Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 517.95

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА В СТАРШЕМ ЧЛЕНЕ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ФИЛЬТРАЦИИ

А. Ш. Любанова

Аннотация. Рассматривается обратная задача идентификации старшего коэффициента в линейном псевдопараболическом уравнении при интегральном условии переопределения на границе области. Доказывается локальная теорема существования и единственности сильного решения. В частном случае результаты позволяют решить задачу определения интенсивности обмена жидкостью между трещинами и порами в модельном уравнении фильтрации в трещиноватой среде.

Ключевые слова: фильтрация, обратные задачи для уравнений в частных производных, псевдопараболическое уравнение, теорема существования и единственности, краевая задача.

1. Введение

Статья посвящена исследованию коэффициентных обратных задач для псевдопараболических уравнений вида

$$(u + L_1 u)_t + L_2 u = f \tag{1.1}$$

с дифференциальными операторами L_1 и L_2 четного порядка по пространственным переменным. Уравнения такого типа возникают при моделировании процессов теплопереноса [1], фильтрации в трещиноватых средах [2], волновых процессов [3] и квазистационарных процессов в кристаллических полупроводниках [4]. Аналогичные уравнения возникают в математических моделях двухфазной фильтрации жидкости в пористых средах с учетом капиллярных эффектов [5, 6] (более подробный обзор можно найти в [4, 7]). Старшие коэффициенты операторов L_1 и L_2 описывают физические свойства среды (проницаемость, сжимаемость, тепло- или электропроводность и т. д.).

Прямые краевые задачи для линейных и нелинейных уравнений (1.1) обсуждались во многих работах (см. ссылки, указанные выше, а также [8–11]). В частности, Гаевский, Грегер и Захариас [8] установили разрешимость задач Коши для операторно-дифференциальных псевдопараболических уравнений в абстрактных банаховых пространствах. М. О. Корпусов, А. Г. Свешников и др. [4] исследовали условия разрушения решения линейных и нелинейных уравнений (1.1). В [7] Шоуолтер и Тинг доказали существование и единственность глобального сильного решения линейного уравнения (1.1) с эллиптическими операторами L_1 и L_2 второго порядка. Они также исследовали гладкость решения и его поведение при $t \to +\infty$. В [9, 11] найдены достаточные условия на входные данные и операторы L_1 и L_2, при которых справедливы теоремы сравнения для (1.1). Ранделл и Стечер показали в [11], что, вообще говоря, решение уравнения (1.1) не удовлетворяет принципу максимума даже в случае, когда операторы второго порядка L_1 и L_2 эллиптические и $L_1 = L_2$.

Исследование обратных задач для псевдопараболических уравнений началось в 1980-х гг. Первый результат, полученный Ранделлом [12], относится к обратным задачам идентификации неизвестной функции источника f в уравнении (1.1) с линейными операторами L_1 и L_2, $L_1 = L_2$. Ранделл доказал глобальные теоремы существования и единственности для случаев, когда f зависит только от x или t. Другой тип обратных задач для (1.1) рассмотрен в [13, 14]. Эти работы посвящены задачам восстановления ядра в интегральном члене уравнения (1.1) с интегродифференциальным оператором L_2. Отметим также результаты [15–17], касающиеся коэффициентных обратных задач для (1.1). В [15] доказана теорема единственности и построен алгоритм решения обратной задачи отыскания функций $u(t,x)$, $b(y)$, $c(y)$ и константы a в уравнении (1.1) вида

$$u_t - \Delta u_t = a\Delta u + b(y)u_y + c(y) + \delta(t,x,y) \quad \text{для } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0,$$

при заданных $u(t,x,0)$, $u_y(t,x,0)$ и $u(0,x,y)$. Здесь $\delta(t,x,y)$ — дельта-функция Дирака, Δ — оператор Лапласа. В [16, 17] рассматривалась обратная задача нахождения неизвестного коэффициента k, зависящего от времени, в уравнении

$$u_t + (\eta M u)_t + kMu = f \tag{1.2}$$

по интегральным данным на границе, где M — дифференциальный оператор второго порядка по пространственным переменным, η и f заданы. В [17] установлены достаточные условия разрешимости и единственности решения данной задачи. В [16] обсуждались вопросы аппроксимации обратной задачи для параболического уравнения соответствующей задачей для (1.2) при $\eta \to 0$. Обратная задача решалась в ограниченной области. Задачи идентификации коэффициентов оператора L_1 в (1.1) ранее не рассматривались.

В данной статье устанавливаются условия разрешимости и единственности решения обратной задачи отыскания неизвестного коэффициента $\eta = \eta(t)$ в (1.2) по дополнительной информации на границе при заданной функции f и $k = 1$ (см. задачу (2.8)–(2.12)). Исследование будет проводиться в два этапа. Первый этап включает в себя обсуждение постановки обратной задачи и предварительные результаты для соответствующих прямых краевых задач. На втором этапе будет доказана теорема существования и единственности решения обратной задачи.

2. Постановка задачи и предварительные результаты

Пусть задача рассматривается в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ограниченной поверхностью $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω, T — действительное число и $Q_T = \Omega \times (0,T)$ — цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$ с боковой поверхностью $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Точки области Ω будем обозначать через x, точки отрезка $[0,T]$ — через t, а точки цилиндра Q_T — через (t,x).

Поскольку физические процессы, моделируемые уравнением (1.2), протекают в ограниченных областях, постановка краевых задач для (1.2) должна включать в себя начальные и граничные условия, а обратные задачи — еще и условия переопределения. Для того чтобы сформулировать их математически, обратимся к модели фильтрации слабо сжимаемых жидкостей в трещиноватых средах [2]:

$$\begin{cases} \nu\Delta u_1 + \alpha(u_2 - u_1) = 0, \\ \mu(m_0 d_1 + d_2)u_{2t} + \alpha(u_2 - u_1) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

$u_1 = u_1(t,x)$, $u_2 = u_2(t,x)$ — давление жидкости в трещинах и порах соответственно; d_1 и d_2 — коэффициенты сжимаемости жидкости блоков; m_0 — пористость блоков при стандартном давлении; μ — вязкость жидкости; ν — коэффициент проницаемости трещин. Безразмерный коэффициент α характеризует интенсивность обмена жидкостью между блоками и трещинами.

Исключив u_2 из (2.1), придем к псевдопараболическому уравнению для u_1. Поскольку интенсивность обмена жидкостью между трещинами и порами меняется со временем, коэффициент α можно считать функцией, зависящей от времени, т. е. $\alpha = \alpha(t)$. В этом случае для u_1 получаем уравнение

$$u_{1t} - \Delta((\eta(t)u_1)_t + ku_1) = 0, \quad k = \frac{\nu}{\mu(m_0 d_1 + d_2)},\ \eta = \frac{\nu}{\alpha}. \tag{2.2}$$

Начальные условия для u_1 имеют вид [2]

$$-\eta(0)\Delta u_1(0,x) + u_1(0,x) = u_0(x). \tag{2.3}$$

Здесь $u_0(x)$ — известная функция, определенная в $\overline{\Omega}$. Так как первое уравнение (2.1) эллиптическое, основные граничные условия для u_1 могут быть записаны как

$$\sigma_1\nu\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} + \sigma_2 u_1 = \beta(t,x), \quad (t,x) \in \overline{S}_T, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к $\partial\Omega$, функции β и σ_i, $i = 1,2$, заданы. При $\sigma_1 = 0$ (2.4) является условием Дирихле, а при $\sigma_1 \neq 0$ — условием Неймана ($\sigma_2 = 0$) или смешанным условием ($\sigma_2 \neq 0$). Наряду с (2.4) можно использовать граничное условие для u_1 в другой форме:

$$\sigma_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}((\eta(t)u_1)_t + ku_1) + \sigma_2((\eta(t)u_1)_t + ku_1) = (\eta(t)\beta)_t + k\beta(t,x), \quad (t,x) \in \overline{S}_T. \tag{2.5}$$

При $\sigma_1 = 0$ такие условия рассматривались в [5].

