{j=1}^m e^{-\gamma\theta}\, da_{ij}(\theta) c_j}{b_{ii} - \gamma} \le \left(c_i - \frac{\int_{-\tau}^0 \sum_{j=1}^m e^{-\gamma\theta}\, da_{ij}(\theta) c_j}{b_{ii} - \gamma}\right) e^{(b_{ii}-\gamma)t}, \tag{14}
$$
$$
t \ge 0, \quad 1 \le i \le m.
$$

Нетрудно заметить, что неравенства (14) и, следовательно, неравенства (13) и (12) верны, если выполняются соотношения

$$
c_i \ge x_i^{(0)}(0), \quad c_i - \frac{\int_{-\tau}^0 \sum_{j=1}^m e^{-\gamma\theta}\, da_{ij}(\theta) c_j}{b_{ii} - \gamma} \ge 0, \quad 1 \le i \le m. \tag{15}
$$

Возвращаясь к векторно-матричной записи, из (15) получаем, что правую часть неравенства (11) можно записать в виде

$$
c \ge x^{(0)}(0), \quad \left(B - \gamma I - \int\limits_{-\tau}^0 e^{-\gamma\theta}\, dA(\theta)\right) c \ge 0. \tag{16}
$$

Обратимся теперь к начальной функции $x^{(0)}(t)$ и потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$
x(s+\theta) = x^{(0)}(s+\theta) \le e^{-\gamma(s+\theta)} c, \quad (s+\theta) \in [-\tau, 0], \tag{17}
$$

откуда приходим к неравенству $c \geq \sup\limits_{t \in [-\tau, 0]} (e^{\gamma t} x^{(0)}(t))$, и если оно верно, то верно и $c \geq x^{(0)}(0)$.

Полагая, что $u^{(0)}(t) = c^{(0)} e^{-\gamma_0 t}$, где $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, $c^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяют (7)–(9), ввиду (11)–(17) убеждаемся в выполнении неравенств

$$0 \leq x^{(0)}(t) \leq u^{(0)}(t),\ -\tau \leq t \leq 0, \quad 0 \leq (Lu^{(0)})(t) \leq u^{(0)}(t),\ t \geq 0.$$

Пусть $y(t) \in \mathbb{R}^m$ определена и непрерывна на $[-\tau, \infty)$, причем

$$y(t) = x^{(0)}(t),\ -\tau \leq t \leq 0, \quad 0 \leq y(t) \leq u^{(0)}(t),\ t \geq 0.$$

Тогда

$$0 \leq y(t) \leq u^{(0)}(t),\ -\tau \leq t \leq 0, \quad 0 \leq (Ly)(t) \leq (Lu^{(0)})(t) \leq u^{(0)}(t),\ t \geq 0.$$

Функция $z(t) \in \mathbb{R}^m$, построенная по правилу $z(t) = y(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, $z(t) = (Ly)(t)$, $t \geq 0$, определена и непрерывна на $[-\tau, \infty)$. Применяя к задаче (5), (6) принцип сжимающих отображений, получаем, что эта задача имеет единственное решение $x(t)$ на любом фиксированном промежутке $[0, T_0]$ и справедлива оценка $0 \leq x(t) \leq c^{(0)} e^{-\gamma_0 t}$, $0 \leq t \leq T_0$, что и завершает доказательство леммы.

Неравенства (7)–(9) представляют собой систему нелинейных неравенств относительно $m+1$ величин: $\gamma, c_1, \dots, c_m$. Для нахождения этих величин может быть использовано несколько подходов. Ниже приводятся два из них. В рамках первого подхода специальным образом задается $c \in \mathbb{R}^m$, $c > 0$, и через него находится γ. Во втором подходе сначала ищется $\gamma > 0$, а потом строится подходящий $c \in \mathbb{R}^m$.

Первый подход опирается на следующую вспомогательную лемму (здесь и далее символ T означает операцию транспонирования).

