Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 510.643

АКСИОМАТИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЛОГИКИ ЗНАНИЯ И ВРЕМЕНИ LTK_r С ИНТРАНЗИТИВНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

А. Н. Лукьянчук, В. В. Римацкий

Аннотация. Исследуется вопрос аксиоматизации линейной много-модальной пропозициональной логики знания и времени LTK_r с рефлексивным и интранзитивным отношением времени. Логика определяется семантически как множество формул, истинных на фреймах специального вида. LTK_r-фреймы представляют собой линейные цепочки сгустков, связанных рефлексивным и интранзитивным отношением R_T, имитирующим время. Элементы внутри сгустка связаны несколькими отношениями эквивалентности, имитирующими знания различных агентов. Основным результатом работы является доказательство того, что предложенный авторами конечный набор формул есть аксиоматизация логики LTK_r с рефлексивным и интранзитивным отношением времени.

Ключевые слова: много-модальная логика, линейная временна́я логика, логика знания, аксиоматизация, n-каноническая модель.

1. Введение

В последние годы активно развивается изучение моделей, описывающих рассуждения, доказательства и вычисления (см. [1–3]). Такие модели широко применяются в области искусственного интеллекта и в компьютерных науках, например, для формализации и прогнозирования поведения программ. Одним из инструментов исследования является класс логик, сочетающих модальности знания и времени. Хорошо известно, что комбинирование таких модальностей порождает богатый, выразительный и интуитивно понятный язык (см. [1, 4]). В данной статье рассматривается много-модальная логика LTK_r, полученная добавлением к классическому пропозициональному исчислению **CPC** операторов «знания» и «времени». Такая логика эффективна при описании систем, в которых агенты, обладающие определенными знаниями, оперируют ими в процессах рассуждений и вычислений, использующих пошаговые стратегии, имитирующие время (см. [1, 3, 5]).

Некоторые линейные логики с использованием знания и времени исследованы в серии работ В. В. Рыбакова и Калардо [6–8]. В частности, описана аксиоматизация много-модальной логики LTK с транзитивным и рефлексивным отношением времени. Аксиоматизацию целого ряда различных логик, сочетающих знание и время, можно найти, например, в [3]. В [9] определены логики LTK_r и LTK_{ir} с интранзитивным, рефлексивным или иррефлексивным отношением времени и доказаны их разрешимость и финитная аппроксимируемость.

Мы рассматриваем время как линейную дискретную последовательность состояний. Каждое временно́е состояние содержит в себе набор информационных узлов, связанных между собой кортежем модальных операций R_i, имитирующих знания агентов. Семантическим способом определяем много-модальную логику как множество формул, истинных на фреймах специального вида. Предполагается, что поток временны́х состояний линеен и дискретен, а агенты обмениваются между собой информацией синхронно. Каждый агент может различать рассматриваемое временно́е состояние и непосредственно следующее за ним.

Статья продолжает тему исследования много-модальных логик с интранзитивным отношением времени и посвящена аксиоматизации логики LTK_r. Представлен конечный набор формул и доказано, что этот набор является полной и непротиворечивой системой аксиом для логики LTK_r с рефлексивным и интранзитивным отношением времени.

2. Семантика $\boldsymbol{LTK_r}$

Приведем основные определения, обозначения и утверждения, используемые в статье (для более детального ознакомления с предметом см. [10, 11]). Язык $\mathscr{L}^{LTK}$ состоит из счетного множества пропозициональных переменных $P := \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$, стандартных булевых операций и множества одноместных модальных операторов $\{\Box_T, \Box_\sim, \Box_i\ (i \in I)\}$. *Правильно построенная формула* (ППФ) определяется стандартным образом, в частности, если A — ППФ, то $\Box_T A, \Box_\sim A, \Box_i A\ (i \in I)$ также ППФ. Обозначим через $Fma(\mathscr{L}^{LTK})$ множество всех ППФ языка $\mathscr{L}^{LTK}$ (далее в тексте под *формулой* будем понимать формулу из множества $Fma(\mathscr{L}^{LTK})$). Введенные модальные операторы будем, например, интерпретировать следующим образом: (a) $\Box_T A$ в логике LTK_r означает, что информация A истинна в рассматриваемый момент и будет истинна в следующий; (b) $\Box_\sim A$ означает, что A истинна в рассматриваемый момент времени; (c) $\Box_i A\,(i \in I)$ означает, что информация А истинна во всех информационных точках, доступных агенту i. Семантика для языка $\mathscr{L}^{LTK}$ моделирует линейный и дискретный поток вычислительного процесса, в котором каждый момент времени ассоциируется с натуральным числом n.

Определение 2.1. *k-Модальный фрейм Крипке* — кортеж $\mathscr{F} = \langle W_\mathscr{F}, R_1, \dots, R_k\rangle$, где $W_\mathscr{F}$ — непустое множество элементов и каждое R_i — некоторое бинарное отношение на $W_\mathscr{F}$.

Определение 2.2. Дан фрейм Крипке $\mathscr{F} = \langle W_\mathscr{F}, R_1, \dots, R_k\rangle$. Для любого R_i $(1 \le i \le k)$ будем называть *R_i-сгустком* подмножество C_{R_i} множества $W_\mathscr{F}$ такое, что $\forall w \forall z \in C_{R_i}(wR_iz\ \&\ zR_iw)$ и $\forall z \in W_\mathscr{F} \forall w \in C_{R_i}((wR_iz\ \&\ zR_iw) \Rightarrow z \in C_{R_i})$. Для любого отношения R_i $C_{R_i}(w)$ — R_i-сгусток такой, что $w \in C_{R_i}$, или сгусток, порожденный элементом w.

Определение 2.3. Для двух R_i-сгустков C^m и C^j запись $C^m R_i C^j$ означает, что $\forall w \in C^m\ \forall z \in C^j\ (wR_iz)$.

Определение 2.4. *LTK_r-фрейм* — много-модальный фрейм $\mathscr{F} = \langle W_\mathscr{F}, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k\rangle$, где

(a) $W_\mathscr{F}$ — объединение непустых множеств C^n: $W_\mathscr{F} := \bigcup\limits_{n\in J} C^n$, где $J = [0, L]$, $L \in N$, или $J = N$;

(в) R_T — линейное, интранзитивное на сгустках, рефлексивное бинарное отношение на $W_{\mathscr{F}}$:

$$\forall w \forall z \in W_{\mathscr{F}}(wR_T z \Leftrightarrow [\exists n \in J((w \in C^n)\&(z \in C^n)) \vee ((w \in C^n)\&(z \in C^{n+1}))]);$$

(c) $R_\sim$ — универсальное $S5$-отношение на любом $C^n \in W_{\mathscr{F}}$:

$$\forall w \forall z \in W_{\mathscr{F}}(wR_\sim z \Leftrightarrow \exists n \in J((w \in C^n)\&(z \in C^n)));$$

(d) R_i — некоторое отношение эквивалентности внутри любого сгустка по времени C^n.

