Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 517.521

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ СУММ ФУРЬЕ — ХААРА В ДВОИЧНО–ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧКАХ РАЗРЫВА.

М. Г. Магомед-Касумов

Аннотация. Получено точное описание поведения сумм Фурье — Хаара в рациональных двоично-иррациональных точках разрыва функций ограниченной вариации.

Ключевые слова: система Хаара, сходимость рядов Хаара в точке.

1. Введение

Как известно [1], функции Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определяются следующим образом:

$$\chi_1(x) = 1, \quad \chi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \overline{\Delta}_n, \\ 2^{k/2}, & x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2}, & x \in \Delta_n^-, \end{cases} \tag{1}$$

где $n = 2^k + i, k = 0, 1, \dots, i = 1, \dots, 2^k$, а Δ_n — двоичный интервал вида $\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$, $\overline{\Delta}_n$ — замыкание интервала Δ_n, а Δ_n^+, Δ_n^- — правая и левая половины интервала Δ_n соответственно.

Значения в точках разрыва и на концах выбираются так, чтобы выполнялись равенства

$$\chi_n(x) = \frac{1}{2}(\chi(x+0) + \chi(x-0)),\ x \in (0,1);\ \chi_n(0) = \chi_n(+0),\ \chi_n(1) = \chi_n(1-0).$$

Функции Хаара $\chi_n(x)$ с номерами $n = 2^k + i$, $i = 1, \dots, 2^k$, называют *функциями k-й пачки.*

Частичные суммы Фурье $S_N(f, x)$ для функции $f(x)$ определяются, как обычно, следующим образом:

$$S_N(f, x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_n(x), \quad c_n = \int\limits_0^1 f(t)\chi_n(t)\,dt. \tag{2}$$

Вопросы сходимости этих сумм рассматривались многими авторами (см., например, [2, 3] и цитированную там литературу). В частности, сначала

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00191–а).

Фабер [4], а затем П. Л. Ульянов [3, с. 368] показали, что для функций ограниченной вариации суммы Фурье — Хаара (2) обладают следующими свойствами.

1°. Суммы (2) сходятся во всех точках непрерывности функции $f(t)$.

2°. Суммы (2) сходятся во всех двоично-рациональных точках.

3°. Суммы (2) существенно расходятся в каждой двоично-иррациональной точке разрыва функции $f(t)$.

В настоящей статье более подробно рассмотрено свойство 3°, когда двоично-иррациональная точка разрыва рациональна. В этом случае удается точно определить структуру последовательности частичных сумм Фурье — Хаара в данной точке.

2. Вспомогательные утверждения

Исследуем поведение частичных сумм Фурье по системе Хаара в рациональных двоично-иррациональных точках разрыва первого рода со скачком функций следующего вида:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < x_0, \\ 1/2, & x = x_0, \qquad\qquad 0 < x_0 < 1. \\ 1, & x_0 < x \le 1, \end{cases} \tag{3}$$

Прежде всего запишем x_0 в двоичной системе счисления:

$$x_0 = 0{,}b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{2^j}, \quad b_j \in \{0,1\}. \tag{4}$$

Как известно, двоичная дробь рационального числа является периодической. Допустим, что период x_0 равен n. Без ограничения общности можно считать x_0 чисто периодической дробью. Тогда

$$(\forall j \ge 1)\ b_j = b_{j+n} \Leftrightarrow (\forall j \ge 1 \forall l = 0,1,\dots)\ b_j = b_{j+n\cdot l}. \tag{5}$$

Для изучения поведения частичных сумм $S_N(f,x)$ для указанной выше функции (3) достаточно ограничиться рассмотрением сумм с номерами $N = 2^k$. Это следует из того, что среди коэффициентов Фурье c_n каждой пачки $\{c_n\}_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}$ только один коэффициент отличен от нуля. Действительно, так как x_0 двоично-иррациональное, при любом k точка x_0 будет лежать внутри какого-нибудь двоичного интервала Δ_k^i (иными словами, ни при каком k точка x_0 не попадет на границу двоичного интервала Δ_k^i). Обозначим через $i_0 = i_0(k)$ номер того двоичного интервала в k-й пачке, который будет содержать точку x_0. Рассмотрим коэффициенты k-й пачки $\{c_n\}_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}$. Используя определение функций Хаара (1) и формулу для определения коэффициентов Фурье (2), получим

$$c_n = \int\limits_{\Delta_k^i} f(x)\chi_n(x)\,dx.$$

Для всех $i \ne i_0$ функция $f(x)$ постоянна на Δ_k^i. Тогда

$$c_n = \mathrm{const} \int\limits_{\Delta_k^i} \chi_n(x)\,dx = 0.$$

Если $i = i_0$, то очевидно, что

$$c_n = \int\limits_{x_0}^{\frac{i}{2^k}} \chi_n(x)\,dx \neq 0.$$

Следовательно, для всех $N = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, суммы S_N равны S_{2^k}, когда $N < 2^k + i_0$, и $S_{2^{k+1}}$, когда $N \geq 2^k + i_0$.

