*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6*

*УДК 512.545*

# О КОНГРУЭНЦИЯХ $m$–ГРУПП

**А. В. Зенков**

**Аннотация.** Указывается способ построения $m$-конгруэнции произвольного $m$-транзитивного представления. Вводятся понятия $m$-2-транзитивного и $m$-примитивного представления. Получено описание $m$-транзитивных примитивных представлений в терминах стабилизаторов. Указаны необходимые и достаточные условия $m$-2-транзитивности и изучены некоторые свойства таких представлений.

**Ключевые слова:** $m$-группа, представление, $m$-блок.

## 1. Введение

Напомним, что *$m$-группой* называется алгебраическая система $G$ сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, {}_{*} \rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ — $\ell$-группа и одноместная операция $_*$ — автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т. е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$$(xy)_* = x_* y_*, \quad (x_*)_* = x, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

В дальнейшем $m$-группу $G$ с фиксированным автоморфизмом $_*$ записываем *как пару* $(G, _*)$. Будем говорить [1], что $m$-группа $(G, \ _*)$ *допускает* (*точное*) *представление* порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества $\Omega$, если $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ и $(g)_* = aga$ для любого $g \in G$, где $a$ — реверсивный автоморфизм 2-го порядка $\Omega$. Этот факт записываем в виде $(G, \Omega, a)$. Отметим [2], что всякая $m$-группа допускает точное представление порядковыми подстановками подходящего линейно упорядоченного множества.

В данной работе указывается способ построения $m$-конгруэнции произвольного $m$-транзитивного представления (теорема 2.2), вводится понятие $m$-примитивного представления и получено описание таких представлений в терминах стабилизаторов точек (теорема 2.4). Исследовано строение $m$-групп, допускающих собственно $m$-транзитивное представление (предложение 2.5). Вводится понятие $m$-2-транзитивного представления и указаны необходимые и достаточные условия $m$-2-транзитивности (теорема 3.5). Изучены некоторые свойства $m$-2-транзитивных представлений. В частности, такие представления $m$-транзитивны и $m$-примитивны (предложения 3.1 и 3.2).

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в [3, 4] соответственно.

## 2. Конгруэнции представлений $m$-групп

Рассмотрим представление $(G, \Omega, a)$. Пусть $L = \{w \in \Omega \mid (w)a > w\}$, $R = \{(\ell)a \mid \ell \in L\}$ и $o$ — неподвижная относительно $a$ точка $\Omega$. Отметим, что существуют представления, как содержащие неподвижную точку, так и

© 2013 Зенков А. В.

не содержащие таковой. Множество $\Omega$ представимо в виде $\Omega = L\overleftarrow{\cup}\{o\}^{\varepsilon}\overleftarrow{\cup}R$, где $\varepsilon = 1$, если неподвижная точка существует, и $\varepsilon = 0$ в противном случае. Представление $(G, \Omega, a)$ назовем *m-транзитивным*, если для всех $w, w' \in \Omega$, быть может, за исключением точки $o$, существует такой $x \in G_* = \mathrm{gr.}(G, a)$, что $(w)x = w'$. Здесь и далее фраза «быть может, за исключением точки $o$» означает, что $o$ исключается из рассмотрения, если она «глобально неподвижна», т. е. ее стабилизатор $\mathrm{St}_G(o)$ равен $G$. Отметим, что $m$-транзитивная группа транзитивна тогда и только тогда, когда найдутся такие $w \neq o \in \Omega$ и $g \in G$, что $(w)g = wa$.