Класс всех таких фреймов обозначим через $\mathrm{LTK_r}$.

Определение 2.5. Для двух R_T-сгустков C^m и C^j запись $C^m R_T C^j$ означает, что $\forall w \in C^m\ \forall z \in C^j\ (wR_T z)$. При этом C_m является *R_T-предшественником* сгустка C_j, а C_j — *R_T-последователем* сгустка C_m.

Такие фреймы моделируют ситуацию, в которой каждый агент располагает информацией в каждом из временны́х состояний. Любое временное состояние (R_T-сгусток) C^n состоит из множества информационных точек, доступных в момент n. Отношение R_T — соединение в линейный поток таких информационных точек. Для двух точек w и z выражение $wR_T z$ означает, что либо w и z доступны в момент n, либо z будет доступна в следующий момент по отношению к w. Так как отношение $R_\sim$ связывает все информационные точки, потенциально доступные в один и тот же момент, $R_\sim$ представляет собой знание, потенциально доступное всем агентам в рассматриваемом временно́м состоянии. Отношение R_i определяет, какая информация доступна именно агенту i.

Кроме того, непосредственно из определения структуры LTK_r-фрейма для линейной цепи R_T-сгустков следует, что отношения на нем имеют следующие свойства:

PM.1: $vR_\sim z \Rightarrow (vR_T z\ \&\ zR_T v)$;

PM.2: $vR_i z \Rightarrow vR_\sim z$;

PM.3: $(vR_T z\ \&\ zR_T v) \Rightarrow vR_\sim z$.

В частности, предполагается совпадение R_T- и $R_\sim$-сгустков линейной цепи.

Определение 2.6. Даны фрейм Крипке $\mathscr{F}$ и множество пропозициональных переменных P. *Моделью* $\mathscr{M}_{\mathscr{F}}$ на $\mathscr{F}$ называют кортеж $\mathscr{M}_{\mathscr{F}} = \langle \mathscr{F}, V\rangle$, где V — означивание множества пропозициональных переменных из P на $\mathscr{F}$, т. е. $\forall p \in P\ (V(p) \subseteq W_{\mathscr{F}})$.

Дана модель $\mathscr{M} = \langle \mathscr{F}, V\rangle$, где $\mathscr{F}$ — LTK_r-фрейм. Означивание V стандартным образом может быть расширено с множества P на все множество правильно построенных формул, полученных с помощью переменных из P. В частности, $\forall w \in W_{\mathscr{F}}$

(a) $\langle \mathscr{F}, w\rangle \models_V p \Leftrightarrow w \in V(p)$;

(b) $\langle \mathscr{F}, w\rangle \models_V \Box_T A \Leftrightarrow \forall z \in W_{\mathscr{F}}(wR_T z \Rightarrow \langle \mathscr{F}, z\rangle \models_V A)$;

(c) $\langle \mathscr{F}, w\rangle \models_V \Box_\sim A \Leftrightarrow \forall z \in W_{\mathscr{F}}(wR_\sim z \Rightarrow \langle \mathscr{F}, z\rangle \models_V A)$;

(d) $\forall i \in I\ \langle \mathscr{F}, w\rangle \models_V \Box_i A \Leftrightarrow \forall z \in W_{\mathscr{F}}(wR_i z \Rightarrow \langle \mathscr{F}, z\rangle \models_V A)$.

Истинность формулы A на элементе w в модели $\mathscr{M}$ будем обозначать через $\langle \mathscr{F}, w\rangle \models_V A$, истинность формулы A на каждом элементе модели $\mathscr{M}$ — через $\mathscr{F} \models_V A$. Если A истинна на фрейме $\mathscr{F}$ при любом означивании V, обозначаем $\mathscr{F} \models A$. Множество $\{w \mid w \models_V A\}$ обозначим через $V(A)$.

Определение 2.7. *Логика* LTK_r — множество всех LTK_r-истинных формул: $LTK_r := \{A \in Fma(\mathscr{L}^{LTK_r}) \mid \forall \mathscr{F} \in \mathrm{LTK_r}(\mathscr{F} \models A)\}$. Если A принадлежит LTK_r, то говорим, что A — *теорема* LTK_r.

Определение 2.8. Фрейм $\mathscr{F} = \langle W_{\mathscr{F}}, R_1, \dots, R_k \rangle$ называется *связным по отношению* R_i, если $\forall x, y, z \in W_{\mathscr{F}}$ $(xR_iy \wedge xR_iz \Rightarrow yR_iz \vee zR_iy)$.

Определение 2.9. Отображение f фрейма $\mathscr{F} = \langle W_{\mathscr{F}}, R_1, \dots, R_k \rangle$ в фрейм $\mathscr{F}_1 = \left\langle W_{\mathscr{F}_1}, R_1^1, \dots, R_k^1 \right\rangle$ называется *p-морфизмом*, если

(i) $\forall a, b \in W_{\mathscr{F}} \big(aR_ib \Rightarrow f(a)R_i^1 f(b)\big)$;

(ii) $\forall a, b \in W_{\mathscr{F}} \big(f(a)R_i^1 f(b) \Rightarrow (\exists c \in W_{\mathscr{F}} : aR_ic)$ и $f(c) = f(b)\big)$.

Рассмотрим фрейм $\mathscr{F}_\Theta = \left\langle W_{\mathscr{F}_\Theta}, R_T^\Theta, R_\sim^\Theta, R_1^\Theta, \dots, R_k^\Theta \right\rangle$, где

(a) $W_{\mathscr{F}_\Theta} = C$, при этом R_T-сгусток C равен $C_\sim^1 \cup C_\sim^2$;

(b) $\forall w \forall z \in W_{\mathscr{F}_\Theta} : wR_T^\Theta z \ \& \ zR_T^\Theta w$;

(c) $\forall w \forall z \in W_{\mathscr{F}_\Theta} : wR_\sim^\Theta z \Leftrightarrow ((w \in C_\sim^m) \& (z \in C_\sim^m))$, где $m \in \{1, 2\}$;

(d) $\forall i \in I$ R_i^Θ — некоторое отношение эквивалентности внутри каждого $C_\sim^m$, где $m \in \{1, 2\}$.