Как известно, частичные суммы $S_{2^k}(f, x)$ постоянны на двоичных интервалах Δ_k^i [3]. Обозначим через s_k значение $S_{2^k}(f, x)$ на $\Delta_k^{i_0}$: $s_k \doteq S_{2^k}(f, x)$, $x \in \Delta_k^{i_0}$.

Таким образом, задача свелась к изучению числовой последовательности s_k.

Лемма. *Если x_0 — рациональное двоично-иррациональное число, двоичное разложение (4) которого имеет период длины n, то числовая последовательность $s_k = S_{2^k}(f, x)$, $x \in \Delta_k^{i_0}$, представляет собой объединение n различных стационарных последовательностей, а именно последовательность s_k имеет вид $a_1, a_2, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, где $a_k = 1 - y_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $y_k = (0{,}b_{k+1}b_{k+2}\dots)_2$.*

Доказательство. Для частичных сумм Фурье — Хаара с номерами $N = 2^k$ справедлива формула [3]

$$S_{2^k}(f, x) = 2^k \int\limits_{\Delta_k^i} f(t)\,dt, \quad x \in \Delta_k^i.$$

Тогда

$$s_k = 2^k \int\limits_{\Delta_k^{i_0}} f(t)\,dt = 2^k \int\limits_{x_0}^{\frac{i_0}{2^k}} dt = 2^k \left(\frac{i_0}{2^k} - x_0\right), \tag{6}$$

где i_0 — номер того двоичного интервала, который содержит точку x_0.

Принадлежность $x_0 \in \Delta_k^{i_0}$ означает двойное неравенство $\frac{i_0 - 1}{2^k} < x_0 < \frac{i_0}{2^k}$, из которого следует, что $i_0 = [2^k x_0] + 1$, где $[x]$ — целая часть x. Подставим найденное значение i_0 в формулу (6):

$$s_k = i_0 - 2^k x_0 = 1 - (2^k x_0 - [2^k x_0]).$$

Учитывая представление (4) точки x_0, найдем $[2^k x_0]$:

$$2^k x_0 = 2^k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{k} b_j 2^{k-j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{b_j}{2^{j-k}} = \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j} 2^j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{j+k}}{2^j}.$$

Первая сумма является целым числом, вторая — меньше единицы. В самом деле,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{j+k}}{2^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1, \tag{7}$$

но b_{j+k} не могут быть все равны 1, так как это означало бы, что в двоичном разложении точки x_0 начиная с номера $k+1$ идут все 1, а это противоречит ее двоичной иррациональности. Следовательно, равенство в (7) невозможно, и

$$[2^k x_0] = \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j} 2^j.$$

Подставив полученное выражение для $[2^k x_0]$ в (6), имеем

$$s_k = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{j+k}}{2^j} = 1 - (0{,}b_{k+1}b_{k+2}\dots)_2 = 1 - y_k. \tag{8}$$

Из (8) видно, что характер последовательности s_k будет определяться точкой $x_0 = 0{,}b_1b_2\dots$.

Изучим структуру последовательности $y_k = 0{,}b_{k+1}b_{k+2}\dots$. Для этого рассмотрим ее подпоследовательности y_{k_l} следующего вида: $k_l = nl + p$, p любое фиксированное из $\{0, 1, \dots, n-1\}$, n — длина периода x_0. Покажем, что эти подпоследовательности стационарны. Для этого воспользуемся свойством периодичности (5) точки x_0:

$$y_{nl+p} = 0{,}b_{nl+p+1}b_{nl+p+2}\dots = 0{,}b_{p+1}b_{p+2}\dots = y_p.$$

Таким образом, последовательность y_k имеет вид $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, \dots$, т. е. состоит из n стационарных последовательностей. Осталось показать, что все y_k, $k = 0, \dots, n-1$, различны. Допустим, что это не так и $y_i = y_j$, $0 \le i < j \le n-1$:

$$y_i = 0{,}b_{i+1}b_{i+2}\dots = 0{,}b_{j+1}b_{j+2}\dots = y_j.$$

Следовательно, $b_{i+k} = b_{j+k}$, $k = 1, 2, \dots$. Переобозначив индексы, получим

$$b_m = b_{m+j-i}, \quad m \ge i+1 \quad (m = i+k).$$

Последнее равенство означает, что точка x_0 имеет период $j - i < n$, что противоречит условию леммы. □

Замечание. Как следует из доказательства, функция (3) может принимать в точке x_0 любое значение или даже быть вовсе не определенной, от этого лемма не перестает быть справедливой.

