Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 517.983:517.968.25

О ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ 1–ГО, 2–ГО И 3–ГО РОДОВ В L_2

В. Б. Коротков

Аннотация. Рассматриваются функциональные уравнения 1-го, 2-го и 3-го родов с операторами из широких классов линейных непрерывных операторов в L_2, содержащих все интегральные операторы. Предлагаются методы приведения этих уравнений линейными обратимыми заменами либо к эквивалентным линейным интегральным уравнениям 1-го рода с ядерными операторами, либо к эквивалентным линейным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами. К получающимся интегральным уравнениям применимы различные приближенные методы решения.

Ключевые слова: линейное функциональное уравнение 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2, почти компактный оператор, интегральный оператор, карлемановский интегральный оператор, оператор Гильберта — Шмидта, ядерный оператор, ядро интегрального оператора, квазивырожденное ядро, вырожденное ядро, интегральное уравнение 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2, приближенные методы решения функциональных и интегральных уравнений.

Пусть (X, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой μ, $L_0 = L_0(X, \mu)$ — пространство всех определенных на X μ-измеримых μ-почти всюду конечных функций с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множествах μ-меры 0, $L_2 = L_2(X, \mu)$ — пространство всех функций f из L_0, имеющих конечную норму

$$\|f\| = \left(\int\limits_X |f(t)|^2 \, d\mu(t) \right)^{1/2}.$$

Через (f, g) обозначим скалярное произведение функций f, g из L_2. Всюду в статье предполагается, что L_2 — комплексное пространство: в случае вещественного L_2 все рассмотрения аналогичны.

Обозначим через $B(L_2)$ пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из L_2 в L_2, с операторной нормой $\|\cdot\|$. Через T^* будем обозначать сопряженный к T оператор, через 1 — тождественный оператор.

Определение 1. Оператор $T \in B(L_2)$ называется *почти компактным* [1], если существует разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что $P_{X_n}T : L_2 \to L_2$, $n = 1, 2, \dots,$ — компактные операторы; здесь и далее $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_2$, χ_e — характеристическая функция множества $e \subset X$.

Определение 2. Оператор $T \in B(L_2)$ называется *интегральным*, если найдется функция $K \in L_0(X \times X, \mu \times \mu)$ такая, что для любого $f \in L_2$

$$Tf(s) = \int\limits_X K(s,t) f(t) \, d\mu(t) \tag{1}$$

для почти всех $s \in X$. Интеграл в (1) и всюду в статье понимается в лебеговом смысле. Ниже вместо $\int\limits_X (\cdot)\, d\mu$ будем писать $\int (\cdot)\, d\mu$. Функция $K(s,t)$ называется *ядром интегрального оператора* T. Будем говорить, что ядро K порождает интегральный оператор (по формуле (1)).

Определение 3. Если ядро K интегрального оператора T удовлетворяет условию Карлемана

$$\int |K(s,t)|^2\, d\mu(t) < \infty \tag{2}$$

для почти всех $s \in X$, то T и K называются *карлемановскими*.

Определение 4. Карлемановское ядро K называется *квазивырожденным* [2], если

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{E_n}(s)}{\sqrt{\mu E_n}} \overline{u_n(t)}, \tag{3}$$

где $\{u_n\} \subset L_2$, $\{E_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами. Ядра

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\chi_{E_n}(s)}{\sqrt{\mu E_n}} \overline{u_n(t)}. \quad m = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

назовем *специальными вырожденными ядрами*, порожденными ядром (3).

Определение 5. Если ядро K интегрального оператора T удовлетворяет условию Гильберта — Шмидта

$$\int\int |K(s,t)|^2\, d\mu(t) d\mu(s) < \infty, \tag{5}$$

то T называется *оператором Гильберта — Шмидта*.

Каждый оператор Гильберта — Шмидта является компактным карлемановским оператором.

Следующий важный класс интегральных операторов, который нам понадобится, — класс ядерных операторов. Приведем их определение и некоторые основные свойства.