Лемма 2. *Пусть матрица $S = (s_{ij})$ с элементами $s_{ij} \leq 0$ для всех $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$, является невырожденной* М*-матрицей. Тогда любое решение неравенств*

$$\xi \in \mathbb{R}^m, \quad \xi > 0, \quad S\xi > 0 \tag{18}$$

можно представить в виде

$$\xi = \sum_{k=1}^{m} \mu_k \xi^{(k)}, \tag{19}$$

где $\mu_k \in \mathbb{R}$, $\mu_k > 0$, — произвольные константы,

$$\xi^{(k)} = S^{-1} e^{(k)} \in \mathbb{R}^m, \quad 1 \leq k \leq m,$$

$$e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^T, e^{(2)} = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, e^{(m)} = (0, 0, \dots, 1)^T.$$

Доказательство. Исходя из свойств невырожденных М-матриц, получаем, что каждая строка матрицы S^{-1} содержит хотя бы один положительный элемент. Положим $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T > 0$ и рассмотрим вектор ξ, заданный формулой (19). Имеем

$$\xi = \sum_{k=1}^{m} \mu_k S^{-1} e^{(k)} = S^{-1} \sum_{k=1}^{m} \mu_k e^{(k)} = S^{-1} \mu > 0, \quad S\xi = \mu > 0, \tag{20}$$

откуда следует, что неравенства (18) выполнены. Пусть $\xi^{(0)}$ — некоторое решение (18). Полагая $\psi = S\,\xi^{(0)} = (\psi_1, \dots, \psi_m)^T$, находим, что в (19) константы μ_k

для $\xi^{(0)}$ имеют вид $\mu_k = \psi_k > 0$, $1 \le k \le m$. Последнее вытекает из цепочки равенств

$$\sum_{k=1}^{m} \psi_k \xi^{(k)} = \sum_{k=1}^{m} \psi_k S^{-1} e^{(k)} = S^{-1} \sum_{k=1}^{m} \psi_k e^{(k)} = S^{-1}\psi = \xi^{(0)},$$

что и завершает доказательство леммы.

Обратимся к лемме 2 и рассмотрим вектор ξ — решение неравенств (18) при $S = B - V_A$. Следуя (19) и (20), положим $\xi = \beta S^{-1}\varepsilon$, где $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $0 < \varepsilon \le 1$. В неравенствах (7), (8) примем, что $\gamma > 0$, $c = c(\beta, \varepsilon) = \xi > 0$. Получим

$$\left(B - \gamma I - \int_{-\tau}^{0} e^{-\gamma\ \theta}\, dA(\theta)\right)\xi = (B - V_A)\xi - \gamma\xi - \left(\int_{-\tau}^{0} e^{-\gamma\theta}\, dA(\theta) - V_A\right)\xi$$
$$= \beta\varepsilon - \gamma\beta S^{-1}\varepsilon - \int_{-\tau}^{0} (e^{-\gamma\theta} - 1)\, dA(\theta)\beta S^{-1}\varepsilon. \quad (21)$$

Обозначим $\xi^{(\varepsilon)} = S^{-1}\varepsilon > 0$. Заметим, что $S\xi^{(\varepsilon)} = (B - V_A)\xi^{(\varepsilon)} = \varepsilon$ и $B\xi^{(\varepsilon)} > \varepsilon$, поскольку каждая строка матрицы V_A ненулевая. Поэтому для каждого $1 \le i \le m$ верно $b_{ii} > \varepsilon_i/\xi_i^{(\varepsilon)}$. Учитывая в (21), что $\beta > 0$, неравенство (8) перепишем в виде

$$\varepsilon - \gamma\xi^{(\varepsilon)} - \int_{-\tau}^{0} (e^{-\gamma\theta} - 1)\, dA(\theta)\xi^{(\varepsilon)} \ge 0. \quad (22)$$

Рассматривая (22) покомпонентно, получаем систему неравенств относительно γ:

$$\varepsilon_i - \gamma\xi_i^{(\varepsilon)} \ge \int_{-\tau}^{0} (e^{-\gamma\theta} - 1) \sum_{j=1}^{m} da_{ij}(\theta)\xi_j^{(\varepsilon)}, \quad 1 \le i \le m. \quad (23)$$