Обратная задача идентификации неизвестного коэффициента $\eta(t)$ в уравнении (2.2) с краевыми условиями (2.3), (2.4) (или (2.5)) недоопределена. Для отыскания $\eta(t)$ необходимо дополнительное условие, которое может быть сформулировано на основе граничных данных интегрального типа. В соответствии с (2.5) это приводит к интегральному условию переопределения

$$\int_\Gamma \left[((\eta(t)u_1)_t + ku_1)\omega_1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}((\eta(t)u_1)_t + ku_1)\omega_2\right] ds + (\mu_1\eta(t))' + \gamma_1\eta(t) = \psi_1(t). \tag{2.6}$$

Здесь $\omega_i = \omega_i(t,s)$, $\mu_1 = \mu_1(t)$, $\gamma_1 = \gamma(t)$ и $\psi_1 = \psi_1(t)$ — заданные функции, $x_0 \in \partial\Omega$ и $\Gamma \subseteq \partial\Omega$. В случае задачи Дирихле (2.2)–(2.4) при $\sigma_1 = 0$ после подстановки (2.4) в (2.6) условие переопределения примет вид

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}((\eta(t)u_1)_t + ku_1)\omega_2(t,s)\, ds + (\eta(t)\widetilde{\mu}_1(t))' + \widetilde{\gamma}_1(t)\eta(t) = \widetilde{\psi}_1(t). \tag{2.7}$$

Здесь

$$\widetilde{\mu}_1(t) = \int\limits_\Gamma \beta\omega_1\,ds - \mu_1, \quad \widetilde{\psi}_1(t) = \psi_1(t) - k\int\limits_\Gamma \beta\omega_1\,ds, \quad \widetilde{\gamma}_1(t) = -\int\limits_\Gamma \beta\omega_{1t}\,ds - \gamma_1.$$

Задачи с граничными условиями второго и третьего родов в данной статье не рассматриваются.

При $\omega_2(t,s) \equiv 1$ и $\mu_2 \equiv 0$ интегральное условие (2.7) задает поток жидкости через поверхность Γ, например, общий расход жидкости — через поверхность грунта или скважины. Подобные нелокальные условия использовались для решения задач управления в [10] и обратных задач в [17, 18].

Нетрудно заметить, что начальное условие (2.3) является дифференциальным уравнением относительно функции $u_1(0,x)$ и содержит неизвестный постоянный коэффициент $\eta(0)$. Для определения $\eta(0)$ необходимо дополнительное условие переопределения при $t=0$, согласованное с (2.4) и условием (2.6). В данной статье мы рассматриваем обратную задачу для u_1 с граничным условием Дирихле и интегральным условием переопределения типа (2.6). В этом случае дополнительное условие переопределения при $t=0$ имеет вид

$$\eta(0)\int\limits_\Gamma \frac{\partial u_1(0,s)}{\partial \mathbf{n}}\omega_2(0,s)\,ds + r_1\eta(0) = r_2,$$

где r_1 и r_2 — действительные постоянные.

Соображения, приведенные выше, позволяют дать точную формулировку обратной задачи, исследование корректности которой является основной целью данной статьи.

Введем оператор $M : W_2^1(\Omega) \to \big(W_2^1(\Omega)\big)^*$ вида $M = -\operatorname{div}(\mathscr{M}(x)\nabla) + m(x)I$, где $\mathscr{M}(x) \equiv (m_{ij}(x))$ — матрица функций $m_{ij}(x)$, $i,j = 1,2,\dots,n$, $m(x)$ — скалярная функция, а I — тождественный оператор, и рассмотрим следующую обратную задачу: *при заданных функциях $f(t,x)$, $g(t,x)$, $\beta(t,x)$, $U_0(x)$, $\omega(t,x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и постоянных r_1, r_2 найти пару функций $\{u(t,x),\eta(t)\}$, удовлетворяющих уравнению*

$$(u + \eta(t)Mu)_t + Mu + g(t,x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{2.8}$$

краевым условиям

$$(u + \eta(t)Mu)|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.9}$$

$$u = \beta(t,x), \quad (t,x) \in \overline{S}_T, \tag{2.10}$$

и условиям переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \left(\eta(t)\frac{\partial u}{\partial \overline{N}}\right)_t + \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \right\}\omega(t,s)\,ds + (\eta(t)\varphi_1(t))_t = \varphi_2(t), \quad t \in (0,T], \tag{2.11}$$

$$\eta(0)\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u(0,s)}{\partial \overline{N}}\omega(0,s)\,ds + r_1\eta(0) = r_2. \tag{2.12}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial \overline{N}} = (\mathbf{n}, \mathscr{M}(x)\nabla)$ и $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к $\partial\Omega$.

В дальнейшем будем использовать обозначения: $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ — норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ соответственно; $\|\cdot\|_j$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_j$ — норма в $W_2^j(\Omega)$ и отношение двойственности между $\overset{\circ}{W}{}_2^j(\Omega)$ и $W_2^{-j}(\Omega)$ соответственно ($j = 1,2$).

Будем предполагать, что для оператора M выполняются следующие условия.

I. Функции $m_{ij}(x)$, $\partial m_{ij}/\partial x_l$, $i,j,l = 1,2,\dots,n$, и $m(x)$ ограничены в Ω, M — эллиптический оператор, т. е. существуют положительные константы m_1 и m_2 такие, что для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$m_1\|v\|_1^2 \le \langle Mv, v\rangle_1 \le m_2\|v\|_1^2. \tag{2.13}$$

II. Оператор M самосопряжен, т. е. $m_{ij}(x) = m_{ji}(x)$, $i,j = 1,2,\dots,n$; $m(x) \ge 0$ для всех $x \in \Omega$.

Обозначим через $a(t,x)$, $h^\eta(t,x)$ и $b(t,x)$ решения задач Дирихле

$$Ma = 0 \text{ в } \Omega, \quad a|_{\partial\Omega} = \beta(t,x); \quad Mb = 0 \text{ в } \Omega, \quad b|_{\partial\Omega} = \omega(t,x),$$
$$h^\eta + \eta(0)Mh^\eta = 0 \text{ в } \Omega, \quad h^\eta|_{\partial\Omega} = \omega(t,x), \tag{2.14}$$

и введем дополнительные обозначения:

$$\langle Mv_1, v_2\rangle_{1,M} = (\mathscr{M}(x)\nabla v_1, \nabla v_2) + (m(x)v_1, v_2), \quad v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega);$$
$$\Psi(t) = \langle Ma, b\rangle_{1,M}, \quad F(t,x) = a_t - f(t,x) + g(t,x)a, \quad \Phi(t) = \varphi_2(t) - \Psi(t),$$
$$\overline{\Psi} = \max_{t\in[0,T]} \langle Ma, b\rangle_{1,M}, \quad \overline{\varphi}_1 = \max_{t\in[0,T]} \varphi_1(t), \quad \overline{\Phi} = \max_{t\in[0,T]} |\Phi(t)|.$$

Как известно из теории краевых задач для псевдопараболических уравнений, необходимым условием существования решения задачи (2.8)–(2.12) с неизвестным $\eta(t)$ так же, как и прямой задачи (2.8)–(2.10) с известным $\eta(t)$, является обратимость оператора $I + \eta(t)M$ в начальный момент $t = 0$. В данном случае обратимость оператора $I + \eta(0)M$ эквивалентна однозначной разрешимости обратной задачи отыскания неизвестной постоянной $\eta(0)$ в уравнении (2.9) при условиях (2.10), (2.14).