Лемма 2.1. *Фрейм* $\mathscr{F}_\Theta$ *является p-морфным образом* LTK_r*-фрейма.*

Доказательство. Рассмотрим LTK_r-фрейм $\mathscr{F}_\infty = \left\langle W_{\mathscr{F}_\infty}, R_T^\infty, R_\sim^\infty, R_1^\infty, \right.$ $\left. \dots, R_k^\infty \right\rangle$ такой, что $W_{\mathscr{F}_\infty} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K^j$, при этом $K^{2k+1} \cong C_\sim^1$ & $K^{2k+2} \cong C_\sim^2$, где $k \in \{0, \dots, \infty\}$.

Определим отображение $f : \mathscr{F}_\infty \to \mathscr{F}_\Theta$ следующим образом:

$$f : \begin{cases} K^{2k+1} \to C_\sim^1, \\ K^{2k+2} \to C_\sim^2. \end{cases}$$

Легко проверить, что f является p-морфизмом. Покажем выполнение пп. (i), (ii) из определения 2.9 для элементов $a, b \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K^j$.

(i) $\forall a, b \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K^j \big(aR_\xi^\infty b \Rightarrow f(a)R_\xi^\Theta f(b)\big)$ по определению отношений R_ξ^Θ, где $\xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\}$.

(ii) Если $f(K^{2k+1})R_T^\Theta f(K^{2n+2})$, то существует сгусток K^{2k+2} такой, что $K^{2k+1}R_T^\infty K^{2k+2}$ & $f(K^{2k+2}) = f(K^{2n+2}) = C_\sim^2$. Если $f(K^{2k+2})R_T^\Theta f(K^{2n+1})$, то существует сгусток K^{2k+3} такой, что $K^{2k+2}R_T^\infty K^{2k+3}$ & $f(K^{2k+3}) = f(K^{2n+1}) = C_\sim^1$. Таким образом, отображение f является p-морфизмом. □

3. Система аксиом LTK_r

Аксиомы AS_{LTK_r}**.**

Аксиома **CPC** (классического пропозиционального исчисления);

$L_{\Box_T}$: $\Box_T(\Box_T A \to B) \vee \Box_T(\Box_T B \to A)$;

$K_{\Box_\xi}$: $\Box_\xi(A \to B) \to (\Box_\xi A \to \Box_\xi B)$, $\xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\}$;

$T_{\Box_\xi}$: $\Box_\xi A \to A$, $\xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\}$;

$4_{\Box_\xi}$: $\Box_\xi A \to \Box_\xi \Box_\xi A$, $\xi \in \{\sim, 1, \dots, k\}$;

$5_{\Box_\xi}$: $\neg\Box_\xi A \to \Box_\xi \neg\Box_\xi A$, $\xi \in \{\sim, 1, \dots, k\}$;

$M.1$: $\Box_T A \to \Box_\sim A$;

$M.2$: $\Box_\sim A \to \Box_i A$, $1 \le i \le k$;

AL: $\Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \wedge \Diamond_T(\neg A \wedge \Box_\sim B) \to \Box_T B$.

Правила вывода AS_{LTK_r}:

$$MP : \frac{A, A \to B}{B}, \quad Nec : \frac{A}{\Box_T A}.$$

Легко заметить, что для модальностей $\Box_\sim, \Box_1, \dots, \Box_k$ можно вывести правило Геделя с помощью аксиом $M.1$, $M.2$ и правила Nec.

Определение 3.1. *Выводом* формулы D в аксиоматической системе AS называется конечная последовательность формул $A_1, \dots, A_n = D$ такая, что каждая A_i либо является аксиомой AS, либо получена из предыдущих формул A_j, $1 \le j \le i$, посредством постулированных правил вывода.

Определение 3.2. $LTK_{r_{ax}} := \{A \in Fma(\mathscr{L}^{LTK}) \mid \vdash_{AS_{LTK_r}} A\}$.

Теорема 3.1. $\forall A \in Fma(\mathscr{L}^{LTK})\ (A \in LTK_{r_{ax}} \Rightarrow A \in LTK_r)$.

Доказательство будем проводить индукцией по длине вывода $D = D_1, \dots, D_j$ теоремы $A \in LTK_{r_{ax}}$. Покажем, что аксиомы системы AS_{LTK_r} истинны на всех LTK_r-фреймах при любом означивании.

$L_{\Box_T}$: Предположим, что аксиома $L_{\Box_T}$ опровергается, тогда существуют LTK_r-фрейм $\mathscr{F}$, означивание V и элемент $v \in W_{\mathscr{F}}$ такие, что $\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V \Box_T(\Box_T A \to B) \vee \Box_T(\Box_T B \to A)$. Тем самым $\langle \mathscr{F}, v\rangle \models_V \neg\Box_T(\neg\Box_T A \vee B) \wedge \neg\Box_T(\neg\Box_T B \vee A)$, значит, $\langle \mathscr{F}, v\rangle \models_V \Diamond_T(\Box_T A \wedge \neg B) \wedge \Diamond_T(\Box_T B \wedge \neg A)$. Тогда существуют элементы $x, y \in \{t \mid vR_T t\}$ такие, что $\langle \mathscr{F}, x\rangle \models_V \Box_T A \wedge \neg B$ и $\langle \mathscr{F}, y\rangle \models_V \Box_T B \wedge \neg A$. Возможны три варианта расположения элементов x, y.

(1) $x \in C(v)$ и $y \in C(y)$: $C(v)R_T C(y)$. Так как $y \in \{t \mid xR_T t\}$, то $\langle \mathscr{F}, y\rangle \models_V A \wedge \neg A$; противоречие.

(2) $y \in C(v)$ и $x \in C(x)$: $C(v)R_T C(x)$. Так как $x \in \{t \mid yR_T t\}$, то $\langle \mathscr{F}, x\rangle \models_V B \wedge \neg B$; противоречие.

(3) x, y принадлежат одному сгустку. Тогда $\langle \mathscr{F}, y\rangle \models_V \neg A$ противоречит $\langle \mathscr{F}, x\rangle \models_V \Box_T A$.

Таким образом, аксиома $L_{\Box_T}$ истинна на всех LTK_r-фреймах.