Определение 6. Оператор $T \in B(L_2)$ называется *ядерным*, если он представим в виде произведения двух интегральных операторов Гильберта — Шмидта из $B(L_2)$. Совокупность всех ядерных операторов из $B(L_2)$ обозначим через C_1. Каждый оператор, принадлежащий C_1, является интегральным оператором Гильберта — Шмидта. Его ядро будем называть *C_1-ядром*.

Оператор $T \in B(L_2)$ ядерный тогда и только тогда, когда существуют последовательности $\{u_n\} \subset L_2$, $\{v_n\} \subset L_2$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|\, \|v_n\| < \infty \tag{6}$$

и для всех $f \in L_2$

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} (f, u_n) v_n. \tag{7}$$

Определение 7. *Ядерной нормой* $\|T\|_1$ ядерного оператора (7) называется $\inf \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|u_n\| \|v_n\|$, где нижняя грань берется по всевозможным представлениям (7) оператора T с $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, удовлетворяющими (6).

Из определения следует, что если T ядерный, то $\|T\| \le \|T\|_1$, $\|T\|_1 = \|T^*\|_1$ и для любых $A, B \in B(L_2)$ оператор ATB ядерный и $\|ATB\|_1 \le \|T\|_1\|A\|\,\|B\|$.

Ядро $K(s,t)$ ядерного оператора (7) представляется в виде

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(s)\overline{u_n(t)},$$

где ряд сходится в силу (6) абсолютно по норме пространства $\mathbb{L}_2 = L_2(X \times X, \mu\times\mu)$ и абсолютно $(\mu\times\mu)$-почти всюду в $X\times X$, так что вырожденные ядра $\sum\limits_{n=1}^{m} v_n(s)\overline{u_n(t)}$, $m = 1, 2, \dots$, сходятся к ядру $K(s,t)$ по норме $\mathbb{L}_2$ и $(\mu\times\mu)$-почти всюду в $X\times X$.

Определение 8. Оператор $U \in B(L_2)$ называется *унитарным*, если существует обратный $U^{-1} \in B(L_2)$ и $U^{-1} = U^*$.

Из определения вытекает, что $(Uf, Ug) = (f, g)$, $\|Uf\| = \|f\|$ для любых $f, g \in L_2$.

Теорема 1. *Пусть L_2 — несепарабельное пространство, образ $\operatorname{im} T$ оператора $T \in B(L_2)$ сепарабелен. Тогда уравнение 1-го рода $Tx = f \in L_2$ эквивалентно интегральному уравнению 1-го рода с квазивырожденным C_1-ядром.*

Доказательство. Будем считать, не умаляя общности, что $\dim\operatorname{im} T = \infty$. Пусть $\{f_n\}$ — ортонормированный базис в $\operatorname{im} T$, $[f_n]$ — замкнутая линейная оболочка последовательности $\{f_n\}$, $[f_n]^\perp$ — ортогональное дополнение к $[f_n]$, $\{f_\xi^\perp, \xi \in \Xi\}$ — ортонормированный базис $[f_n]^\perp$. Выберем произвольную последовательность попарно не пересекающихся множеств $e_n \subset X$, $n = 1, 2, \dots$, с конечными положительными мерами и рассмотрим унитарный оператор $V \in B(L_2)$, определяемый равенствами

$$Vf_n = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}},\ n = 1, 2, \dots, \quad Vf_\xi^\perp = e_\xi^\perp,\ \xi \in \Xi, \tag{8}$$

где $\{e_\xi^\perp, \xi \in \Xi\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке E ортонормированной последовательности $\{\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}\}$. Тогда $VTh \in E$ для любого $h \in L_2$. Следовательно,

$$VTx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(VTx, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}\right)\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(x, T^* f_n)\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} = Vf.$$