Структура формул (23) такова, что в левой части стоят монотонно убывающие, а в правой части — монотонно возрастающие функции от γ. Отметим, что $\varepsilon_i - \gamma\xi_i^{(\varepsilon)} \ge 0$ для $0 \le \gamma \le \ \varepsilon_i/\xi_i^{(\varepsilon)}$, $1 \le i \le m$. В качестве решения системы (23) возьмем $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ как наименьший из корней отдельно взятых уравнений

$$\varepsilon_i - \gamma\xi_i^{(\varepsilon)} = \int_{-\tau}^{0} (e^{-\gamma\theta} - 1) \sum_{j=1}^{m} da_{ij}(\theta)\xi_j^{(\varepsilon)}, \quad 1 \le i \le m. \quad (24)$$

Из (24) следует, что для каждого $1 \le i \le m$ верно $0 < \gamma(\varepsilon) < b_{ii}$.

В итоге получаем, что пара $\gamma = \gamma(\varepsilon)$, $c = c(\beta, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам (7) и (8) при любом фиксированном $0 < \varepsilon \le 1$ и произвольном $\beta > 0$. Подберем $\beta > 0$ такое, чтобы $c = c(\beta, \varepsilon)$ удовлетворял неравенству (9) при заданном $0 < \varepsilon \le 1$, а именно

$$\beta\xi^{(\varepsilon)} \ge \omega^{(\varepsilon)} = \sup_{t\in[-\tau,0]} (e^{\gamma(\varepsilon)t}x^{(0)}(t)). \quad (25)$$

Рассматривая (25) покомпонентно, выбираем

$$\beta = \beta(\varepsilon) = \max\left(\frac{\omega_1^{(\varepsilon)}}{\xi_1^{(\varepsilon)}}, \dots, \frac{\omega_m^{(\varepsilon)}}{\xi_m^{(\varepsilon)}}\right) > 0, \quad c = c(\beta(\varepsilon), \varepsilon) = \beta(\varepsilon) S^{-1} \varepsilon > 0. \qquad (26)$$

Таким образом, пара $\gamma = \gamma(\varepsilon)$, $c = c(\beta(\varepsilon), \varepsilon)$, зависящая от векторного параметра $0 < \varepsilon \le 1$, является решением неравенств (7)–(9).

Второй подход связан с корнями характеристического уравнения системы (1). Применяя метод Эйлера [3], запишем частное решение системы (1) в виде $x^{(*)}(t) = ce^{\lambda t}$, где $c \in \mathbb{R}^m$, $c \neq 0$, λ — комплексный параметр. Подставляя $x^{(*)}(t)$ в (1), получим

$$\left(\lambda I - \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda\theta}\, dA(\theta) + B\right) c = 0. \qquad (27)$$

Для существования нетривиального решения $x^{(*)}(t)$ необходимо и достаточно, чтобы число λ и вектор c были соответственно собственным значением и собственным вектором матрицы

$$Q(\lambda) = \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda\theta}\, dA(\theta) - B.$$

Другими словами, λ представляет собой корень характеристического уравнения

$$\det(\lambda I - Q(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \qquad (28)$$

По условию $B - V_A$ является невырожденной М-матрицей, что обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1). Из такой устойчивости следует, что все корни уравнения (28) имеют отрицательные действительные части ($\mathrm{Re}(\lambda) < 0$) [3].