Напомним, что *m-блоком* является непустое выпуклое подмножество $\triangle$ множества $\Omega$ такое, что $(\triangle)x \cap \triangle = \varnothing$ либо $(\triangle)x = \triangle$ для любого $x \in G_*$. Стандартно отношение эквивалентности $\Theta$, определенное на $\Omega$, будем называть *отношением m-эквивалентности*, если оно выпукло и $w\Theta w' \Leftrightarrow (w)x\Theta(w')x$ для любого $x \in G_*$. Ясно, что всякий класс $m$-эквивалентности является $m$-блоком. Обратно, если $\triangle$ — $m$-блок, то отношение $\Theta$, определенное на $\Omega$ по правилу $w = w'$ либо $w, w' \in (\triangle)x$ для подходящего $x \in G_*$, будет отношением $m$-эквивалентности.

Рассмотрим $m$-транзитивное представление $(G, \Omega, a)$, где $\Omega = L\overleftarrow{\cup}\{o\}^{\varepsilon}\overleftarrow{\cup}R$. Пусть $\ell \in L$ и $H$ — выпуклая $\ell$-подгруппа, содержащая $\mathrm{St}_G(\ell)$. Через $\triangle$ обозначим выпуклое замыкание в $\Omega$ орбиты $(\ell)H$. Очевидно, что $\triangle$ устойчиво относительно действия элементов $H$. Имеет место

**Лемма 2.1.** *Пусть $g \in G$ и $(\triangle)g \cap \triangle \neq \varnothing$. Тогда $g \in H$ и, следовательно, $(\triangle)g = \triangle$.*

Доказательство. Утверждение тривиально, если $g \in \mathrm{St}_G((\ell)h)$ для некоторого $h \in H$. Пусть $w \in (\triangle)g \cap \triangle$. Тогда $w = (\delta)g$ для некоторого $\delta \in \triangle$ и $(\ell)h_1 \leq \delta \leq (\ell)h_2$, $(\ell)h_3 \leq w \leq (\ell)h_4$ для подходящих $h_i \in H$, $i = 1, \dots, 4$. Следовательно, $(\ell)h_1 g \leq (\ell)h_4$, $(\ell)h_3 \leq (\ell)h_2 g$. Предположим, что $g > e$. Тогда $(\ell)h_1 < (\ell)h_1 g \leq (\ell)h_4$. Элемент $h = h_1 \vee (h_1 g \wedge h_4)$ принадлежит $H$, и, очевидно, $(\ell)h = (\ell)h_1 g$. Стало быть, $h_1 g h^{-1} \in \mathrm{St}_G(\ell)$, поэтому $g \in H$. Случай $g < e$ аналогичен рассмотренному выше, если использовать $(\ell)h_3 \leq (\ell)h_2 g < (\ell)h_2$. Пусть $g = g^+ g^-$ не сравним с $e$ и, например, $(\ell)g > \ell$. В этом случае $g^- = g \wedge e \in \mathrm{St}_G(\ell)$, поэтому $(\ell)h_1 \leq (\ell)h_1 g^+ \leq (\ell)h_4'$, где $h_4' = h_4(g^-)^{-1}$, $g^+ = g \vee e$. Тогда $g^+ \in H$ и, следовательно, $g \in H$. $\square$

Пусть $\delta \in \triangle$. Тогда $(\ell)h_1 \leq \delta \leq (\ell)h_2$ для подходящих $h_1, h_2 \in H$. В силу $m$-транзитивности найдется $t \in G$ такой, что $\delta = (\ell)a^{\varepsilon}t$, где $\varepsilon = 1$ либо $\varepsilon = 0$. Если $\varepsilon = 0$, то $(\ell)t = (\ell)h$, где $h = h_1 \vee (t \wedge h_2) \in H$. Поэтому $t \in H$ и $\delta \in (\ell)H$. Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда

$$(\ell)h_1 \leq (\ell)at \leq (\ell)h_2. \qquad (*)$$

Покажем, что $\triangle$ — $m$-блок. Возможны два случая: 1) для любого $t \in G$ верно $(\ell)at \notin \triangle$; 2) существует $t \in G$ такой, что $(\ell)at \in \triangle$.