Это уравнение записывается в виде

$$\int K(s,t)x(t)\,d\mu(t) = Vf(s), \tag{9}$$

где

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}}\overline{T^* f_n(t)}. \tag{10}$$

Рассмотрим функцию $b(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n\chi_{e_n}(s) + \chi_{e_0}(s)$, где $e_0 = X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$, $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n \le 1$. Для всех $s \in X$ имеем $0 < b(s) \le 1$. Умножив обе части уравнения (9) на $b(s)$, получим эквивалентное интегральное уравнение 1-го рода

$$\int C(s,t)x(t)\,d\mu(t) = b(s)Vf(s) \in L_2 \tag{11}$$

с квазивырожденным C_1ядром

$$C(s,t) = b(s)K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{T^* f_n(t)}.$$

Отметим, что уравнения $Tx = f$ и (11) имеют одни и те же решения и что для вычисления Vf и ядра $C(s,t)$ не требуется знания V на $f_\xi^\perp$, $\xi \in \Xi$.

Следствие. *Утверждение теоремы* 1 *справедливо, если T — почти компактный оператор.*

Теорема 2. *Пусть L_2 — произвольное (сепарабельное или несепарабельное) пространство, $T \in B(L_2)$ — почти компактный оператор. Тогда уравнение $Tx = f \in L_2$ эквивалентно уравнению 1-го рода с компактным оператором.*

Доказательство. Положим

$$c(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{X_n}, \quad \text{где } \lambda_n > 0,\ n = 1, 2, \dots,\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \le 1,$$

$\{X_n\}$ — разбиение множества X такое, что $P_{X_n}T$ — компактные операторы (мы предполагаем, что $\{X_n\}$ — счетное разбиение: если оно конечно, то T компактен). Умножив обе части уравнения $Tx = f$ на $c(s)$, получим эквивалентное уравнение $T_0x = Cf \in L_2$ с компактным оператором $T_0 = CT$, где $Cf(s) = c(s)f(s)$, $f \in L_2$. Важным примером почти компактного оператора является любой интегральный оператор из $B(L_2)$ [3, с. 66; 4, 5]. В [2, с. 91–93] в случае, когда мера μ конечна и сепарабельна, для произвольного интегрального оператора $T \in B(L_2)$ приведено построение разбиения $\{X_n\}$, для которого $P_{X_n}T$, $n = 1, 2, \dots,$ — компактные операторы.

Теорема 3. *Пусть L_2 — сепарабельное пространство, $N_i \in B(L_2)$, $i = 0, 1$, и существует ортонормированная система* (о.н.с.) *$\{\psi_n\} \subset L_2$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|(N_i^* - \bar{\alpha}_i 1)\psi_n\| = 0, \quad i = 0, 1. \tag{12}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить унитарный оператор $W \in B(L_2)$ такой, что $WN_iW^{-1} = \alpha_i 1 + K_i + \Gamma_i$, $i = 0, 1$, где Γ_i — ядерные операторы с ядерной нормой $< \varepsilon$, K_i — интегральные операторы с квазивырожденными карлемановскими ядрами

$$K_i(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}} \overline{P_{n,i}(t)}, \quad i = 0, 1, \tag{13}$$

здесь $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, $\{P_{n,i}\}$ — ограниченные в L_2 последовательности.

Доказательство. Пользуясь (12), выберем для $\varepsilon > 0$ подпоследовательность $\{\varphi_n\} \subset \{\psi_{2n}\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|(N_i^* - \bar{\alpha}_i 1)\varphi_n\| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \tag{14}$$

и рассмотрим ядерные операторы

$$D_i f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)(N_i^* - \bar{\alpha}_i 1)\varphi_n, \quad f \in L_2.$$

В силу (14) их ядерные нормы меньше ε. Введем операторы $Q_i = N_i^* - \bar{\alpha}_i 1 - D_i$. Так как $Q_i \varphi_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, $i = 0, 1$, то $\operatorname{im} Q_i^* \subseteq [\varphi_n]^{\perp}$, где $[\varphi_n]^{\perp}$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке $[\varphi_n]$ последовательности $\{\varphi_n\}$. Пусть $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, E — замкнутая линейная оболочка о.н.с. $\{\chi_{e_{2n}}/\sqrt{\mu e_{2n}}\}$, $E^{\perp}$ — ортогональное дополнение к E. Имеем $\dim[\varphi_n] = \dim[\varphi_n]^{\perp} = \dim E = \dim E^{\perp} = \infty$.