Пусть $\lambda_* < 0$ — вещественный корень уравнения (28) такой, что матрица $Q(\lambda_*)$ имеет соответствующий λ_* собственный вектор $\xi^{(*)} > 0$. Тогда $\gamma_* = -\lambda_*$, $\xi^{(*)}$ — решение неравенств (7) и (8). Действительно, $\lambda_* \in \mathbb{R}$ и $\xi^{(*)} \in \mathbb{R}^m$ ($\lambda_* < 0$, $\xi^{(*)} > 0$) удовлетворяют (27). Из (27) находим, что

$$\left(B - \gamma_* I - \int_{-\tau}^{0} e^{-\gamma_*\theta}\, dA(\theta)\right) \xi^{(*)} = 0. \qquad (29)$$

По условию $\xi^{(*)} > 0$. Далее, $\gamma_* > 0$ и для каждого $1 \le i \le m$ верно $0 < \gamma_* < b_{ii}$ (неравенство вида $\gamma_* \ge b_{jj}$ при некотором $1 \le j \le m$ противоречит соотношению (29) и свойствам матрицы V_A).

Для выполнения неравенства (9) достаточно взять $c = c^{(*)} = \beta_* \xi^{(*)}$, где $\beta_* > 0$ задается с помощью формул, аналогичных (25), (26). Полагаем

$$\beta_* \xi^{(*)} \ge \omega^{(*)} = \sup_{t \in [-\tau, 0]} (e^{\gamma_* t} x^{(0)}(t)),$$

откуда

$$\beta_* = \max\left(\frac{\omega_1^{(*)}}{\xi_1^{(*)}}, \dots, \frac{\omega_m^{(*)}}{\xi_m^{(*)}}\right) > 0, \quad c = c^{(*)} = \beta_* \xi^{(*)}. \qquad (30)$$

Следовательно, если существуют описанные выше λ_* и $\xi^{(*)}$, то пара $\gamma_* = -\lambda_*$, $c^{(*)}$ представляет собой еще одно решение системы неравенств (7)–(9).

Зафиксируем λ_* (соответственно $\gamma_* = -\lambda_*$) и приведем достаточные условия существования $\xi^{(*)}$. Рассмотрим два случая, в каждом из которых используем свойства специально построенных матриц.

Определим матрицу

$$W^{(*)} = \big(w_{ij}^{(*)}\big) = B - \gamma_* I - \int\limits_{-\tau}^{0} e^{-\gamma_*\theta}\, dA(\theta)$$

с элементами $w_{ij}^{(*)} \leq 0$ для всех $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$. По построению $W^{(*)}$ вырожденная. Примем, что $W^{(*)}$ является неразложимой M-матрицей. Тогда существует $\xi^{(*)} \in \mathbb{R}^m$, $\xi^{(*)} > 0$, такой, что $W^{(*)}\xi^{(*)} = 0$, т. е. $\xi^{(*)}$ удовлетворяет (29).

Воспользуемся далее аналогом теоремы Перрона — Фробениуса для квазинеотрицательных матриц [6, 11, 12]. Известен следующий результат, доказательство которого можно найти, например, в [12].

Лемма 3. *Квазинеотрицательная неразложимая матрица имеет такой вещественный характеристический корень r, что для всех остальных характеристических корней λ имеет место неравенство $\mathrm{Re}(\lambda) < r$. Соответствующий правый собственный вектор может быть выбран положительным.*

Указанный в лемме 3 характеристический корень r называется *перроновым корнем неразложимой квазинеотрицательной матрицы.*

Обратимся к матрице $Q(\lambda_*)$, которая по построению квазинеотрицательна. Предположим, что $Q(\lambda_*)$ — неразложимая матрица, а λ_* является ее перроновым корнем. Тогда существует собственный вектор $\xi^{(*)} > 0$ матрицы $Q(\lambda_*)$, соответствующий перронову корню, другими словами, найдется $\xi^{(*)} \in \mathbb{R}^m$, $\xi^{(*)} > 0$, такой, что $(\lambda_* I - Q^{(*)})\xi^{(*)} = 0$. Подставляя $\lambda_* = -\gamma_*$ и $\xi^{(*)}$ в (27), убеждаемся в справедливости (29).

Объединяя полученные результаты, приходим к утверждению.