$K_{\Box_\xi}$: Предположим, что существуют LTK_r-фрейм $\mathscr{F}$, означивание V и элемент $v \in W_{\mathscr{F}}$ такие, что $\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V \Box_\xi(A \to B) \to (\Box_\xi A \to \Box_\xi B)$, где $\xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\}$. Тогда $\langle \mathscr{F}, v\rangle \models_V \Box_\xi(A \to B)$ и $\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V (\Box_\xi A \to \Box_\xi B)$. Тем самым $\forall z \in \{t \mid vR_\xi t\}(z \models_V (A \to B) \wedge A)$ и $\exists w \in \{t \mid vR_\xi t\} : w \models_V \neg B$. По правилу MP $w \models_V B$, т. е. $w \models_V B \wedge \neg B$, что невозможно. Следовательно, $K_{\Box_\xi}$ истинна на всех LTK_r-фреймах.

$T_{\Box_\xi}$: Пусть $\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V \Box_\xi A \to A$, $\xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\}$. Тогда $\langle \mathscr{F}, v\rangle \models_V \Box_\xi A$ и $\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V A$. Так как по рефлексивности отношения R_ξ выполняется $v \in \{t \mid vR_\xi t\}$, то $\langle \mathscr{F}, v\rangle \models_V A \wedge \neg A$, что приводит к противоречию. Тем самым $T_{\Box_\xi}$, где $\xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\}$, истинна на всех LTK_r-фреймах.

$4_{\Box_\xi}$: Пусть $\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V \Box_\xi A \to \Box_\xi\Box_\xi A$, $\xi \in \{\sim, 1, \dots, k\}$. Тогда $\langle \mathscr{F}, v\rangle \models_V \Box_\xi A$ и $\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V \Box_\xi\Box_\xi A$. Тем самым $\forall z \in \{t \mid vR_\xi t\}(z \models_V A)$ и $\exists w \in \{t \mid vR_\xi t\} : w \models_V \neg\Box_\xi A$. По определению истинности оператора $\Box_\xi$ существует элемент $m \in \{t \mid wR_\xi t\}$ такой, что $m \not\models_V A$. Так как по определению логики LTK_r отношения $R_\xi (\xi \in \{\sim, 1, \dots, k\})$ транзитивные, $vR_\xi m$ и $m \models_V A \wedge \neg A$. Из полученного противоречия следует, что формула $4_{\Box_\xi}$ истинна на всех LTK_r-фреймах.

$5_{\Box_\xi}$: Предположим, что $\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V \neg\Box_\xi A \to \Box_\xi\neg\Box_\xi A$, $\xi \in \{\sim, 1, \dots, k\}$. Тогда $\langle \mathscr{F}, v\rangle \models_V \neg\Box_\xi A$ и $\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V \Box_\xi\neg\Box_\xi A$. Это означает, что существуют элементы $z, w \in \{t \mid vR_\xi t\}$ такие, что $z \models_V \neg A$ и $w \models_V \Box_\xi A$. По определению истинности оператора $\Box_\xi$ получаем, что $\forall m \in \{t \mid wR_\xi t\}(m \models_V A)$. Из транзитивности отношения $R_\xi(\xi \in \{\sim, 1, \dots, k\})$ имеем $m \models_V A \wedge \neg A$; противоречие. Следовательно, формула $5_{\Box_\xi}$ истинна на всех LTK_r-фреймах.

$M.1$: Пусть формула $M.1$ опровергается в логике LTK_r. Тогда существуют LTK_r-фрейм $\mathscr{F}$, означивание V и элемент $v \in W_{\mathscr{F}}$ такие, что $\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V \Box_T A \to \Box_\sim A$. Поэтому $\langle \mathscr{F}, v\rangle \models_V \Box_T A$ и $\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V \Box_\sim A$. Отсюда $\forall z \in \{t \mid vR_T t\}(z \models_V A)$, но $\exists w \in \{t \mid wR_\sim t\} : w \not\models_V A$. Из определения отношений R_T и $R_\sim$ следует $\{t \mid vR_T t\} \supseteq \{t \mid wR_\sim t\}$. Таким образом, $w \models_V A \wedge \neg A$; противоречие. Используя аналогичные рассуждения, легко показать, что формула $M.2$ также истинна на всех LTK_r-фреймах.

AL: Предположим, что аксиома AL опровергается в LTK_r. Тогда существуют LTK_r-фрейм $\mathscr{F}$, означивание V и элемент $v \in W_{\mathscr{F}}$ такие, что $\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V \Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \wedge \Diamond_T(\neg A \wedge \Box_\sim B) \to \Box_T B$. Тем самым

$$\langle \mathscr{F}, v\rangle \models_V \Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \wedge \Diamond_T(\neg A \wedge \Box_\sim B), \tag{3.1}$$

$$\langle \mathscr{F}, v\rangle \not\models_V \Box_T B. \tag{3.2}$$

В силу (3.1) имеем

(3.1.1) $\forall z \in \{t \mid vR_\sim t\}(z \models_V A \wedge B)$;

(3.1.2) $\exists w \in \{t \mid vR_T t\} : w \models_V \neg A \wedge \Box_\sim B$.

Из условий (3.1.1), (3.1.2) и (3.2) получаем $\exists u \in \{t \mid vR_T t\} : u \models_V B \wedge \neg B$, что влечет за собой противоречие. Таким образом, формула AL истинна на всех LTK_r-фреймах.

Покажем, что использование постулированных правил вывода сохраняет истинность формул.

MP: Пусть $\mathscr{F} \models A$ & $\mathscr{F} \models A \to B$. По определению импликации имеем $\mathscr{F} \models \neg A \vee B$. Так как формула A истинна на каждом элементе фрейма $\mathscr{F}$, то $\mathscr{F} \models B$ также справедливо.

Nec: Если $\mathscr{F} \models A$, то формула A истинна на всех элементах при любом означивании. По определению отношения R_T имеем $\mathscr{F} \models \Box_T A$.

Таким образом, постулированные правила вывода сохраняют истинность, и на каждом шаге вывода при получении новой формулы из истинных формул будем получать истинную формулу. В частности, заключительная формула D_j последовательности вывода также истинна. $\Box$

В силу теоремы 3.1 справедлива

Лемма 3.2. *$LTK_{r_{ax}}$ непротиворечива.*

4. Канонические модели и открытые подмодели

Коротко напомним несколько стандартных определений и результатов о канонической модели и ее открытых подмоделях (для более подробного ознакомления с предметом см. [10, 11]).