Пусть $\{\varphi_n^{\perp}\}$ — ортонормированный базис $[\varphi_n]^{\perp}$ и $\{e_n^{\perp}\}$ — ортонормированный базис $E^{\perp}$. Определим унитарный оператор $W \in B(L_2)$ равенствами

$$W\varphi_n^{\perp} = \chi_{e_{2n}}/\sqrt{\mu e_{2n}}, \quad W\varphi_n = e_n^{\perp}, \ n = 1, 2, \dots. \tag{15}$$

Тогда для любого $h \in L_2$ имеем $Q_i^* h \in [\varphi_n]^{\perp}$, кроме того,

$$D_i^* h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, (N_i^* - \bar{\alpha}_i 1)\varphi_n)\varphi_n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W(N_i - \alpha_i 1)W^{-1}h &= W(Q_i^* + D_i^*)W^{-1}h \\ &= W\sum_{n=1}^{\infty}\big(Q_i^* W^{-1}h, \varphi_n^{\perp}\big)\varphi_n^{\perp} + W\sum_{n=1}^{\infty}(W^{-1}h, (N_i^* - \bar{\alpha}_i 1)\varphi_n)\varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\big(h, WQ_i\varphi_n^{\perp}\big)\frac{\chi_{e_{2n}}}{\sqrt{\mu e_{2n}}} + \sum_{n=1}^{\infty}(h, W(N_i^* - \bar{\alpha}_i 1)\varphi_n)e_n^{\perp}. \end{aligned}$$

Положим

$$P_{n,i} = WQ_i\varphi_n^{\perp} = W(N_i^* - \bar{\alpha}_i 1 - D_i)\varphi_n^{\perp} = W(N_i^* - \bar{\alpha}_i 1)\varphi_n^{\perp},$$

$$K_i(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}}\overline{P_{n,i}(t)}. \tag{16}$$

Тогда $WN_iW^{-1} = \alpha_i 1 + W(N_i - \alpha_i 1)W^{-1} = \alpha_i 1 + K_i + \Gamma_i$, где K_i — карлемановские интегральные операторы с квазивырожденными ядрами (16), $\Gamma_i = WD_i^*W^{-1}$ — ядерные операторы с ядерной нормой $< \varepsilon$ и C_1-ядрами

$$\Gamma_i(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^{\perp}(s)\overline{W(N_i^* - \bar{\alpha}_i 1)\varphi_n(t)}.$$

Следствие. *Операторы WN_i, $i = 0, 1$, представляются в виде $WN_i = \alpha_i W + L_i + F_i$, где $L_i = K_iW$ — карлемановские интегральные операторы с квазивырожденными ядрами*

$$L_i(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}}\overline{(N_i^* - \bar{\alpha}_i 1)\varphi_n^{\perp}(t)},$$

$F_i = \Gamma_i W$ *— ядерные операторы с C_1-ядрами*

$$F_i(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^{\perp}(s)\overline{(N_i^* - \bar{\alpha}_i 1)\varphi_n(t)}.$$

Всюду далее предполагается, что L_2 сепарабельно.

Теорема 4. *Пусть $T \in B(L_2)$ и $e \subset X$ — множество с конечной положительной мерой такое, что*

(i) *существует равномерно ограниченная о.н.с. функций $\psi_n \in L_2$, $n = 1, 2, \dots$, с носителями в e;*

(ii) *множество $P_e T S_2$ компактно по мере (здесь S_2 — единичный шар L_2).*

Тогда уравнение 1-го рода $Tx = f \in L_2$ эквивалентно интегральному уравнению 1-го рода с C_1-ядром.