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия* I, II *и* $\beta(0,x) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $\omega(0,x) \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$, $U_0 \in L^2(\Omega)$; $\beta(0,x)$ *неотрицательна на* $\partial\Omega$*;*

$$r_1 + \Psi(0) > 0; \tag{2.15}$$

$$F_0(x) \equiv a_0(x) - U_0(x) \ge 0; \quad \Phi_0 \equiv r_2 - (F_0, b_0) > 0, \tag{2.16}$$

где $a_0(x) = a(0,x)$, $b_0(x) = b(0,x)$. *Тогда задача* (2.9), (2.10), (2.12) *при* $t = 0$ *имеет решение в классе* $W_2^2(\Omega) \times \mathbb{R}^+$, *где* $\mathbb{R}^+ = \{s \mid s \in \mathbb{R},\ s > 0\}$. *При этом*

$$u(0,x) \le a(0,x) \quad \text{почти для всех } x \in \Omega, \tag{2.17}$$

$$0 < k_0 \equiv \frac{\Phi_0}{r_1 + \Psi(0)} \le \eta(0) \le \frac{r_2k_0m_1 + (1 + k_0m_1)\|F_0\|\|b_0\|}{k_0m_1(r_1 + \Psi(0))} \equiv k_1. \tag{2.18}$$

Если

$$\Phi_0 \ge \gamma\bigl(m_2m_1^{-2}(r_1 + \Psi(0))\|b_0\|\|F_0\|\bigr)^{1/2}, \tag{2.19}$$

где γ *— действительное число,* $\gamma > 1$, *то решение задачи* (2.9), (2.10), (2.12) *при* $t = 0$ *единственно.*

Доказательство. При $\omega = \beta$ теорема представляет собой частный случай результата, установленного в [18]. В общем случае доказательство теоремы почти полностью повторяет этот результат. Поэтому кратко упомянем здесь лишь основные шаги. Следуя идее [18], сведем задачу (2.9), (2.10), (2.12) при

$t = 0$ к эквивалентной задаче с операторным уравнением на $\eta(0)$. Для этого умножим (2.9) на b_0 скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям в первом члене полученного уравнения. С учетом (2.12) и введенных выше обозначений это даст

$$\eta(0)\{r_1 + \Psi(0)\} = r_2 - (F_0, b_0) + (a_0 - u_0, b_0). \tag{2.20}$$

Введем оператор A_0, который каждому элементу $s \in \mathbb{R}^+$ ставит в соответствие элемент $A_0(s) = (r_2 - (F_0, b_0) + (a_0 - v, b_0))(r_1 + \Psi(0))^{-1}$, где $v = v(x)$ — решение задачи (2.9), (2.10) при $t = 0$ с s вместо $\eta(0)$, и перепишем (2.20) как операторное уравнение

$$s = A_0(s). \tag{2.21}$$

Задача (2.9), (2.10), (2.12) при $t = 0$ разрешима тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение (2.21). Применяя рассуждения, приведенные в [18], можно показать, что $v(x)$ удовлетворяет (2.17) при каждом $s \in \mathbb{R}^+$, оператор A_0 непрерывен на отрезке $[k_0, k_1]$ и переводит его в себя. По теореме Брауэра A_0 имеет неподвижную точку $s_0 \in [k_0, k_1]$. Тогда пара $(u_0, \eta(0))$, где u_0 удовлетворяет (2.9), (2.10) при $t = 0$ и $\eta(0) = s_0$, дает решение задачи (2.9), (2.10), (2.12) при $t = 0$ в классе $W_2^2(\Omega) \times \mathbb{R}^+$. При выполнении предположения (2.19) сжимаемость оператора A_0 на $[k_0, k_1]$ гарантирует единственность решения задачи (2.9), (2.10), (2.12) при $t = 0$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи (2.8)–(2.12) опирается на два утверждения для прямой задачи (2.8)–(2.10) с известной функцией $\eta(t)$. Первое утверждение дает достаточные условия однозначной разрешимости прямой задачи (2.8)–(2.10).

Теорема 2.2. *Пусть выполняются предположения* I, II, $\eta \in C^1([0,T])$ *и* $\eta(t) > 0$ *на* $[0,T]$. *Если* $g \in C(\overline{Q}_T)$, $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $U_0 \in L^2(\Omega)$, $\beta \in C^1\big([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega)\big)$, *то существует единственное решение* u *задачи* (2.8)–(2.10), $u \in C^1\big([0,T]; W_2^2(\Omega)\big)$.

Доказательство. В случае $\eta(t) \equiv \mathrm{const}$ существование и единственность решения гарантируется результатами из [7].

Пусть $\eta(t) \neq \mathrm{const}$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} v_t + G(v) = f - a_t - ga, \quad (t,x) \in Q_T, \\ v(0,x) = U_0(x) - a(0,x), \quad x \in \Omega, \end{gathered} \tag{2.22}$$

где $v = (I + \eta(t)M)(u - a)$ и оператор $G : C([0,T]; L^2(\Omega)) \to C([0,T]; L^2(\Omega))$ определяется как $G = M(I + \eta(t)M)^{-1} + g(I + \eta(t)M)^{-1}$. Функция v является решением задачи (2.22) тогда и только тогда, когда функция $u = a + (I + \eta M)^{-1} v$ является решением задачи (2.8)–(2.10). Поэтому утверждение теоремы будет доказано, как только докажем существование и единственность решения задачи (2.22). Из предположений теоремы следует, что оператор G липшиц-непрерывен и $f - a_t - ga \in C([0,T]; L^2(\Omega))$. Поэтому согласно [8, гл. 5, теорема 1.2] задача (2.22) имеет единственное решение $v \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$, а следовательно, и задача (2.8)–(2.10) разрешима единственным образом. При этом $u \in C^1\big([0,T]; W_2^2(\Omega)\big)$. Теорема доказана.

Следующее утверждение относится к теоремам сравнения для псевдопараболических уравнений.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются предположения теоремы* 2.2 *и* $u(t,x)$ — *решение задачи* (2.8)–(2.10) *в классе* $C^1\big([0,T];W_2^2(\Omega)\big)$. *Пусть также* $f(t,x)\geq 0$ *в* $\overline{Q}_T$, $U_0(x)\geq 0$ *в* $\overline{\Omega}$, $\beta(t,x)\geq 0$ *при* $(t,x)\in\overline{S}_T$ *и* $g(t,x)\leq\eta^{-1}(t)$. *Тогда* $u(t,x)\geq 0$ *п. в. в* $\overline{Q}_T$.

Доказательство. При $\eta(t)\equiv\mathrm{const}$ утверждение теоремы следует из результатов в [11], когда $g\equiv 0$, и из результатов в [9], когда $M=-\Delta$ и $g<0$.