Пусть имеет место случай 1. Из сказанного выше следует, что $\triangle$ равен $(\ell)H$ и, более того, является $m$-блоком.

Рассмотрим случай 2. Можно считать $t_* = t^{-1}$. Тогда $at$ — реверсивный автоморфизм 2-го порядка $\Omega$, поэтому $H = H^{at} \Leftrightarrow H \subseteq H^{at}$. Докажем последнее включение. Пусть $h \in H$. Можно считать, что $h > e$. Возможны ситуации: (a) $(\ell) \leq (\ell)(h^{-1})^{at} \leq (\ell)h$, (b) $(\ell) \leq (\ell)h \leq (\ell)(h^{-1})^{at}$.

В случае (a) имеем $(\ell)(h^{-1})^{at} = (\ell)h'$, где $h' = e \vee (h \wedge (h^{-1})^{at}) \in H$. Следовательно, $h'h^{at} \in \mathrm{St}_G(\ell)$, поэтому $h \in H^{at}$. В случае (b), учитывая $(*)$, получаем

$$(\ell)h_1h^{-1} \leq (\ell)ath^{-1} \leq (\ell)ath^{at} \leq (\ell)h_2h^{at} \leq (\ell)h_2.$$

Тем самым $(\ell)h_2h^{at} = (\ell)\hat{h}$, где $\hat{h} = h_1h^{-1} \vee (h_2h^{at} \wedge h_2) \in H$. Тогда $h_2h^{at}(\hat{h})^{-1} \in \mathrm{St}_G(\ell)$, поэтому $h \in H^{at}$. Таким образом, $H = H^{at}$, и, следовательно, $\triangle$ устойчиво относительно действия $at$. Тогда $(\triangle)ag = (\triangle)att^{-1}g = (\triangle)t^{-1}g$ для всякого $g \in G$. Если $(\triangle)ag \cap \triangle \neq \varnothing$, то с учетом леммы 2.1 $(\triangle)ag = \triangle$. Стало быть, $\triangle$ и в случае 2 является $m$-блоком.

Пусть $m$-блок $\triangle$ определяется, как выше, т. е. $\triangle$ — выпуклое замыкание орбиты $(\ell)H$. Предположим, что существует $t \in G$ такое, что 1) $t_* = t^{-1}$ и $\triangle < (\triangle)at$ либо $\triangle > (\triangle)at$, 2) $H^{at} = H$, 3) $\triangle \overleftarrow{\cup} (\triangle)at$ либо $(\triangle)at \overleftarrow{\cup} \triangle$ выпукло, 4) не существует $g \in G$ такого, что $(\triangle)g = (\triangle)at$. Тогда $\nabla = \triangle \overleftarrow{\cup} (\triangle)at$ (либо $(\triangle)at \overleftarrow{\cup} \triangle$) является $m$-блоком. Очевидно, что $\nabla$ устойчиво относительно действия $at$. Условие 2 гарантирует устойчивость $\nabla$ относительно действия элементов $H$. Если $(\nabla)g \cap \nabla \neq \varnothing$ для некоторого $g \in G$, то в силу условия 4 выполнено $(\triangle)g = \triangle$, поэтому $g \in H$, что означает $(\nabla)g = \nabla$. Так как $(\nabla)ag = ((\nabla)at)t^{-1}g = (\nabla)t^{-1}g$, то $(\nabla)ag \cap \nabla \neq \varnothing$ влечет $(\nabla)ag = \nabla$. Следующий пример иллюстрирует существование $m$-блоков последнего типа.