Доказательство. Из условия (ii) и теоремы 1.3.7 в [6] следует, что оператор $P_e T : L_2 \to L_1$ компактен. Тогда $T^* Pe : L_\infty \to L_2$ компактен. Поэтому $\|T^*\psi_n\| = \|T^* P_e \psi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Положив в следствии теоремы 3 $N_0 = 0$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $N_1 = T$, получим $WT = L + F$, где L — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$L(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}} \overline{T^* \varphi_n^{\perp}(t)},$$

F — ядерный оператор с C_1-ядром

$$F(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^{\perp}(s) \overline{T^* \varphi_n(t)}.$$

Умножив обе части интегрального уравнения 1-го рода $WTx = (L+F)x = Wf$ на функцию $d(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{e_{2n}}(s) + \chi_{e_0}(s)$, где $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \le 1$, $e_0 = X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_{2n}$, получим эквивалентное интегральное уравнение 1-го рода с C_1-ядром

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}} \overline{T^* \varphi_n^{\perp}(t)} + d(s) F(s,t).$$

Замечание 1. Условие (i) выполняется, если в e нет атомов меры μ: в качестве $\{\psi_n\}$ можно выбрать равномерно ограниченную о.н.с. обобщенных функций Радемахера с носителями в $e' \subseteq e$ (определение этих функций см., например, в [7, с. 11–12]). Условие (ii) выполняется, если $P_e T$ — интегральный оператор [7, с. 17]. Заметим еще, что если $P_e T S_2$ — относительно компактное множество в L_2, то, как следует из доказательства теоремы 4, в качестве $\{\psi_n\}$ можно выбрать любую о.н.с. функций с носителями в $e' \subseteq e$. Относительная компактность $P_{e'} T S_2$ в L_2 для некоторого $e' \subseteq e$ будет иметь место, если T — почти компактный оператор.

Определение 9. Пусть функция $a(s)$ принадлежит L_0. Число α называется *ее существенным значением*, если $\mu\{s \in X : |a(s) - \alpha| < \varepsilon\} > 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Отметим, что если X — замыкание открытого множества евклидова пространства, μ — мера Лебега и $a(s)$ — непрерывная функция на X, то любое конечное значение этой функции является ее существенным значением.

Теорема 5. *Пусть $\varepsilon > 0$, функция $a(s)$ принадлежит $L_\infty(X, \mu)$, α — какое-нибудь ее существенное значение, $\{\varepsilon_n\}$ — сходящаяся к 0 последовательность положительных чисел, $\{E_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами такая, что $|a(s) - \alpha| < \varepsilon_n$,*

$n = 1, 2, \dots$, для почти всех $s \in E_n$. Пусть $E_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, мера μ не имеет атомов в E_0, $T \in B(L_2)$ и множества $P_{E_n}TS_2$, $n = 1, 2, \dots$, компактны по мере.

Тогда существует унитарный оператор $W \in B(L_2)$ такой, что уравнение 3-го рода

$$a(s)x(s) - \lambda Tx(s) = f(s) \in L_2 \tag{17}$$

заменой $y = Wx$, $g = Wf$ приводится к эквивалентному интегральному уравнению

$$\alpha y(s) + \int [G(s,t) + R(s,t)]y(t)\,d\mu(t) - \lambda \int [H(s,t) + S(s,t)]y(t)\,d\mu(t) = g(s), \tag{18}$$

где

$$G(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}}\overline{p_n(t)}, \tag{19}$$

$$H(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}}\overline{q_n(t)}, \tag{20}$$

$\{p_n\}$, $\{q_n\}$ — ограниченные в L_2 последовательности, $R(s,t)$, $S(s,t)$ — C_1-ядра, порождающие ядерные операторы R, S с ядерной нормой $< \varepsilon$.