Пусть $\eta(t)\neq\mathrm{const}$. Рассмотрим следующую итерационную схему:

$$(u^i+\eta(t)Mu^i)_t+\eta^{-1}(t)(u^i+\eta Mu^i)=f+(\eta^{-1}-g)u^{i-1},\quad (t,x)\in Q_T,\tag{2.23}$$

$$(u^i+\eta(t)Mu^i)|_{t=0}=U_0(x),\quad x\in\Omega,\tag{2.24}$$

$$u^i(t,x)=\beta(t,x),\ (t,x)\in S_T;\quad u^0\equiv 0$$

$(i=1,2,3,\dots)$. При каждом i функция

$$\tilde u^i\equiv(u^i-b^\eta)\exp\left(\int_0^t\eta^{-1}(\theta)\,d\theta\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$(\tilde u^i+\eta(t)M\tilde u^i)_t=[f+(\eta^{-1}-g)u^{i-1}]\exp\left(\int_0^t\eta^{-1}(\theta)\,d\theta\right),\tag{2.25}$$

начальным данным (2.24) и граничным условиям $\tilde u^i|_{S_T}=0$. Интегрируя (2.25) по t на $(0,\tau)$, $0<\tau\leq T$, и действуя оператором $(I+\eta(t)M)^{-1}$ на результирующее уравнение, получим

$$\tilde u^i(\tau,x)=(I+\eta(t)M)^{-1}U_0(x)$$
$$+\int_0^\tau(I+\eta(t)M)^{-1}[f+(\eta^{-1}(t)-g)u^{i-1}]\exp\left(\int_0^t\eta^{-1}(\theta)\,d\theta\right)dt.\tag{2.26}$$

В условиях теоремы из (2.26) можно заключить, что

$$u^i(t,x)\geq b^\eta(t,x)\geq 0\tag{2.27}$$

п. в. в Q_T для любого $i=1,2,3,\dots$.

Так как оператор $(I+\eta M)^{-1}$ ограничен [19], интегральный оператор в правой части (2.26) сжимающий в норме $\max\limits_{[0,T]}\{\exp(-\lambda t)\|\cdot\|_2\}$ с некоторой положительной постоянной λ. Это означает, что $u^i(t,x)\to u(t,x)$ в $C\big([0,T];W_2^2(\Omega)\big)$ при $i\to\infty$. Следовательно, для $u(t,x)$ также выполняется (2.27). Кроме того, $u(t,x)$ является решением задачи (2.8)–(2.10) и $u(t,x)\in C^1\big([0,T];W_2^2(\Omega)\big)$. Теорема доказана.

3. Существование и единственность решения обратной задачи

Приступим к исследованию обратной задачи (2.8)–(2.12). Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (2.8)–(2.12) «в малом» по t устанавливает

Теорема 3.1. *Пусть выполняются предположения* I, II *и условия теоремы* 2.1. *Предположим, что*

(i) $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\beta \in C^1\big([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega)\big)$, $U_0 \in L^2(\Omega)$, $g \in C(\overline{Q}_T)$, $\omega \in C^1\big([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega)\big)$, $\varphi_1 \in C^1([0,T])$, $\varphi_2 \in C([0,T])$;

(ii) U_0, β, ω, φ_1 *неотрицательны и существует положительная постоянная* Ψ_0 *такая, что*

$$\varphi_1(t) + \Psi(t) \geq \Psi_0, \quad t \in [0,T]. \tag{3.1}$$

Тогда при некотором t_0, $0 < t_0 \leq T$, *задача* (2.8)–(2.12) *имеет единственное решение* $\{u,\eta\}$ *в классе* $V = \big\{\{u,\eta\} \mid u \in C^1\big([0,t_0]; W_2^2(\Omega)\big),\ \eta \in C^1([0,t_0])\big\}$. *При этом существуют положительные константы* η_0 *и* η_1 *такие, что* $\eta_0 \leq \eta(t) \leq \eta_1$ *для любого* $t \in [0,t_0]$.

Доказательство. Будем искать решение задачи (2.8)–(2.12) в виде

$$u(t,x) = a(t,x) - w(t,x), \quad \eta(t) = \eta(0) + q(t), \tag{3.2}$$

где пара $\{w,q\}$ является решением обратной задачи

$$(w + (\eta(0) + q(t))Mw)_t + Mw + gw = F(t,x), \tag{3.3}$$

$$w(0,x) + \eta(0)Mw(0,x) = a(0,x) - U_0(x), \tag{3.4}$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.5}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial(qw)_t}{\partial\overline{N}} + \eta(0)\frac{\partial(w)_t}{\partial\overline{N}} + \frac{\partial w}{\partial\overline{N}}\right]\omega\,ds = -\varphi_2(t) - (\eta(0)+q(t))\langle Ma, b_t\rangle_{1,M} + [(\eta(0)+q(t))(\varphi_1+\Psi)]' + \Psi, \tag{3.6}$$

$$\eta(0)\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w(0,s)}{\partial\overline{N}}\omega(0,s)\,ds = -r_2 + \eta(0)(r_1 + \Psi(0)). \tag{3.7}$$

Сведем задачу (3.3)–(3.7) к эквивалентной обратной задаче с операторными уравнениями для $\eta(0)$ и $q(t)$. Для этого умножим (3.3) на $h^\eta(t,x)$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем по частям. С учетом (3.2) и (3.5) это дает

$$\frac{d}{dt}\left\{(\eta(0)+q)(\Psi+\varphi_1) + \frac{q}{\eta(0)}(w,h^\eta)\right\} = \frac{1}{\eta(0)}\big[q\big(w,h_t^\eta\big) - (w,h^\eta)\big] + (\eta(0)+q)\langle Ma, b_t\rangle_{1,M} + (gw,h^\eta) + \Phi - (F,h^\eta). \tag{3.8}$$

Из (3.2) следует, что $q(0) = 0$. Интегрируя последнее равенство по t от 0 до τ, $0 < \tau \leq T$, в силу (3.6) получим

$$q(\tau)\left(\Psi(\tau) + \varphi_1(\tau) + \frac{1}{\eta(0)}(w,h^\eta)\right) = \eta(0)(\Psi(0) - \Psi(\tau) + \varphi_1(0) - \varphi_1(\tau)) + \int\limits_0^\tau \left\{\Phi - (F - gw, h^\eta) + (\eta(0)+q)\langle Ma, b_t\rangle_{1,M} + \frac{1}{\eta(0)}\big[q\big(w,h_t^\eta\big) - (w,h^\eta)\big]\right\}dt. \tag{3.9}$$

Далее умножим (3.4) на b_0 скалярно в $L^2(\Omega)$. Дважды интегрируя по частям в результирующем уравнении и беря во внимание (3.7), имеем

$$\eta(0)(r_1 + \Psi(0)) = r_2 - (F_0, b_0) + (w_0, b_0), \tag{3.10}$$

где $w_0(x) = w(0,x)$.

Таким образом, мы получили обратную задачу (3.3)–(3.5), (3.9), (3.10), эквивалентную задаче (3.3)–(3.7). Действительно, как следует из построения уравнений (3.9) и (3.10), каждое решение $\{w,q\}$ задачи (3.3)–(3.7) является решением задачи (3.3)–(3.5), (3.9), (3.10). Пусть теперь $\{w,q\}$ — решение задачи (3.3)–(3.5), (3.9), (3.10) из класса V. Тогда $q(t)$ удовлетворяет уравнению (3.8). Умножим (3.3) на h^η скалярно в $L^2(\Omega)$ и дважды проинтегрируем результат по частям по x. Это дает

$$-\int\limits_{\partial\Omega}\left\{\frac{\partial(qw)_t}{\partial\overline{N}}+\eta(0)\frac{\partial w_t}{\partial\overline{N}}+\frac{\partial w}{\partial\overline{N}}\right\}\omega\,ds-\frac{1}{\eta(0)}[((qw)_t,h^\eta)+(w,h^\eta)]+(gw,h^\eta)=(F,h^\eta).$$

Подставляя (3.8) в полученное соотношение, приходим к (3.6). Аналогично, умножив (3.4) на b_0 скалярно в $L^2(\Omega)$ и подставив в полученное соотношение (3.10), нетрудно убедиться в справедливости (3.7). Ввиду эквивалентности обратных задач достаточно установить справедливость теоремы для задачи (3.3)–(3.5), (3.9), (3.10).