Определение 4.1. Дана система аксиом AS в языке $\mathscr{L}$. Множество $\Delta \subset Fma(\mathscr{L})$ называется:

(a) *AS-непротиворечивым* $\Leftrightarrow \Delta \not\vdash_{AS} \bot$;

(b) *$\mathscr{L}$-полным* $\Leftrightarrow \forall A \in Fma(\mathscr{L}) A \in \Delta$ или $\neg A \in \Delta$;

(c) *AS-максимальным* $\Leftrightarrow \Delta$ — AS-непротиворечивое и $\mathscr{L}$-полное множество.

Определение 4.2. Пусть L — нормальная k-модальная логика в языке $\mathscr{L}$, содержащая модальные операторы $\Box_1, \dots, \Box_k$. *n-Каноническая модель* логики L — это модель $\mathscr{M}_n^c = \langle W_n^c, R_1^c, \dots, R_k^c, V_n^c \rangle$, где

(a) W_n^c — множество всех возможных L-максимальных множеств, содержащих формулы, зависящие только от пропозициональных переменных $\{p_1, \dots, p_n\}$;

(b) $\forall v, z \in W_n^c \; vR_i^c z \Leftrightarrow \{A \mid \Box_i A \in v\} \subseteq z$, $1 \le i \le k$;

(c) $V_n^c(p_i) = \{v \in W_n^c \mid p_i \in v\}$, $1 \le i \le n$.

Лемма 4.1. *Даны нормальная k-модальная логика L и n-каноническая модель этой логики $\mathscr{M}_n^c = \langle W_n^c, R_1^c, \dots, R_k^c, V_n^c \rangle$. Тогда $\forall v \in W_n^c \forall A(p_1, \dots, p_n) \in Fma(\mathscr{L})$ $\big(\Box_i A \in v \Leftrightarrow \forall z \in W_n^c \big(vR_i^c z \Rightarrow A \in z\big)\big)$.*

Лемма 4.2. *Даны нормальная k-модальная логика L и n-каноническая модель этой логики $\mathscr{M}_n^c = \langle W_n^c, R_1^c, \dots, R_k^c, V_n^c \rangle$. Тогда*

$$\forall v \in W_n^c \forall A(p_1, \dots, p_n) \in Fma(\mathscr{L}) \; \big(\langle \mathscr{F}_n^c, v \rangle \models_{V_n^c} A \Leftrightarrow A \in v\big),$$

где $\mathscr{F}_n^c$ — фрейм n-канонической модели $\mathscr{M}_n^c$.

Зафиксируем формулу $H((p_1, \dots, p_n) \notin LTK_{r_{ax}}$. Тогда множество $\{\neg H\}$ является AS_{LTK_r}-непротиворечивым и существует AS_{LTK_r}-максимальное множество w такое, что $H \notin w$. Следовательно, существует n-каноническая модель $\mathscr{M}_n^c = \langle \mathscr{F}_n^c, V_n^c \rangle$ для $LTK_{r_{ax}}$ (где $\mathscr{F}_n^c = \langle W_n^c, R_T^c, R_\sim^c, R_1^c, \dots, R_k^c, V_n^c \rangle$) такая, что $w \in W_n^c$ и по лемме 4.2 $\langle \mathscr{F}_n^c, w \rangle \not\models_{V_n^c} H$.

Лемма 4.3. *Модель $\mathscr{M}_n^c$ имеет следующие свойства:*

(a) *отношения $R_\sim^c, R_i^c$ рефлексивны, симметричны, транзитивны;*

(b) *отношение R_T^c рефлексивно, связно;*

(c) $\forall v, z \in W_n^c \big(vR_\sim^c z \Rightarrow \big(vR_T^c z \& zR_T^c v\big)\big)$;

(d) $\forall v, z \in W_n^c \; vR_i^c z \Rightarrow vR_\sim^c z$, *где* $i \in \{1, \dots, k\}$;

(e) *отношение R_T^c интранзитивно на сгустках: если C_1, C_2, C_3 — различные R_T^c-сгустки и $C_1 R_T^c C_2$ & $C_2 R_T^c C_3$, то $\neg\big(C_1 R_T^c C_3\big)$;*

(f) *модель $\mathscr{M}_n^c$ дискретна по отношению R_T^c.*

Доказательство. (a) Рефлексивность. Предположим, что существует теория $v \in W_n^c$ такая, что $\neg\big(vR_\xi^c v\big)$, где $\xi \in \{\sim, 1, \dots, k\}$, тогда существует формула A такая, что $\Box_\xi A \in v$ & $A \notin v$. Применяя аксиому $T_{\Box_\xi}$ и правило MP, получаем $A \wedge \neg A \in v$, что невозможно по непротиворечивости теории v. Таким образом, $\forall v \in W_n^c \big(vR_\xi^c v\big)$, т. е. отношения R_ξ^c рефлексивны.

Симметричность. Пусть существуют теории $z, v \in W_n^c$ такие, что $\big(zR_\xi^c v\big)$ & $\neg\big(vR_\xi^c z\big)$, где $\xi \in \{\sim, 1, \dots, k\}$. Тогда существует формула A такая, что $\Box_\xi A \in v$ & $A \notin z$, т. е. $\neg\Box_\xi A \in z$. По аксиоме $5_{\Box_\xi}$ и правилу MP получаем $\Box_\xi \neg\Box_\xi A \in z$. Так как $\big(zR_\xi^c v\big)$, то $\neg\Box_\xi A \in v \to \neg\Box_\xi A \wedge \Box_\xi A \in v$, что приводит к противоречию. Таким образом, $\forall v, z \in W_n^c \big(\big(vR_\xi^c z\big) \Rightarrow \big(zR_\xi^c v\big)\big)$. В обратную сторону доказательство аналогичное.

Транзитивность. Допустим, что существуют теории $z, v, k \in W_n^c$ такие, что $\big(zR_\xi^c v\big)$, $\big(vR_\xi^c k\big)$ & $\neg\big(zR_\xi^c k\big)$, где $\xi \in \{\sim, 1, \dots, k\}$. Так как $\neg\big(zR_\xi^c k\big)$, существует формула A такая, что $\Box_\xi A \in z$ & $A \notin k$. При этом, используя аксиому $4_{\Box_\xi}$ и правило MP, получаем $\Box_\xi \Box_\xi A \in z$. Поскольку $\big(zR_\xi^c v\big)$, то $\Box_\xi A \in v$. Снова по аксиоме $4_{\Box_\xi}$ и правилу MP имеем $\Box_\xi \Box_\xi A \in v$. Так как $\big(vR_\xi^c k\big)$, то $A \in k$. Таким образом, $A \wedge \neg A \in k$, что приводит к противоречию. Итак, $\forall v, z, k \in W_n^c$ $\big(\big(zR_\xi^c v\big)$ & $\big(vR_\xi^c k\big) \Rightarrow \big(zR_\xi^c k\big)\big)$.