Доказательство. Зафиксируем индекс n. Пусть $\{\varphi_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ — какая-нибудь равномерно ограниченная о.н.с. функций с носителями в E_n.

Как в доказательстве теоремы 4, имеем $\|T^*\varphi_{n,k}\| = \|T^*P_{E_n}\varphi_{n,k}\| \to 0$ при $k \to \infty$. Выберем k_n так, чтобы $\|T^*\varphi_{n,k_n}\| < \varepsilon_n$. Пусть $\psi_n = \varphi_{n,k_n}$. Носители ψ_n содержатся в E_n и E_n, $n = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются, значит, $\{\psi_n\}$ — о.н.с. При этом $\|T^*\psi_n\| < \varepsilon_n$, $\|(A^* - \bar{\alpha}1)\psi_n\| < \varepsilon_n$, где $Ah(s) = a(s)h(s)$, $h \in L_2$. Положим в теореме 3 $N_0 = A$, $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = 0$, $N_1 = T$. Так как $\varepsilon_n \to 0$, выполняется условие (12), поэтому по теореме 3 существует унитарный оператор $W \in B(L_2)$ такой, что

$$WAW^{-1} = \alpha 1 + G + R, \quad WTW^{-1} = H + S,$$

где G, H — карлемановские интегральные операторы с квазивырожденными ядрами (19), (20), R, S — ядерные операторы с C_1-ядрами $R(s,t)$, $S(s,t)$ и ядерной нормой $< \varepsilon$. Следовательно, замена $y = Wx$, $g = Wf$ приводит уравнение (17) к эквивалентному интегральному уравнению (18).

Замечание 1. Множества $P_{E_n}TS_2$ компактны по мере, если $P_{E_n}T$ — интегральные операторы [7, с. 17].

Замечание 2. При $\alpha = 0$ уравнение (18) является интегральным уравнением 1-го рода. Умножив обе его части на функцию $d(s)$ из доказательства теоремы 4, получим эквивалентное интегральное уравнение 1-го рода с C_1-ядром.

Замечание 3. Если в (17) $a(s) = \alpha$ почти всюду, то $A - \alpha 1 = 0$. Тогда $G + R = 0$ и первое интегральное слагаемое в (18) будет отсутствовать.

Проиллюстрируем теоремы 3, 5 и их доказательства на примере интегрального уравнения 3-го рода в $L_2([a,b],\mu)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, μ — мера Лебега:

$$a(s)x(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt = f(s), \tag{21}$$

в котором $(\mu \times \mu)$-измеримое ядро $K(s,t)$ порождает интегральный оператор $T \in B(L_2([a,b]))$, функция $a(s)$ непрерывна и ограничена на $[a,b]$. Пусть α —

произвольное ее значение. Для $\varepsilon > 0$ выберем попарно не пересекающиеся конечные интервалы $\Delta_n = (a_n, b_n)$ так, чтобы $|a(s) - \alpha| < \varepsilon/2^n$ при всех $s \in \Delta_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\|(a(s) - \alpha)\chi_{\Delta_n}(s)h(s)\| < \varepsilon/2^n,$$

если $\|h\| \le 1$. Пусть $\{\varphi_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ — любая из двух равномерно ограниченных о.п.с, являющихся базисами $L_2(\Delta_n)$:

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{|\Delta_n|}}\chi_{\Delta_n}(t)\sin \pi k \frac{t - a_n}{b_n - a_n}\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{|\Delta_n|}}\chi_{\Delta_n}(t) w_k\left(\frac{t - a_n}{b_n - a_n}\right)\right\}_{k=1}^{\infty},$$