Согласно теореме 2.1 в начальный момент $t=0$ задача (3.4), (3.5), (3.7), а следовательно, и (3.4), (3.5), (3.10) имеет единственное решение $\{w_0,\eta(0)\}\in W_2^2(\Omega)\times\mathbb{R}$. При этом $\eta(0)$ удовлетворяет неравенству (2.18), $w_0\geq 0$ п. в. в Ω и имеют место оценки [18]

$$\|w_0\|_1\leq\frac{\|F_0\|}{k_0m_1},\quad \|Mw_0\|\leq k_0^{-2}\|F_0\|\big(m_1^{-1}+k_0\big). \tag{3.11}$$

Поэтому в дальнейшем можем считать следы $w(0,x)=w_0(x)$ и $\eta(0)$ известными и рассматривать обратную задачу (3.3)–(3.5), (3.9) отыскания пары функций $\{w,q\}$.

Для каждого $t_0\in[0,T)$ и констант $0<\alpha\leq k_0$ и $l>0$ определим множество функций $Y_{\alpha,l}(t_0)=\{y(t)\mid y\in C^1([0,t_0]),\ |y(t)|\leq\alpha,\ |y'(t)|\leq l,\ y(0)=0\}$. Введем оператор A, который каждому $y\in Y_\alpha(t_0)$ ставит в соответствие элемент

$$\begin{aligned}Ay=\Bigg\{&\eta(0)(\Psi(0)-\Psi(t)+\varphi_1(0)-\varphi_1(t))\\&+\int\limits_0^t\left[\Phi-(F-gw_y,h^\eta)+(\eta(0)+y)\langle Ma,b_\tau\rangle_{1,M}+\frac{1}{\eta(0)}\big(y\big(w,h^\eta_\tau\big)-(w,h^\eta)\big)\right]d\tau\Bigg\}\\&\times\left[\Psi(t)+\varphi_1(t)+\frac{1}{\eta(0)}(w,h^\eta)\right]^{-1},\end{aligned} \tag{3.12}$$

где $w_y=w_y(t,x)$ — решение задачи (3.3)–(3.5) при $\eta(t)=\eta(0)+y(t)$, и рассмотрим операторное уравнение

$$y=Ay. \tag{3.13}$$

Можно показать аналогично тому, как это сделано в [20], что задача (3.3)–(3.5), (3.9) имеет решение в классе V тогда и только тогда, когда разрешимо операторное уравнение (3.13).

Докажем, что при некоторых $0<\alpha<k_0$, l и t_0 оператор A отображает $Y_{\alpha,l}(t_0)$ в себя и является сжимающим на данном множестве. Для этого выберем произвольный элемент $y(t)$ из множества $Y_{\alpha,l}(t_0)$ и получим оценки на

решение w_y задачи (3.3)–(3.5) при $\eta(t)=\eta(0)+y(t)$ и $t\in[0,t_0]$. Согласно теореме 2.2 это решение существует и единственно для каждого $y\in Y_{\alpha,l}(t_0)$, причем $w_y\in C^1\big([0,t_0];W_2^2(\Omega)\big)$. Поэтому интеграл в правой части (3.12) существует при каждом $t\in[0,t_0]$ и $(Ay)'\in C^1([0,t_0])$.

Проинтегрируем (3.3) по t от 0 до τ, $0<\tau\le t_0$, умножим результирующее уравнение на w_y скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям по x. Имеем

$$\|w_y\|^2+(\eta(0)+y(\tau))\langle Mw_y,w_y\rangle_1+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\langle M\int_0^\tau w_y(t)\,dt,\int_0^\tau w_y(t)\,dt\right\rangle_1$$
$$=-\left(\int_0^\tau gw_y\,dt,w_y\right)+(a_0-U_0,w_y)+\left(\int_0^\tau F\,dt,w_y\right). \quad (3.14)$$

Интегрируя (3.14) по τ от 0 до θ, $0<\theta\le t_0$, и оценивая правую часть с помощью неравенств Фридрихса и Коши, получим

$$\int_0^\theta\{\|w_y\|^2+4(\eta(0)-\alpha)\langle Mw_y,w_y\rangle_1\}\,d\tau+2\left\langle M\int_0^\theta w_y(t)\,dt,\int_0^\theta w_y(t)\,dt\right\rangle_1$$
$$\le B_1\theta+4g_1\int_0^\theta\int_0^\tau\|w_y\|^2\,dtd\tau$$

для любого $\theta\in[0,t_0]$, где положительная постоянная B_1 зависит от $\|a_0\|$, $\|U_0\|$, T и $\|F\|_{L^2(Q_T)}$. Отсюда в силу (2.18) по лемме Гроноулла вытекает неравенство

$$\int_0^\theta\{\|w_y\|^2+4(k_0-\alpha)\langle Mw_y,w_y\rangle_1\}\,d\tau\le B_1\mathrm{e}^{4g_1T}\frac{\theta^2}{2}\equiv B_2\theta^2, \quad (3.15)$$

где $g_1\equiv\|g\|_{C(\overline{Q}_T)}$.

Перейдем к оценке на производную w_{yt}. Умножим (3.3) на w_{yt} скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям по x. Это дает

$$\|w_{yt}\|^2+(\eta(0)+y(t))\langle Mw_{yt},w_{yt}\rangle_1+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle Mw_y,w_y\rangle_1$$
$$-\,y'(t)\langle Mw_y,w_{yt}\rangle_1+(F-gw_y,w_{yt}). \quad (3.16)$$

Проинтегрируем (3.16) по t от 0 до τ, $0<\tau\le T$, и оценим правую часть с помощью неравенства Коши. Получим

$$\int_0^\tau[\|w_{yt}\|^2+(k_0-\alpha)\langle Mw_{yt},w_{yt}\rangle_1]\,dt+2\langle Mw_y(\tau),w_y(\tau)\rangle_1\le B_3+\frac{B_4l^2}{(k_0-\alpha)^2} \quad (3.17)$$

в силу (2.13), (3.11) и (3.15), где положительные константы B_3 и B_4 зависят от T, k_0, m_1, m_2, g_1, $\|F_0\|_1$, $\|F\|^2_{L^2(Q_T)}$. Перенесем последнее слагаемое из левой части (3.16) в правую. Применяя к правой части полученного соотношения неравенство Коши и используя (2.13), (3.17), приходим к оценке

$$\|w_{yt}\|^2+(k_0-\alpha)\langle Mw_{yt},w_{yt}\rangle_1^2\le\left(\frac{(1+l^2)}{2(k_0-\alpha)}+2g_1^2\right)\left(B_3+\frac{B_4l^2}{(k_0-\alpha)^2}\right)+2\|F\|^2$$
$$\equiv B_5+B_6l^2+B_7l^4. \quad (3.18)$$