Из вышесказанного следует, что отношения R^c_ξ, где $\xi \in \{\sim, 1, \ldots, k\}$, рефлексивны, симметричны, транзитивны, т. е. являются отношениями эквивалентности.

(b) Доказательство рефлексивности отношения R^c_T полностью повторяет доказательство рефлексивности из п. (a).

Связность. Пусть R^c_T не связно, т. е. существуют теории $z, v, k \in W^c_n$ такие, что $\big(zR^c_Tv\big)$, $\big(zR^c_Tk\big)$, $\neg\big(vR^c_Tk\big)$ & $\neg\big(vR^c_Tk\big)$. Тогда существуют формулы A, B такие, что $\Box_T A \wedge \neg B \in v$ и $\Box_T B \wedge \neg A \in k$, т. е. $\Box_T A \to B \notin v$ и $\Box_T B \to A \notin k$. Это означает, что аксиома $L_{\Box_T}$ не принадлежит теории z, что противоречит определению n-канонической модели. Таким образом, показали, что отношение R^c_T связно.

(c) Пусть $\neg\big(zR^c_Tv\big)$. Тогда $\exists A : \Box_T A \in z$ & $A \notin v$. По аксиоме $M.1$ имеем $\Box_\sim A \in z$. Тем самым из определения отношений в n-канонической модели следует $\neg\big(zR^c_\sim v\big)$. Аналогично доказывается случай $\neg\big(vR^c_Tz\big)$.

(d) Пусть $\neg\big(zR^c_\sim v\big)$. Тогда $\exists A : \Box_\sim A \in z$ & $A \notin v$. По аксиоме $M.2$ имеем $\Box_i A \in z$. Из определения отношений в n-канонической модели получаем $\neg\big(zR^c_iv\big)$.

(e) Рассмотрим цепь из трех различных R_T-сгустков $C(v), C(z), C(k)$, порожденных элементами v, z и k соответственно. Предположим, что $C(v)R^c_TC(z)$ и $C(z)R^c_TC(k)$. Определим, может ли иметь место $C(v)R^c_TC(k)$.

Так как теории v, z и k принадлежат разным $R^c_\sim$-сгусткам, т. е. $\neg(C(v)R^c_\sim C(z))$, $\neg(C(z)R^c_\sim C(k))$ & $\neg(C(v)R^c_\sim C(k))$, существуют формулы α, β, γ такие, что $\Box_\sim\alpha \in v$ & $\Box_\sim\alpha \notin z$, $\Box_\sim\beta \in z$ & $\Box_\sim\beta \notin k$ и $\Box_\sim\gamma \in v$ & $\Box_\sim\gamma \notin k$.

Обозначим $A = \alpha$ и $B = \Box_\sim\beta \vee \Box_\sim\gamma$. Проверим истинность аксиомы AL на элементе v. Из вышесказанного следует, что

(4.0.1) $\Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \in v$;

(4.0.2) $\neg\Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \in z$;

(4.0.3) $\neg B \in k$.

Так как выполняется vR^c_Tz, из (4.0.1) и (4.0.2) вытекает, что $(\Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \wedge \Diamond_T(\neg A \wedge \Box_\sim B)) \in v$. Другими словами, на элементе v истинна посылка аксиомы AL. По построению n-канонической модели известно, что $AL \in v$, т. е. выполняется $\Box_T B \in v$. Из вышесказанного и п. (4.0.3) следует, что $\neg(vR_Tk)$. Таким образом, если $C(v)R^c_TC(z)$ и $C(z)R^c_TC(k)$, то $\neg\big(C(v)R^c_TC(k)\big)$, т. е. отношение R^c_T интранзитивно на сгустках.

(f) Для доказательства дискретности требуется показать, что между двумя различными R^c_T-сгустками существует только конечное число R_T-сгустков. В частности, $\forall C(a), C(b) \in W^c_n\big(C(a)R^c_TC(b)\big)$ & $C(a) \neq C(b)$ не существует элемента $c \in W^c_n$ такого, что $C(a)R^c_TC(c)$ & $C(c)R^c_TC(b)$, причем $C(c) \neq C(a) \neq C(b)$. Доказательство этого факта непосредственно следует из интранзитивности на сгустках отношения R^c_T. Таким образом, модель $\mathscr{M}^c_n$ дискретна по отношению R^c_T. $\square$

Определение 4.3. n-Модальный фрейм $\mathscr{F} = \langle W_\mathscr{F}, R_1, \ldots, R_n\rangle$ называется *подфреймом* m-модального фрейма $\mathscr{S} = \langle W_\mathscr{S}, S_1, \ldots, S_m\rangle$, если $n = m$, $W_\mathscr{F} \subseteq W_\mathscr{S}$ и каждое R_i является ограничением S_i на $W_\mathscr{F}$.

Определение 4.4. n-Модальный фрейм $\mathscr{F} = \langle W_\mathscr{F}, R_1, \ldots, R_n\rangle$ называется *открытым подфреймом* m-модального фрейма $\mathscr{S} = \langle W_\mathscr{S}, S_1, \ldots, S_m\rangle$ (пишем $\mathscr{F} \sqsubseteq \mathscr{S}$), если $\mathscr{F}$ — подфрейм $\mathscr{S}$ и $\forall v \in W_\mathscr{F} \forall z \in W_\mathscr{S}((\exists S_i : vS_iz) \Rightarrow z \in W_\mathscr{F})$. Модель $\langle \mathscr{F}, V\rangle$ называется *открытой подмоделью* $\langle \mathscr{S}, S\rangle$, если $\mathscr{F} \sqsubseteq \mathscr{S}$ и V — ограничение S на $W_\mathscr{F}$.

Справедливо стандартное утверждение о сохранении истинности формул на подмодели.

Лемма 4.4. *Если* $\mathscr{M}_2 = \langle \mathscr{F}_2, V_2 \rangle$ *— открытая подмодель модели* $\mathscr{M}_1 = \langle \mathscr{F}_1, V_1 \rangle$, *то* $\forall v \in W_{\mathscr{F}_2} (\langle \mathscr{F}_2, v\rangle \models_{V_2} A \Leftrightarrow \langle \mathscr{F}_1, v \rangle \models_{V_1} A)$.

Обозначим транзитивное замыкание подфрейма, порожденного элементом w, по отношению R_T через $w^{\leq} := \{z \mid wR_Tw_1 \dots R_Tw_p \dots R_Tz\}$.