где $|\Delta_n| = b_n - a_n$, $\{w_k\}$ — о.н.с. Уолша. Так как T — интегральный оператор, $\|T^*\varphi_{n,k}\| = \|T^*\chi_{\Delta n}\varphi_{n,k}\| \to 0$ при $k \to \infty$. Выберем k_n так, чтобы $\|T^*\varphi_{n,k_n}\| < \varepsilon/2^n$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $\varphi_n = \varphi_{n,k_n}$, $n = 1, 2, \dots$, $N_0 = A$, $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = 0$, $N_1 = T$. Тогда имеют место неравенства (14). Повторяя доказательства теорем 3, 5, получим эквивалентное интегральному уравнению (21) интегральное уравнение вида (18) с ядрами вида (19), (20) и C_1-ядрами $R(s, t)$, $S(s, t)$, порождающими ядерные операторы в $L_2([a, b])$ с ядерными нормами $< \varepsilon$. При этом в качестве $\{\varphi_m^{\perp}\}$ в (15) можно взять приведенное выше ортонормированное семейство $\{\varphi_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, из которого удалена о.н.с. $\{\varphi_n\}$ и к которому добавлена о.н.с. $z_j = \chi_{\Delta} u_j$, $j = 1, 2, \dots$, где $\{u_j\}$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(\Delta)$, $\Delta = (a, b) \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. В качестве $\{e_{2n}\}$ удобно выбрать произвольные попарно не пересекающиеся конечные интервалы $\delta_n = (\alpha_n, \beta_n) \subset (a, b)$. О.н.с. $\{e_m^{\perp}\}$ в (15) можно построить следующим образом. Возьмем ортонормированное семейство $h_{n,k} = \chi_{\delta_n}\eta_{n,k}$, $n, k = 1, 2, \dots$, где $\{\eta_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(\delta_n)$ такой, что $\eta_{n,1} = \chi_{\delta_n}/\sqrt{|\delta_n|}$, $|\delta_n| = \beta_n - \alpha_n$. Тогда $\{e_m^{\perp}\}$ получается из $\{h_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ удалением о.н.с. $\{\eta_{n,1}\}$ и добавлением о.н.с. $\xi_j = \chi_{\delta} v_j$, $j = 1, 2, \dots$, где $\{v_j\}$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(\delta)$, $\delta = (a, b) \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n$. Если δ_n, $n = 1, 2, \dots$, выбраны так, что $\mu\delta = 0$, то необходимость в $\{\xi_j\}$ отпадает.

Определение 10. Оператор $Z \in B(L_2)$ называется *изоморфизмом*, если существует обратный оператор $Z^{-1} \in B(L_2)$.

Теорема 6. *Пусть в уравнении* (18) $\alpha \ne 0$. *Возьмем произвольное* $\lambda_0 \ne 0$. *Тогда для любого* λ, *удовлетворяющего условию* $|\lambda| < |\lambda_0|$, *найдется изоморфизм* $F_\lambda = 1 + \Gamma_\lambda$ *с ядерным оператором* Γ_λ *такой, что замена* $z = F_\lambda y$ *приводит* (18) *к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода*

$$\alpha z(s) + \int L_\lambda(s, t) z(t)\, d\mu(t) = g(s) \tag{22}$$

с квазивырожденным карлемановским ядром

$$L_\lambda(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}}[\overline{c_{n,\lambda}(t)} - \lambda \overline{d_{n,\lambda}(t)}],$$

где $c_{n,\lambda} \in L_2$, $d_{n,\lambda} \in L_2$.

Доказательство. Пользуясь тем, что в уравнении (18) ядра $R(s, t)$, $S(s, t)$ порождают ядерные операторы R, S с ядерной нормой $< \varepsilon$, выберем ε так, что

$\frac{1}{|\alpha|}\|R\|_1 + \frac{|\lambda_0|}{|\alpha|}\|S\|_1 = q < 1$. Положим $D_\lambda = \frac{\lambda}{\alpha}S - \frac{1}{\alpha}R$. Тогда для всех λ таких, что $|\lambda| < |\lambda_0|$, имеем $\|D_\lambda\| \leq \|D_\lambda\|_1 < q < 1$. Следовательно, оператор $F_\lambda = 1 - D_\lambda$ имеет обратный:

$$F_\lambda^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} D_\lambda^n = 1 + \Gamma_\lambda, \tag{23}$$