Покажем, что $\Psi + \varphi_1 + \eta^{-1}(0)(w, h^\eta) \neq 0$ на $[0, t_0]$ при соответствующем выборе α и t_0. Подействуем на (3.3) оператором $(I + \eta(0)M)^{-1}$, отображающим $W_2^{-1}(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и проинтегрируем результат по t от 0 до τ, $0 < \tau \leq t_0$. Учитывая, что

$$(I + \eta(0)M)^{-1}(w_y + (\eta(0) + y)Mw_y) = w_y + \frac{y}{\eta(0)}(I + \eta(0)M)^{-1}Mw_y,$$

получим

$$w_y = w_0 - \frac{y}{\eta(0)}(I + \eta(0)M)^{-1}Mw_y + \int\limits_0^t (I + \eta(0)M)^{-1}\{F - Mw_y - gw_y\}\, d\tau.$$

В силу (2.13), (2.18) и (3.15) имеем $\|(I + \eta(0)M)^{-1}\| \leq (k_0 m_1)^{-1}$ и

$$\|w_y\|_1 \leq \frac{\alpha m_2}{k_0^2 m_1}(\|w_y\|_1 + \|w_0\|_1) + \frac{t}{k_0 m_1}\left\{\max_{\tau\in[0,T]}\|F\| + \frac{B_2 T^{1/2}(m_2 + k_0 g_1)}{2k_0(k_0 - \alpha)^{1/2}}\right\},$$

откуда

$$\frac{k_0^2 m_1 - \alpha m_2}{k_0^2 m_1}\|w_y\|_1 \leq \frac{\alpha m_2}{k_0^2 m_1}\|w_0\|_1 + \frac{t}{k_0 m_1}\left\{\max_{\tau\in[0,T]}\|F\| + \frac{B_2 T^{1/2}(m_2 + k_0 g_1)}{2k_0(k_0 - \alpha)^{1/2}}\right\}.$$

При

$$\alpha \leq \frac{1}{2}\min\left\{k_0, \frac{k_0^2 m_1}{m_2}\right\} \tag{3.19}$$

из последнего неравенства вытекает, что

$$\|w_y\|_1 \leq B_8\alpha + B_9 t, \tag{3.20}$$

где положительные постоянные B_8 и B_9 зависят от T, k_0, m_1, m_2, g_1, $\max\limits_{\tau\in[0,T]}\|F\|$, B_2. Если

$$B_8\alpha + B_9 t_0 \leq \Psi_0 k_0 (2\max_{t\in[0,t_0]}\|h^\eta\|)^{-1}, \tag{3.21}$$

то с учетом (3.1)

$$\phi_1 + \Psi + \frac{1}{\eta(0)}(w, h^\eta) \geq \frac{\Psi_0}{2}. \tag{3.22}$$

Итак, в условиях теоремы правая часть (3.12) имеет смысл при любом $y \in Y_{\alpha,l}(t_0)$, если t_0 и α удовлетворяют условиям (3.19) и (3.21). При этом $Ay \in C^1([0, t_0])$ и $Ay(0) = 0$. Из (2.13), (2.15), (2.16), (2.18), (3.1), (3.10), (3.12), (3.15), (3.17), (3.18), (3.20) и (3.22) следует, что

$$|Ay| = \left[\Psi + \varphi_1 + \frac{1}{\eta(0)}(w_y, h^\eta)\right]^{-1}\Bigg| -\eta(0)\int\limits_0^t(\varphi_1(\tau) + \Psi(\tau))'\, d\tau + \int\limits_0^t\Big[\Phi + (gw_y, h^\eta)$$
$$+ (\eta(0) + y)\langle Ma, b_\tau\rangle_{1,M} + \frac{1}{\eta(0)}\big(y(w, h_\tau^\eta) - (w, h^\eta)\big)\Big]d\tau\Bigg| \leq B_{10}t, \tag{3.23}$$

где постоянная $B_{10} > 0$ зависит от k_0, m_2, g_1, B_2, B_3, B_4, $\|a\|_{C^1([0,T];W_2^1(\Omega))}$, $\|b\|_{C^1([0,T];W_2^1(\Omega))}$ и T, а также

$$|(Ay)'| = \left| -\eta(0)(\varphi_1(t) + \Psi(t))' + \Phi(t) + (gw_y, h^\eta) + (\eta(0) + y(t))\langle Ma, b_t\rangle_{1,M} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\eta(0)}\big(y\big(w_y, h_t^\eta\big) - (w_y, h^\eta)\big) - Ay\left(\Psi' + \varphi_1' + \frac{1}{\eta(0)}\big((w_{yt}, h^\eta) + \big(w_y, h_t^\eta\big)\big)\right)\right|$$
$$\times \left[\varphi_1(t) + \Psi(t) + \frac{1}{\eta(0)}(w_y, h^\eta)\right]^{-1} \leq B_{11} + B_{12}\alpha + (B_{13} + B_{14}l + B_{15}l^2)t. \quad (3.24)$$

Здесь положительные постоянные B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14} и B_{15} зависят от T, k_0, m_1, m_2, g_1, B_2, B_3, B_4, B_{10}, $\overline{\Phi}$, $\|a\|_{C^1([0,T];W_2^1(\Omega))}$, $\|b\|_{C^1([0,T];W_2^1(\Omega))}$, $\|\varphi_1'\|_{C([0,T])}$, $\|\Psi'\|_{C([0,T])}$. Положим $l = 2B_{11}$, $\alpha = B_{10}t_0$ и выберем t_0 так, чтобы выполнялись условия (3.19), (3.21) и

$$(B_{12}B_{10} + B_{13} + B_{14}l + B_{15}l^2)t_0 \leq B_{11}. \quad (3.25)$$

В этом случае $|Ay| \leq \alpha$ и $|(Ay)'| \leq l$, т. е. оператор A отображает $Y_{\alpha,l}(t_0)$ в себя.

Перейдем к доказательству сжимаемости оператора A на $Y_{\alpha,l}(t_0)$. Пусть $y_1, y_2 \in Y_{\alpha,l}(t_0)$ и w_1, w_2 — решения задачи (3.3)–(3.5) при $q = y_1$ и $q = y_2$ соответственно. Тогда разность $\widehat{w} = w_1 - w_2$ удовлетворяет уравнению

$$(\widehat{w} + (\eta(0) + y_1)M\widehat{w})_t + M\widehat{w} + g\widehat{w} = -((y_1 - y_2)Mw_2)_t, \quad (t,x) \in Q_{t_0}, \quad (3.26)$$

и краевым условиям $\widehat{w}(0,x) + \eta(0)M\widehat{w}(0,x) = 0$ при $x \in \overline{\Omega}$ и $\widehat{w}|_{\partial\Omega} = 0$ при $t \in [0,t_0]$. Проинтегрируем (3.26) по t от 0 до τ, $0 < \tau \leq t_0$, умножим на $\widehat{w}$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем в результирующем уравнении по частям по x. Это дает

$$\|\widehat{w}\|^2 + (\eta(0)+y_1)\langle M\widehat{w}, \widehat{w}\rangle_1 = -\left\langle M\int_0^\tau \widehat{w}\,dt + (y_1 - y_2)Mw_2, \widehat{w}\right\rangle_1 - \left(g\int_0^\tau \widehat{w}\,dt, \widehat{w}\right). \quad (3.27)$$

Оценивая правую часть (3.27) с помощью (2.18), (3.18) и неравенства Коши, получим соотношение

$$\|\widehat{w}\|^2 + m_1(k_0 - \alpha)\|\widehat{w}\|_1^2 \leq B_{16}|y_1 - y_2|^2 + B_{17}\int_0^\tau \left(\|\widehat{w}\|^2 + m_1(k_0 - \alpha)\|\widehat{w}\|_1^2\right)dt,$$

из которого согласно лемме Гронуолла вытекает неравенство

$$\|\widehat{w}\|^2 + m_1(k_0 - \alpha)\|\widehat{w}\|_1^2 \leq B_{16}\mathrm{e}^{B_{17}T}\int_0^\tau |y_1 - y_2|^2\,dt + B_{16}|y_1 - y_2|^2. \quad (3.28)$$

Здесь положительные постоянные B_{16}, B_{17} зависят от T, k_0, m_1, m_2, g_1, α, B_3 и B_4.