Лемма 4. *Пусть $B - V_A$ — невырожденная* M*-матрица. Тогда существуют $\gamma \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющие неравенствам* (7)–(9). *В качестве решения этих неравенств можно взять константу $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ и вектор $c = c(\beta(\varepsilon), \varepsilon)$, зависящие от векторного параметра ε и заданные формулами* (24)–(26). *Еще одно решение неравенств* (7)–(9) *может быть представлено в виде константы $\gamma_* = -\lambda_*$ и вектора $c^{(*)}$, определенных формулами* (28)–(30), *при условии, что матрица $Q(\lambda_*)$ имеет собственный вектор $\xi^{(*)} > 0$, соответствующий собственному значению λ_*.*

Используя приведенные выше леммы, можем записать основной результат.

Теорема. *Пусть выполнены все предположения относительно матриц и начальных функций, входящих в задачу* (1), (2). *Тогда если $B - V_A$ — невырожденная* M*-матрица, то для решения $x(t)$ задачи* (1), (2) *справедлива двусторонняя оценка*

$$0 \leq x(t) \leq c\, e^{-\gamma\, t}, \quad t \geq 0,$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяют неравенствам (7)–(9).

3. Примеры

Пример 1. Приведем решение неравенств (7)–(9) для случая $m = 1$. Задача Коши имеет вид

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \int_{-\tau}^{0} x_1(t+\theta)\, da_{11}(\theta) - b_{11}x_1(t), \quad t > 0, \tag{31}$$

$$x_1(t) = x_1^{(0)}(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{32}$$

Полагаем, что

$$V_{a_{11}} = \int_{-\tau}^{0} da_{11}(\theta) = a_{11}(0) - a_{11}(-\tau) > 0$$

и выполнено неравенство $b_{11} > V_{a_{11}}$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость решения $x_1(t) \equiv 0$ уравнения (31). Начальная функция в (32) такова, что $x_1^{(0)}(t) \geq 0$, $x_1^{(0)}(t) \not\equiv 0$, $t \in [-\tau, 0]$. Требуется найти $\gamma \in \mathbb{R}$ и $c_1 \in \mathbb{R}$ как решение системы

$$0 < \gamma < b_{11}, \quad \left(b_{11} - \gamma - \int_{-\tau}^{0} e^{-\gamma\theta}\, da_{11}(\theta) \right) c_1 \geq 0, \tag{33}$$

$$c_1 > 0, \quad c_1 \geq \sup_{t\in[-\tau,0]} \bigl(e^{\gamma t} x_1^{(0)}(t)\bigr). \tag{34}$$

Поскольку в (33), (34) ищется $c_1 > 0$, то, рассматривая (33), параметр γ можно выбрать как корень γ_* уравнения

$$b_{11} - \gamma = \int_{-\tau}^{0} e^{-\gamma\theta}\, da_{11}(\theta), \quad 0 < \gamma < b_{11}.$$

Видно, что такой $0 < \gamma_* < b_{11}$ единствен. Полагаем

$$c_1 = c_1^{(*)} = \sup_{t\in[-\tau,0]} \bigl(e^{\gamma_* t} x_1^{(0)}(t)\bigr) > 0$$

и получаем решение системы (33), (34) в виде пары γ_*, $c_1^{(*)}$. Следовательно, для всех $t \geq 0$ справедлива оценка на решение $x_1(t)$ задачи (31), (32): $0 \leq x_1(t) \leq c_1^{(*)} \exp(-\gamma_* t)$.

Пример 2. Рассмотрим задачу (1), (2) следующего вида:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \int_{-1}^{0} x_2(t+\theta)\, d\theta - 1.5\, x_1(t), \tag{35}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 0.5\, x_1(t) + 0.3\, x_1(t-1) - 1.2\, x_2(t), \quad t > 0, \tag{36}$$

$$x_1(t) = x_1^{(0)}(t) = 10, \quad x_2(t) = x_2^{(0)}(t) = 15, \quad t \in [-1, 0]. \tag{37}$$

Уравнения (35), (36) могут быть записаны в виде (1) относительно $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, $t \geq 0$, если положить

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ a_{21}(\theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{pmatrix},$$

где функция $a_{21}(\theta)$ такова, что $a_{21}(-1) = 0$, $a_{21}(\theta) = 0.3$, $-1 < \theta < 0$, $a_{21}(0) = 0.8$. Все угловые миноры матрицы

$$B - V_A = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 \\ -0.8 & 1.2 \end{pmatrix}$$

положительны, следовательно, она является невырожденной М-матрицей.