где ряд в (23) сходится абсолютно по операторной норме и $\Gamma_\lambda = D_\lambda \sum\limits_{n=2}^{\infty} D_\lambda^n$ — ядерный оператор. Запишем (18) в виде

$$\alpha F_\lambda y(s) + \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}} (\overline{p_n(t)} - \lambda\overline{q_n(t)}) y(t)\, d\mu(t) = g(s).$$

Сделав в этом уравнении замену $z = F_\lambda y$, получим эквивалентное интегральное уравнение 2-го рода

$$\alpha z(s) + \int L_\lambda(s,t) z(t)\, d\mu(t) = g(s) \tag{24}$$

с квазивырожденным карлемановским ядром

$$L_\lambda(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}} \overline{[(1+\Gamma_\lambda^*)(p_n(t) - \bar{\lambda} q_n(t))]}. \tag{25}$$

В заключение сделаем следующие замечания.

1. Линейные обратимые замены, приводящие рассмотренные в статье функциональные уравнения 1-го, 2-го и 3-го родов к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го рода с C_1-ядрами или к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами, строятся в явном виде, а получающиеся при этом ядра также имеют явный вид.

2. Интегральное уравнение 1-го рода $\Gamma x = f$ с C_1-ядром может быть решено либо с помощью теоремы Пикара (ее формулировку см., например, в [2, с. 102]), либо приближенными методами, основанными на замене C_1-ядра близкими вырожденными ядрами, либо привлечением интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода $\beta x + \Gamma x = f$ с малым параметром β и последующим предельным переходом при $\beta \to 0$, который оказывается возможным при некоторых предположениях относительно оператора Γ [8, гл. IV, пп. 4.7, 4.8].

3. К линейному интегральному уравнению 2-го рода (24) с квазивырожденным карлемановским ядром (25) применим предложенный в [2, с. 132–139] приближенный метод решения. Он основан на переходе от квазивырожденного ядра к специальным вырожденным ядрам (см. определение 4). При некотором достаточно широком условии этот метод обеспечивает сходимость всюду в X и по норме L_2 решений интегральных уравнений 2-го рода со специальными вырожденными ядрами (приближенных решений) к решению исходного уравнения. При этом в [2, с. 138] имеется оценка по норме L_2 разности между решением исходного уравнения и приближенными решениями и поточечная оценка модуля этой разности.

4. Условия теорем 4, 5 заведомо выполняются, если $T \in B(L_2)$ — интегральный оператор, а мера μ сепарабельна и не имеет атомов, как, например, в случае, когда X — измеримое по Лебегу множество евклидова пространства, μ — мера Лебега.

5. Теорема 5 справедлива и для уравнения (17) без параметра λ ($\lambda = 1$). Теорема 6 также имеет место для уравнения (18) без параметра.

6. В [9, с. 62] предложен метод решения функционального уравнения $Tx = f$ в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве с произвольным линейным непрерывным оператором T.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weis L.* Integral operators and changes of density // Indiana Univ. Math. J. 1982. V. 31, N 1. P. 83–96.

2. *Коротков В. Б.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.

3. *Коротков В. Б., Степанов В. Д.* О некоторых свойствах интегральных операторов свертки // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979. С. 64–68.

4. *Коротков В. Б.* О регулярной и компактной факторизации интегральных операторов в L_p // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 5. С. 601–606.

5. *Schachermayer W., Weis L.* Almost compactness and decomposability of integral operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81, N 4. P. 595–599.

6. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

7. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.

8. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы алгоритмы программы: Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986.

9. *Коротков В. Б.* Введение в алгебраическую теорию интегральных операторов. Владивосток: Колорит, 2000.

Статья поступила 10 января 2013 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090