В модели $\langle \mathscr{F}_n^c, V_n^c \rangle$ рассмотрим подмодель $\langle \mathscr{F}_{w^{\leq}}, V_n^c \rangle$, порожденную множеством $w^{\leq}$. Напомним, что в n-канонической модели формула H опровергается на элементе w. По лемме 4.4 имеем $\langle \mathscr{F}_{w^{\leq}}, w \rangle \not\models_{V_n^c} H$, откуда $\mathscr{F}_{w^{\leq}} \not\models H$.

Лемма 4.5. *Модель* $\mathscr{M}_w^c = \langle \mathscr{F}_{w^{\leq}}, V_n^c \rangle$ *обладает следующими свойствами:*

(a) *отношения* $R_\sim^c, R_1^c, \dots, R_k^c$ *являются отношениями эквивалентности;*

(b) *отношение* R_T^c *рефлексивно, связно;*

(c) $\forall v, z \in W_{\mathscr{F}}\ vR_\sim^c z \Rightarrow (vR_T^c z \& zR_T^c v)$;

(d) $\forall v, z \in W_{\mathscr{F}}\ vR_i^c z \Rightarrow vR_\sim^c z$, *где* $i \in \{1, \dots, k\}$;

(e) *отношение* R_T^c *интранзитивно на сгустках: если* C_1, C_2, C_3 *— различные* R_T^c*-сгустки и* $C_1R_T^cC_2$ & $C_2R_T^cC_3$, *то* $\neg(C_1R_T^cC_3)$;

(f) *модель* $\mathscr{M}_w^c$ *дискретна по отношению* R_T^c.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 4.3.

Из пп. (c) и (d) леммы 4.5 следует, что на модели $\mathscr{M}_w^c$ бинарные отношения обладают свойствами $PM.1$ и $PM.2$. Однако свойство $PM.3$ может не выполняться, т. е. могут существовать элементы $v, z \in W_w^c$ такие, что $(vR_T^cz)\&(zR_T^cv)\&\neg(vR_\sim^cz)$. Другими словами, v и z могут порождать два несравнимых $R_\sim^c$-сгустка внутри одного R_T^c-сгустка. Далее докажем, что фреймом модели $\mathscr{M}_w^c$, содержащим такой сгусток, является $\mathscr{F}_\Theta$. Напомним, что $W_{\mathscr{F}_\Theta} = C$, при этом $C = C_\sim^1 \cup C_\sim^2$. В частности, сгусток C не имеет R_T^c-предшественников и R_T^c-последователей и состоит ровно из двух несравнимых $R_\sim^c$-сгустков.

Лемма 4.6. *Если некоторый сгусток* $C_T \in \mathscr{M}_w^c$ *состоит более чем из одного* $R_\sim^c$*-сгустка, то фреймом, содержащим такой сгусток, является* $\mathscr{F}_\Theta$.

Доказательство. Требуется показать, что сгусток $C_T \in \mathscr{M}_w^c$ изолированный и состоит ровно из двух различных $R_\sim^c$-сгустков.

(i) Предположим, что существуют элементы $k, z, v \in W_w^c$ такие, что $k, z, v \in C_T$, причем $R_\sim$-сгустки $C_\sim(k), C_\sim(z), C_\sim(v)$ несравнимы по отношению $R_\sim^c$, т. е. R_T^c-сгусток C_T состоит более чем из двух несравнимых $R_\sim^c$-сгустков. Покажем, что в такой ситуации на элементе k аксиома AL опровергается.

(i.1) Так как $\neg(kR_\sim^cz)$, существует формула $\Box_\sim A'$ такая, что $k \models_{V_n^c} \Box_\sim A'$ и $z \not\models_{V_n^c} \Box_\sim A'$. По аксиоме $4_{\Box_\sim}$ и правилу MP $k \models_{V_n^c} \Box_\sim\Box_\sim A'$.

Обозначим $A = \Box_\sim A'$.

(i.2) Поскольку $\neg(zR_\sim^cv)$, существует формула $\Box_\sim\alpha$ такая, что $z \models_{V_n^c} \Box_\sim\alpha$ и $v \not\models_{V_n^c} \Box_\sim\alpha$.

(i.3) Так как $\neg(kR_\sim^cv)$, существует формула $\Box_\sim\beta$ такая, что $k \models_{V_n^c} \Box_\sim\beta$ и $v \not\models_{V_n^c} \Box_\sim\beta$.

Пусть $B = \Box_\sim\alpha \vee \Box_\sim\beta$.

(i.4) Поскольку для любого k' такого, что $kR_\sim^ck'$, выполняется $k' \models_{V_n^c} \Box_\sim\beta$, то $k' \models_{V_n^c} B$. Из определения истинности оператора $\Box_\sim$ следует, что $k \models_{V_n^c} \Box_\sim B$. Аналогично получаем, что $z \models_{V_n^c} \Box_\sim B$. При этом из (i.2) и (i.3) имеем $v \not\models_{V_n^c} B$.

(i.5) Напомним, что элементы k, z, v принадлежат одному временно́му сгустку, т. е. имеет место $\big(kR^c_T z\big)$ & $\big(kR^c_T v\big)$.

Из пп. (i.1)–(i.5) следует, что $k \models_{V^c_n} \Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \wedge \Diamond_T(\neg A \wedge \Box_\sim B)$. Так как $v \in \big\{t \mid kR^c_T t\big\}$, по определению истинности оператора $\Box_T$ получаем $k \not\models_{V^c_n} \Box_T B$. Тем самым на элементе k опровергается аксиома AL, что противоречит ранее доказанному.

Таким образом, показали, что R^c_T-сгусток не может состоять более чем из двух $R_\sim$-несравнимых $R^c_\sim$-сгустков.

(ii) Пусть существуют элементы $k, z \in W^c_w$ такие, что $k, z \in C$, где $C = C^1_\sim(k) \cup C^2_\sim(z)$, и существует сгусток $C_{+1}(m)$ такой, что $CR^c_T C_{+1}$.

Доказательство этого пункта проводится по той же схеме, что и доказательство п. (i). Используя аналогичные рассуждения, также можно показать, что на элементе k опровергается аксиома AL, что приводит к противоречию. Получаем, что составной сгусток C_T не может иметь R^c_T-последователя.

(iii) Пусть существуют элементы $k, z \in W^c_w$ такие, что $k, z \in C$, где $C = C^1_\sim(k) \cup C^2_\sim(z)$, и существует сгусток $C_{-1}(m)$ такой, что $C_{-1}R^c_T C$.