Теперь перенесем второе и третье слагаемые из левой части (3.26) в правую, умножим (3.26) на $\widehat{w}_t$ в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям по x. Применяя к правой части полученного соотношения неравенство Коши и используя (2.13), (3.17), придем к оценке

$$2\|\widehat{w}_t\|^2 + (k_0 - \alpha)\langle M\widehat{w}_t\widehat{w}_t\rangle_1 \leq B_{18}\left(\int_0^\tau |y_1 - y_2|^2\,dt + |y_1 - y_2|^2 + |y_1' - y_2'|^2\right), \quad (3.29)$$

где положительная постоянная B_{18} зависит от T, k_0, α, m_1, m_2, g_1, B_2, B_3, B_4 и B_{11}.

Перейдем к оценке нормы разности Ay_1 и Ay_2 в $C^1([0,t_0])$. В соответствии с определением оператора A получим

$$
\begin{aligned}
Ay_1 - Ay_2 = \Bigg\{ \int\limits_0^t \bigg[(g\widehat{w}, h^\eta) + (y_1 - y_2)\langle Ma, b_\tau\rangle_{1,M} \\
+ \frac{1}{\eta(0)}\big((y_1-y_2)\big(w_1, h_\tau^\eta\big) + y_2\big(\widehat{w}, h_\tau^\eta\big) - (\widehat{w}, h^\eta)\big)\bigg]\,d\tau - \frac{1}{\eta(0)} Ay_2(\widehat{w}, h^\eta)\Bigg\} \\
\times \bigg[\varphi_1(t) + \Psi(t) + \frac{1}{\eta}(w_1, h^\eta)\bigg]^{-1}. \quad (3.30)
\end{aligned}
$$

Оценим правую часть (3.30) по модулю с помощью (3.20)–(3.23), (3.28). Имеем

$$
|Ay_1 - Ay_2| \le B_{19} \int\limits_0^t \left[\left(\int\limits_0^\tau |y_1 - y_2|^2\,d\theta \right)^{1/2} + |y_1 - y_2| + |y_1' - y_2'| \right] d\tau. \quad (3.31)
$$

Здесь положительная постоянная B_{19} зависит от T, k_0, Ψ_0, α, m_1, m_2, g_1, B_8, B_9, B_{13}, B_{15}, $\|F_0\|$, $\|h^\eta\|_{C^1([0,T];L^2(\Omega))}$.

Получим аналогичное неравенство для разности производных $(Ay_1)'$ и $(Ay_2)'$. Для этого продифференцируем (3.30) и оценим по модулю правую часть с учетом (3.17), (3.19), (3.23), (3.24), (3.29), (3.31). Это дает

$$
\begin{aligned}
|(Ay_1)' - (Ay_2)'| = \Bigg| \bigg(\Big(g - \frac{1}{\eta(0)}(Ay_2)' \Big)(w_1 - w_2), h^\eta \bigg) + (y_1 - y_2)\langle Ma, b_t\rangle_{1,M} \\
+ \frac{1}{\eta(0)}\big[(y_1 - y_2)\big(w_1, h_t^\eta\big) + y_2\big(w_1 - w_2, h_t^\eta\big) - (w_1 - w_2, h^\eta)\big] \\
- (Ay_1 - Ay_2)\bigg[\Psi' + \varphi' + \frac{1}{\eta(0)}\big((w_{1t}, h^\eta) + \big(w_1, h_t^\eta\big)\big)\bigg] \\
- \frac{Ay_2}{\eta(0)}\big[(w_{1t} - w_{2t}, h^\eta) + \big(w_1 - w_2, h_t^\eta\big)\big]\Bigg| \bigg[\varphi_1 + \Psi + \frac{1}{\eta}(w_1, h^\eta)\bigg]^{-1} \\
\le B_{20}\left[\left(\int\limits_0^t |y_1 - y_2|^2\,d\tau \right)^{1/2} + \int\limits_0^t (|y_1 - y_2| + |y_1' - y_2'|)\,d\tau + t|y_1' - y_2'| \right], \quad (3.32)
\end{aligned}
$$

где положительная постоянная B_{20} зависит от T, k_0, Ψ_0, α, m_1, m_2, g_1, B_3, B_4, B_{10}, B_{11}, B_{13}, B_{14}, B_{15}, B_{18}, B_{19}, $\|F_0\|$, $\|h^\eta\|_{C^1([0,T];L^2(\Omega))}$.

Введем в пространстве $C^1([0,T])$ эквивалентную норму

$$
|\,y\,| = \max_{t\in[0,t_0]} \{e^{-ct}(|y| + |y'|)\}.
$$

Покажем, что при некотором $c > 1$ и достаточно малом t_0 оператор A является сжатием в смысле этой новой нормы. Действительно, из (3.31) и (3.32) следует, что

$$
|\,Ay_1 - Ay_2\,| \le \bigg[B_{20}t_0 + \frac{1}{(2c)^{1/2}}\big(B_{19}(t_0 + \sqrt{2}) + B_{20}(1 + \sqrt{2})\big) \bigg] |\,y_1 - y_2\,|. \quad (3.33)
$$

При

$$t_0 < B_{20}^{-1}, \quad B_{20}t_0 + \frac{1}{(2c)^{1/2}}(B_{19}(t_0+\sqrt{2}) + B_{20}(1+\sqrt{2})) < 1 \tag{3.34}$$

оператор A является сжатием в $Y_{\alpha,l}(t_0)$.

Итак, мы доказали, что если $l = 2B_{11}$, $\alpha = B_{10}t_0$ и t_0 удовлетворяет условиям (3.19), (3.21), (3.25) и (3.34), то оператор A отображает $Y_{\alpha,l}(t_0)$ в себя и является сжимающим на этом множестве. В таком случае согласно принципу сжимающих отображений уравнение (3.13) имеет единственное решение $q(t) \in Y_{\alpha,l}(t_0)$. Как отмечалось выше, из разрешимости уравнения (3.13) следует разрешимость задачи (3.3)–(3.5), (3.9). При этом $w \in C^1\big([0,T]; W_2^2(\Omega)\big)$, $q(t) \in C^1([0,t_0])$, для функций w и η справедливы оценки (3.15), (3.17), (3.18) и

$$0 < k_0 - \alpha \le \eta(t) \le k_0 + \alpha, \quad t \in [0,t_0]. \tag{3.35}$$

Для оценки вторых производных w умножим (3.3) на Mw в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем в первом слагаемом по частям. Это дает

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\langle w, Mw\rangle_1 + (\eta(0)+q(t))\|Mw\|^2] + \|Mw\|^2 = -\frac{1}{2}q'(t)\|Mw\|^2 - (gw, Mw) + (F, Mw). \tag{3.36}$$