Например, $x_0 = \frac{1}{3}$ в двоичном разложении представляется следующей периодической дробью: $\frac{1}{3} = 0{,}010101\dots = 0{,}(01)$. Так как период дроби равен двум, последовательность s_k имеет вид $a_1, a_2, a_1, a_2, \dots$, где $a_1 = 1 - y_0 = 1 - (0{,}010101\dots)_2 = 1 - (0{,}(01))_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $a_2 = 1 - y_1 = 1 - (0{,}1010101\dots)_2 = 1 - (0{,}1(01))_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Таким образом, для функции (3) при $x_0 = \frac{1}{3}$ частичные суммы Фурье — Хаара в точке x_0 принимают только два значения: $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

Отметим, что лемма легко распространяется на случай функции скачков более общего вида:

$$g(x) = \begin{cases} a, & 0 \le x < x_0, \\ (a+b)/2, & x = x_0, \\ b, & x_0 < x \le 1, \end{cases} \qquad 0 < x_0 < 1. \tag{9}$$

В самом деле, $g(x)$ можно выразить через $f(x)$: $g(x) = (b-a)f(x) + a$. Тогда, воспользовавшись свойством линейности оператора S_m и тем, что $S_m(c) = c$ для любых $m \ge 1, c \in \mathbb{R}$, получим

$$S_m(g, x) = (b-a)S_m(f, x) + a,$$

откуда, используя лемму и применяемые в ней обозначения, выводим следующее соотношение:

$$s_k^{(g)} = (b-a)s_k^{(f)} + a = (b-a)a_{k \bmod n+1} + a = (b-a)(1 - y_{k \bmod n}) + a, \tag{10}$$

где

$$s_k^{(\varphi)} = S_{2^k}(\varphi, x), \quad x \in \Delta_k^{i_0}. \tag{11}$$

3. Основной результат

Теорема. *Если x_0 — рациональная двоично-иррациональная точка, двоичное разложение (4) которой имеет период длины n, то числовая последовательность $s_k^{(f)} = S_{2^k}(f,x)$, $x \in \Delta_k^{i_0}$, для любой функции ограниченной вариации f со скачком в точке x_0 представляет собой объединение n сходящихся последовательностей:*

$$s_{nl+p}^{(f)} \to f(x_0+0) - y_p(f(x_0+0) - f(x_0-0)), \quad l \to \infty,\ 0 \le p < n,$$

где $y_p = (0{,}b_{p+1}b_{p+2}\ldots)_2$.

Замечание. Так как x_0 — двоично-иррациональное число, $0 < y_p < 1$ для любого $0 \le p < n$. Следовательно, ни одна из подпоследовательностей не будет сходиться ни к $f(x_0-0)$, ни к $f(x_0+0)$.

Доказательство. Пусть $d = f(x_0+0) - f(x_0-0)$. Можно считать x_0 регулярной точкой разрыва, т. е. $f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. Введем функцию скачков

$$\psi(x) = \begin{cases} -d/2, & 0 \le x < x_0, \\ 0, & x = x_0, \\ d/2, & x_0 < x \le 1, \end{cases} \qquad 0 < x_0 < 1.$$

Легко проверить, что функция $\varphi(x) = f(x) - \psi(x)$ непрерывна в точке x_0. Таким образом, $f(x)$ можно представить как сумму непрерывной функции и функции скачков:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x). \tag{12}$$

Рассмотрим поведение частичных сумм функции $f(x)$ в точке x_0. Используя представление (12) и обозначение (11), можно написать следующее равенство:

$$s_k^{(f)} = s_k^{(\varphi)} + s_k^{(\psi)}. \tag{13}$$

Как показано выше, $s_k^{(\psi)}$ представляет собой объединение n стационарных последовательностей (напомним, через n обозначалась длина периода двоичного разложения точки разрыва x_0). Что касается первого слагаемого, то $s_k^{(\varphi)} \to \varphi(x_0)$ при $k \to \infty$, так как x_0 является точкой непрерывности функции $\varphi(x)$ (см. свойство 1°).

Рассматривая подпоследовательности $k_l = nl + p$, $0 \le p < n$, получим

$$s_{nl+p}^{(f)} \to \varphi(x_0) + s_p^{(\psi)}, \quad l \to \infty.$$

Применив формулу (10), $s_p^{(\psi)}$ можно представить следующим образом:

$$s_p^{(\psi)} = d(1/2 - y_p) = (f(x_0+0) - f(x_0-0))(1/2 - (0{,}b_{p+1}b_{p+2}\ldots)_2).$$

Учитывая, что $\varphi(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, окончательно получим $s_{nl+p}^{(f)} \to f(x_0 + 0) - dy_p$. $\square$

Автор выражает благодарность И. И. Шарапудинову за постановку задачи и ценные указания при ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
2. *Голубов Б. И.* Ряды по системе Хаара // Математика. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 109–146. (Итоги науки и техники).
3. *Ульянов П. Л.* О рядах по системе Хаара // Мат. сб. 1964. Т. 63, № 3. С. 356–391.
4. *Faber G.* Uber die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Deutsche Math.-Verl. 1910. Bd 19. S. 104–112.

Статья поступила 20 августа 2012 г., окончательный вариант — 5 августа 2013 г.

Магомед-Касумов Магомедрасул Грозбекович
Дагестанский научный центр РАН, Отдел математики и информатики,
ул. М. Гаджиева, 45, Махачкала 367001, Дагестан;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
`rasuldev@gmail.com`