(iii.1) Поскольку $\neg\big(kR^c_\sim z\big)$, существует формула $\Box_\sim B'$ такая, что $k \models_{V^c_n} \Box_\sim B'$ и $z \not\models_{V^c_n} \Box_\sim B'$.

(iii.2) Так как $\big(mR^c_T z\big)$ и $\big(mR^c_T k\big)$, существует формула $\Box_T A'$ такая, что $m \models_{V^c_n} \Box_T A'$, $k \models_{V^c_n} A'$ и $z \models_{V^c_n} A'$. В качестве A' можно взять любую аксиому системы AS_{LTK_r}.

(iii.3) Поскольку сгусток C является R^c_T-последователем C_{-1}, эти два сгустка несравнимы по отношению $R^c_\sim$, иначе $CR^c_T C_{-1}$ по лемме 4.5(c), что невозможно в рассматриваемом случае. Тогда $\exists \Box_\sim F : k \models_{V^c_n} \Box_\sim F$ и $m \not\models_{V^c_n} \Box_\sim F$. Аналогично $\exists \Box_\sim E : z \models_{V^c_n} \Box_\sim E$ и $m \not\models_{V^c_n} \Box_\sim E$.

Обозначим $A = \Diamond_\sim A' \to \neg\Box_\sim F$ и $B = (\Box_\sim F \vee \Box_\sim E) \to \Box_\sim B'$.

(iii.4) Из определения истинности оператора $\Box_\sim$ и симметричности отношения $R^c_\sim$ следует, что $\forall m' : mR^c_\sim m'$, $m' \models_{V^c_n} \Diamond_\sim A' \wedge \neg\Box_\sim F$, т. е. выполняется $m \models_{V^c_n} \Box_\sim A$. Также $\forall m' : mR^c_\sim m'$, $m' \not\models_{V^c_n} \Box_\sim F \vee \Box_\sim E$, следовательно, $m \models_{V^c_n} \Box_\sim B$.

Так как $\forall k' : kR^c_\sim k'$, $k' \models_{V^c_n} (\Box_\sim F \vee \Box_\sim E) \wedge \Box_\sim B'$, выполняется $k \models_{V^c_n} \Box_\sim B$.

Поскольку $k \models_{V^c_n} \Diamond_\sim A'$ и $k \not\models_{V^c_n} \neg\Box_\sim F$, то $k \not\models_{V^c_n} A$.

Так как $z \models_{V^c_n} \Box_\sim F \vee \Box_\sim E$ и $z \not\models_{V^c_n} \Box_\sim B'$, то $z \not\models_{V^c_n} B$.

(iii.5) Напомним, что имеет место $\big(mR^c_T z\big)$ & $\big(mR^c_T k\big)$.

Таким образом, из (iii.1)–(iii.5) следует, что $m \models_{V^c_n} \Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \wedge \Diamond_T(\neg A \wedge \Box_\sim B)$ и $m \not\models_{V^c_n} \Box_T B$. Тем самым на элементе m опровергается аксиома AL, что приводит к противоречию. Значит, составной сгусток C не может являться R^c_T-последователем никакого R^c_T-сгустка. $\Box$

Из вышесказанного и леммы 2.1 вытекает

Лемма 4.7. *В $\mathscr{F}^c_w$ любой R^c_T-сгусток либо является одновременно и $R^c_\sim$-сгустком, либо изолирован и состоит не более чем из двух несравнимых $R^c_\sim$-сгустков. При этом такой составной сгусток адекватен логике LTK_r.*

Из лемм 4.5 и 4.7 следует, что открытый подфрейм $\mathscr{F}_{w\leq}$ модели $\mathscr{M}^c_n$ либо удовлетворяет всем свойствам LTK_r-фрейма, либо является его p-морфным образом, т. е. адекватен логике LTK_r. Тем самым справедлива

Теорема 4.8. *Если $H \notin LTK_{r_{ax}}$ $\forall H \in Fma(\mathscr{L}^{LTK})$, то существует LTK_r-фрейм $\mathscr{F}$ такой, что $\mathscr{F} \not\models H$.*

Следствие 4.9. $LTK_{r_{ax}} = LTK_r$.

Следствие 4.10. *Логика* LTK_r *конечно аксиоматизируема.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fagin R., Halpern J. Y., Moses Y., Vardi M. Y.* Reasoning about knowledge. Cambridge, MA: MIT Press, 1995.
2. *Bull R., Segerberg K.* Basic modal logic // Gabbay D., Guenthner F., eds. Handbook of philosophical logic. Dordrecht: Reidel, 1984. V. II. P. 1–88.
3. *Halpern J. Y., Van Der Meyden R., Vardi M. Y.* Complete axiomatization for reasoning about knowledge and time // SIAM J. Comput. 2004. V. 33, N 3. P. 674–703.
4. *Thomason R. H.* Combinations of tense and modality // Gabbay D., Guenthner F., eds. Handbook of philosophical logic. Dordrecht: Reidel, 1984. V. II. P. 135–165.
5. *Gabbay D., Kurucz A., Wolter F., Zakharyaschev M.* Many-dimensional modal logics. Theory and applications. New York; Amsterdam: Elsevier, North-Holland, 2003. (Theory Appl. Stud. Logic Found. Math,; V. 148).
6. *Calardo E., Rybakov V. V.* Combining time and knowledge, semantic approach // Bull. Section Logic. 2005. V. 34, N 1. P. 13–21.
7. *Calardo E.* Admissible inference rules in the linear logic of knowledge and time LTK // Logic J. IGPL. 2006. V. 14, N 1. P. 15–34.
8. *Calardo E., Rybakov V. V.* An axiomatization for the multi-modal logic of knowledge and linear time LTK // Logic J. IGPL. 2007. V. 15, N 3. P. 239–254.
9. *Lukyanchuk A.* Decidability of multi-modal logic LTK of linear time and knowledge // J. Sib. Federal Univ. 2013. V. 6, N 2. P. 220–226.
10. *Rybakov V. V.* Admissibility of logical inference rules. Amsterdam: Elsevier Sci., 1997.
11. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal logic. Oxford: Clarendon Press, 1997.

Статья поступила 25 марта 2013 г.

Лукьянчук Александра Николаевна,
Сибирский федеральный университет,
Институт математики и фундаментальной информатики,
кафедра алгебры и логики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`a.lukyanchuk@inbox.ru`

Римацкий Виталий Валентинович
Сибирский федеральный университет,
Институт математики и фундаментальной информатики,
кафедра высшей математики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`gemmeny@rambler.ru`