Пример. Пусть $G$ — группа четных (целых) трансляций естественно линейно упорядоченного множества $\mathbb{Z}$ целых чисел. Таким образом, если $g \in G$, то $(x)g = x + 2n$ для подходящего $n \in \mathbb{Z}$, где $x \in \mathbb{Z}$. Определим $(x)a = -x + 1$. Несложно заметить, что представление $(G, \mathbb{Z}, a)$ $m$-транзитивно. Отметим, что $m$-блоком является всякое одноэлементное множество. Для каждого $i \in \mathbb{Z}$ определим $\triangle_i = \{i, i+1\}$. Тогда $(\triangle_i)ag = \triangle_{-i+2n}$, $(\triangle_i)g = \triangle_{i+2n}$, и это доказывает, что $\triangle_i$ — $m$-блок. Ясно, что не существует $g \in G$ такого, что $(i)g = i + 1$, но $(i)ag' = i + 1$, где $(x)g' = x + 2i$.

Пусть на $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^{\varepsilon} \overleftarrow{\cup} R$ определена $m$-конгруэнция $\Theta$ и $\triangle$ — класс эквивалентности, содержащий точку $\ell \in L$. Тогда $H = \mathrm{St}_G(\triangle)$ — выпуклая $\ell$-подгруппа $G$, содержащая $\mathrm{St}_G(\ell)$. Тем самым доказана

**Теорема 2.2.** *Пусть $(G, \Omega, a)$ — $m$-транзитивное представление, $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^{\varepsilon} \overleftarrow{\cup} R$ и $\ell \in L$. Тогда всякая выпуклая $\ell$-подгруппа $H$, содержащая $\mathrm{St}_G(\ell)$, определяет на $\Omega$ некоторую $m$-конгруэнцию. Обратно, всякая $m$-конгруэнция определяет выпуклую $\ell$-подгруппу, содержащую $\mathrm{St}_G(\ell)$.*

Следующие $m$-эквивалентности назовем *тривиальными*:

(**A**) эквивалентность, когда все классы эквивалентности одноэлементны;

(**B**) эквивалентность, когда все классы эквивалентности двухэлементны;

(**C**) эквивалентность, имеющая три (либо два) класса эквивалентности $L$, $\{o\}$, $R(L, R)$;

(**D**) эквивалентность, имеющая единственный класс эквивалентности $\Omega$.

Представление $(G, \Omega, a)$ *$m$-примитивно*, если оно не допускает нетривиальной $m$-эквивалентности.

**Лемма 2.3.** *Пусть $(G, \Omega, a)$ — $m$-транзитивное представление, $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^{\varepsilon} \overleftarrow{\cup} R$, $\ell \in L$ и $H$ — выпуклая $\ell$-подгруппа, содержащая $\mathrm{St}_G(\ell)$. Тогда $\triangle = L$ либо $\triangle = \Omega$ тогда и только тогда, когда $H = G$.*

Доказательство. Если $\triangle = L$ либо $\triangle = \Omega$, то для любого $g \in G$ верно $(\triangle)g \cap \triangle \neq \varnothing$. Тогда $g \in H$ в силу леммы 2.1. Обратно, пусть $H = G$. Предположим, что $(\ell)g \in L$ для любого $g \in H$. В этом случае $\triangle \subseteq L < R$. Пусть

$\ell' \in L \setminus \triangle$. Тогда $(\ell')g' = (\ell)a$ для некоторого $g' \in H$, что противоречит нашему предположению. Пусть $(\ell)g \in R$ для некоторого $g \in H$. Тогда $(\ell)g = (\ell')a$ для подходящего $\ell' \in L$. Так как $L \subseteq \triangle$, то $(\triangle)a \cap \triangle \neq \varnothing$. Следовательно, $(\triangle)a = \triangle = \Omega$. $\square$

Теперь может быть доказана

**Теорема 2.4.** *Произвольное $m$-транзитивное представление $(G, \Omega, a)$, где $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^{\varepsilon} \overleftarrow{\cup} R$, $m$-примитивно тогда и только тогда, когда для любой точки $w \in \Omega$, быть может, за исключением точки $o$, стабилизатор $\mathrm{St}_G(w)$ есть максимальная выпуклая $\ell$-подгруппа $G$.*

Доказательство. Пусть представление $(G, \Omega, a)$ $m$-примитивно и $w \in L$. Рассмотрим произвольную выпуклую $\ell$-подгруппу $H \supsetneq \mathrm{St}_G(w)$. Через $\triangle$ обозначим $m$-блок — выпуклое замыкание орбиты $(w)H$. Тогда $|\triangle| > 2$, поэтому $\triangle = L$ либо $\triangle = \Omega$, что в силу леммы 2.3 влечет $H = G$.