Перейдем к построению экспоненциальных оценок на решение $x(t)$ задачи (35)–(37). Обратимся к семейству решений из первого подхода. Зададим $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T = (0.25, 0.7)^T$. Тогда $\xi^{(\varepsilon)} = \left(\xi_1^{(\varepsilon)}, \xi_2^{(\varepsilon)}\right)^T = (1, 1.25)^T$. Уравнения (24) принимают вид

$$0.2 - 0.8\,\gamma = \left(\frac{e^\gamma - 1}{\gamma} - 1\right), \quad 0.7 - 1.25\,\gamma = 0.3\,(e^\gamma - 1), \quad 0 < \gamma < 1.2.$$

Меньший из корней этих уравнений равен $\gamma = \gamma_\varepsilon = 0.1505$ (с округлением до четвертого знака). Используя формулы (25) и (26), находим, что

$$\omega^{(\varepsilon)} = (10, 15)^T, \quad \beta(\varepsilon) = 12, \quad c(\beta(\varepsilon), \varepsilon) = (12, 15)^T.$$

В итоге получаем

$$0 \leq x(t) \leq u^{(1)}(t) = (12, 15)^T \cdot e^{-0.1505t}, \quad t \geq 0. \tag{38}$$

Построим оценку на $x(t)$, опираясь на вещественные корни λ характеристического уравнения (28) (второй подход). Полагая, что $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$, приходим к уравнению

$$\det(\lambda I - Q(\lambda)) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1.5 & -(1 - e^\lambda)/\lambda \\ -0.5 - 0.3\,e^{-\lambda} & \lambda + 1.2 \end{pmatrix} = 0.$$

Обозначая $\gamma = -\lambda$, получаем

$$(1.5 - \gamma)(1.2 - \gamma) = \frac{e^\gamma - 1}{\gamma}(0.5 + 0.3\,e^\gamma), \quad \gamma > 0. \tag{39}$$

Поскольку γ должен удовлетворять неравенству (7), следует искать корень γ_* уравнения (39) такой, что $0 < \gamma_* < 1.2$. Из вида функций, входящих в (39), вытекает, что такой корень γ_* существует, единствен и с точностью до четвертого знака $\gamma_* = 0.3078$. Решая систему (29) относительно $\xi^{(*)} = \left(\xi_1^{(*)}, \xi_2^{(*)}\right)^T > 0$, находим, что

$$\xi_1^{(*)} = \frac{1}{1 - 1.5\gamma_*} \cdot \frac{e^{\gamma_*} - 1}{\gamma_*} = 0.9822 > 0, \quad \xi_2^{(*)} = 1 > 0.$$

Имеем

$$\omega^{(*)} = (10, 15)^T, \quad \beta_* = 15, \quad c^{(*)} = (14.733, 15)^T.$$

Таким образом, в дополнение к (38) получаем еще одну оценку

$$0 \leq x(t) \leq u^{(2)}(t) = (14.733, 15)^T \cdot e^{-0.3078t}, \quad t \geq 0. \tag{40}$$

В табл. 1 представлены результаты численного решения задачи (35)–(37) и числовые значения оценок $u^{(1)}(t)$, $u^{(2)}(t)$, $0 \le t \le 8$ (в логарифмической форме). Для нахождения численного решения задачи (35)–(37) использовалась программа «dde23» пакета Матлаб. Система (35), (36) была дополнена вспомогательной переменной

$$x_3(t) = \int_{-1}^{0} x_2(t+\theta)\, d\theta = \int_{t-1}^{t} x_2(s)\, ds, \quad t \ge 0,$$

удовлетворяющей соотношениям

$$x_3(0) = \int_{-1}^{0} x_2^{(0)}(s)\, ds = 15, \quad \frac{dx_3(t)}{dt} = x_2(t) - x_2(t-1), \quad t > 0.$$