Оценим правую часть (3.36) по модулю с помощью неравенства Коши и проинтегрируем результат по t от 0 до τ. В силу (2.13), (3.15) и (3.35) получим

$$\langle w, Mw\rangle_1 + (k_0-\alpha)\|Mw\|^2 + \int_0^\tau \|Mw\|^2\,dt \le l\int_0^\tau \|Mw\|^2\,dt + 2B_2g_1^2t_0^2 + 2\|F\|^2 + m_2\|w_0\|_1^2 + \eta(0)\|Mw_0\|^2,$$

откуда согласно лемме Гроноулла следует, что

$$\|Mw\|^2 \le \frac{1}{k_0-\alpha}\big(2B_2g_1^2t_0^2 + 2\max_{t\in[0,t_0]}\|F\|^2 + m_2\|w_0\|_1^2 + \eta(0)\|Mw_0\|^2\big)e^{lt_0} \equiv B_{21}. \tag{3.37}$$

Из (3.3), (3.18), (3.19), (3.35) и (3.37) вытекает оценка $\|Mw_t\|$:

$$(k_0-\alpha)\|Mw_t\| \le (B_5 + B_6l^2 + B_7l^4)^{1/2} + g_1(B_8\alpha + B_9t_0)^{1/2} + (l+1)B_{21}^{1/2} + \|F\|.$$

Итак, мы доказали существование решения $\{w,q\}$ задачи (3.3)–(3.6). Покажем, что это решение единственно в классе V на $[0,t_0]$, если t_0 отвечает условиям (3.19), (3.21), (3.25) и (3.34). Предположим, что задача (3.3)–(3.6) имеет два решения $\{w_1,q_1\}$ и $\{w_2,q_2\}$. Тогда пара функций $\overline{w} = w_1 - w_2$ и $\bar{q} = q_1 - q_2$ удовлетворяет уравнению

$$(\overline{w} + (\eta(0)+y_1)M\overline{w})_t + M\overline{w} + g\overline{w} = -(\bar{q}Mw_2)_t, \quad (t,x) \in Q_{t_0},$$

и условиям

$$\overline{w}(0,x) + \eta(0)M\overline{w}(0,x) = 0,\ x \in \overline{\Omega}; \quad \overline{w}|_{\partial|\Omega} = 0, \quad t \in [0,t_0],$$

$$\bar{q} = \left\{ \int_0^t \left[(g\overline{w}, h^\eta) + \bar{q}\langle Ma, b_\tau\rangle_{1,M} + \frac{1}{\eta(0)}\big(\bar{q}\big(w_1, h^\eta_\tau\big) + q_2\big(\overline{w}, h^\eta_\tau\big) - (\overline{w}, h^\eta)\big)\right] d\tau - \frac{1}{\eta(0)} q_2(\overline{w}, h^\eta) \right\} \left[\varphi_1(t) + \Psi(t) + \frac{1}{\eta}(w_1, h^\eta)\right]^{-1}.$$

Как показано выше, если $l = 2B_{11}$, $\alpha = B_{10}t_0$ и t_0 удовлетворяет условиям (3.19), (3.21), (3.25) и (3.34), то для каждых $y_1, y_2 \in Y_{\alpha,l}(t_0)$ справедливо (3.33), а для w_{y1} и w_{y2} выполняется (3.28). Так как $q_1, q_2 \in Y_{\alpha,l}(t_0)$ являются решениями операторного уравнения (3.13), для $\bar{q}$ и $\overline{w}$ имеют место неравенства

$$|q_1 - q_2| \le \left[B_{20}t_0 + \frac{1}{(2c)^{1/2}}(B_{19}(t_0 + \sqrt{2}) + B_{20}(1 + \sqrt{2}))\right] |q_1 - q_2|,$$

$$\|\overline{w}\|^2 + m_1(k_0 - \alpha)\|\overline{w}\|_1^2 \le B_{15} \int_0^\tau |\bar{q}|^2\, dt + B_{13}|\bar{q}|^2,$$

из которых в силу (3.34) следует, что $\bar{q} \equiv 0$ и $\overline{w} \equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 3.1 остается справедливой для обратной задачи (2.8)–(2.12) с условием переопределения более общего вида вместо (2.11):

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ \left(\eta(t)\frac{\partial u}{\partial \overline{N}}\right)_t + \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} \right\} \omega(t, s)\, ds + (\eta(t)\varphi_1(t))_t + \eta(t)\varphi_3(t) = \varphi_2(t), \quad t \in (0, T].$$

В частности, если $\varphi_1(t) \ne 0$ при $t \in [0, T]$, то это условие можно свести к условию типа (2.11), умножив его на $\exp\left(\int_0^t \varphi_3(t)(\varphi_1(t))^{-1}\, dt\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chen P. J., Gurtin M. E.* On a theory of heat conduction involving two temperatures // Z. Angew. Math. Phys. 1968. V. 19. P. 614–627.
2. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864.
3. *Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Royal Soc. London. Ser. A. 1972. V. 272. P. 47–78.
4. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
5. *Barenblatt G. I., Garcia-Azorero J., De Pablo A., Vazquez J. L.* Mathematical model of the non-equilibrium water-oil displacement in porous strata // Appl. Anal. 1997. V. 65. P. 19–45.
6. *Helmig R., Weiss A., Wohlmuth B. I.* Dynamic capillary effects in heterogeneous porous media // Comput. Geosci. 2007. V. 11. P. 261–274.
7. *Showalter R. E., Ting T. W.* Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. V. 1. P. 1–26.
8. *Gajewski H., Gröger K., Zacharias K.* Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Mathematische Lehrbücher und Monographien. II. Berlin: Akad.-Verl., 1974. (Abteilung, Mathematische Monographien; V. 38).
9. *Кожанов А. И.* Теоремы сравнения и разрешимость краевых задач для некоторых классов эволюционных уравнений типа псевдопараболических и псевдогиперболических. Новосибирск, 1990. (Препринт/Ин-т математики СО АН СССР; № 17).
10. *Li T.-T., White L. W.* Total flux (nonlocal) boundary value problems for pseudoparabolic equation // Appl. Anal. 1983. V. 16. P. 17–31.

11. *Rundell W., Stecher M.* The nonpositivity of solutions to pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. V. 75. P. 251–254.

12. *Rundell W.* Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data // Appl. Anal. 1980. V. 10. P. 231–242.

13. *Асанов А. А., Атаманов Э. Р.* Обратная задача для операторного интегродифференциального псевдопараболического уравнения // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 752–762.

14. *Lorenzi A., Paparoni E.* Identification problems for pseudoparabolic integrodifferential operator equations // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1997. V. 5. P. 235–253.

15. *Мамаюсупов М. Ш.* О задаче определения коэффициентов псевдопараболического уравнения // Исследования по интегродифференциальным уравнениям. Фрунзе: Илим, 1983. С. 290–297.

16. *Lyubanova A. Sh.* On the approximation of a parabolic inverse problem by pseudoparabolic one // Журн. сиб. федерального ун-та. Сер. Математика и физика. 2012. V. 5, N 3. P. 326–336.

17. *Lyubanova A. Sh., Tani A.* An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration. The existence, uniqueness and regularity // Appl. Anal. 2011. V. 90. P. 1557–1571.

18. *Lyubanova A. Sh.* Identification of a constant coefficient in an elliptic equation // Appl. Anal. 2008. V. 87. P. 1121–1128.

19. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.

20. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker Inc., 2000.

Статья поступила 17 ноября 2012 г.

Любанова Анна Шоломовна
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
lubanova@mail.ru