Результаты вычислений, представленные в табл. 1, указывают на заметное различие между $x(t)$ и $u^{(1)}(t)$ при $3 \le t \le 8$, что обусловлено относительно низким темпом $\gamma = 0.1505$ снижения компонент $u^{(1)}(t)$. Оценка $u^{(2)}(t)$ при $3 \le t \le 8$ имеет схожую с $x(t)$ динамику, поскольку разница между $\ln u_i^{(2)}(t)$ и $\ln x_i(t)$ практически равна константе, $i = 1, 2$. Для $0 \le t \le 1.2$ различие между $x(t)$ и $u^{(2)}(t)$ объясняется завышенным значением компоненты $c_1^{(*)} = 14.733$ по отношению к начальному значению $x_1(0) = 10$ и значению компоненты $c_1(\beta(\varepsilon), \varepsilon) = 12$.

Таблица 1. Значения $\ln x_i(t)$, $\ln u_i^{(1)}(t)$, $\ln u_i^{(2)}(t)$, $i = 1, 2$

t	$\ln x_1(t)$	$\ln u_1^{(1)}(t)$	$\ln u_1^{(2)}(t)$	$\ln x_2(t)$	$\ln u_2^{(1)}(t)$	$\ln u_2^{(2)}(t)$
0.0	2.3026	2.4849	2.6901	2.7081	2.7081	2.7081
0.2	2.3016	2.4548	2.6285	2.5826	2.6780	2.6465
0.4	2.2950	2.4247	2.5670	2.4710	2.6479	2.5849
0.8	2.2521	2.3645	2.4438	2.2857	2.5877	2.4618
1.2	2.1601	2.3043	2.3207	2.1387	2.5275	2.3387
2.0	1.9010	2.1839	2.0745	1.8986	2.4071	2.0925
3.0	1.5836	2.0334	1.7667	1.6045	2.2566	1.7847
4.0	1.2808	1.8829	1.4589	1.2983	2.1061	1.4769
5.0	0.9763	1.7324	1.1511	0.9928	1.9556	1.1691
6.0	0.6711	1.5819	0.8433	0.6880	1.8051	0.8613
7.0	0.3661	1.4314	0.5355	0.3830	1.6546	0.5535
8.0	0.0612	1.2809	0.2277	0.0780	1.5041	0.2457

Заключение

В работе представлен подход к построению двусторонних оценок на решения задачи Коши для дифференциальных уравнений Важевского с запаздыванием при неотрицательных начальных данных. Задача нахождения верхних оценок в экспоненциальной форме опирается на свойства невырожденных М-матриц и сводится к решению нелинейных систем неравенств и уравнений относительно параметров этих оценок. Приведено достаточно простое семейство решений указанных систем, в котором один из параметров может быть найден с помощью несложных численных методов, а вектор остальных параметров — решение системы линейных уравнений с невырожденной M-матрицей и специальной правой частью. Еще одно решение связано с нахождением вещественного корня характеристического уравнения системы (1), которому должен соответствовать положительный собственный вектор некоторой матрицы, построенной на основе матриц, входящих в (1). Приведены достаточные условия существования такого вещественного корня и соответствующего ему собственного вектора, опирающиеся на свойства вырожденных неразложимых M-матриц и перронова корня неразложимых квазинеотрицательных матриц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
2. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957.
3. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
4. *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1392–1407.
5. *Оболенский А. Ю.* Об устойчивости решений автономных систем Важевского с запаздыванием // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35. С. 574–579.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. 2-е изд. М.: Наука, 1966.
7. *Berman A., Plemmons R. J.* Nonnegative matrices in the mathematical sciences. New York: Acad. Press, 1979.
8. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
9. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.
10. *Курпель Н. С., Шувар Б. А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения. Киев: Наук. думка, 1980.
11. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
12. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.

Статья поступила 17 декабря 2012 г.

Перцев Николай Викторович
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
homlab@ya.ru