Обратно, пусть $\mathrm{St}_G(w)$ максимален. Тогда максимален $\mathrm{St}_G((w)at)$ для любого $t \in G$. Если представление не примитивно, то найдется $m$-блок $\triangle$, содержащий $w$, такой, что $|\triangle| > 2$. Но тогда $H = \mathrm{St}_G(\triangle) \supsetneq \mathrm{St}_G(w)$ либо $H \supsetneq \mathrm{St}_G((w)at)$ для подходящего $t \in G$, поэтому $H = G$, что, в свою очередь, влечет $\triangle = L$ либо $\triangle = \Omega$; противоречие. $\square$

Произвольное $m$-транзитивное представление $(G, \Omega, a)$, $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^{\varepsilon} \overleftarrow{\cup} R$, $m$-группы $(G, {}_*)$ будем называть *собственным*, если $(L)g = L$ для любого $g \in G$. По элементу $g \in G$ определим $g_L \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ следующим образом: $(\ell)g_L = (\ell)g$ для $\ell \le o$ и $(r)g_L = r$ для $r \in R$. Пусть $g \ge e$. Тогда $e \le g_L \le g$, поэтому $g_L \in G$. Если $g = g^+g^-$, где $g^+ = g \vee e$, $g^- = g \wedge e$, то $g_L = (g^+)_L(g^-)_L$. По доказанному выше $(g^+)_L, (g^-)_L \in G$ и, следовательно, $g_L \in G$. Непосредственная проверка показывает, что для всех $g, f \in G$ имеют место равенства $(gf)_L = g_L f_L$, $(g \vee f)_L = g_L \vee f_L$, $(g \wedge f)_L = g_L \wedge f_L$ и неравенство $f_L \le h \le g_L$ влечет $h = h_L$. Следовательно, $G_L = \{: g_L :|: g \in G :\}$ — выпуклая $\ell$-подгруппа $G$. Отметим, что $G_L$ можно рассматривать как группу порядковых подстановок линейно упорядоченного множества $L$, действующую на нем транзитивно. Двойственно определяются $g_R$ и $G_R$. Пусть $\ell \le o$ и $g, f \in G$. Тогда $(\ell)(g \vee f) = \max((\ell)g_L, (\ell)f_L)$. С другой стороны, $(\ell)(g_L \vee f_L)(g_R \vee f_R) = (\ell)(g_L \vee f_L) = \max((\ell)g_L, (\ell)f_L)$. Аналогичные рассуждения имеют место и для точек $r \in R$. Тем самым доказано, что $g_L g_R \vee f_L f_R = (g_L \vee f_L)(g_R \vee f_R)$. Поэтому $G_L \times G_R$ является $\ell$-группой относительно координатного порядка. Определим $\mathrm{Exch} : G_L \leftrightarrow G_R$ по правилу $(g_L)\,\mathrm{Exch} = (g_*)_R$, $(g_R)\,\mathrm{Exch} = (g_*)_L$. Пусть $g_L, f_L \in G_L$ и $g_L \neq f_L$. Тогда найдется $\ell \in L$ такой, что $(\ell)g \neq (\ell)f$. Следовательно, $((\ell)a)g_* \neq ((\ell)a)f_*$, что доказывает взаимную однозначность Exch. Далее,

$$(g_L f_L)\,\mathrm{Exch} = ((gf)_L)\,\mathrm{Exch} = ((gf)_*)_R = (g_*)_R (f_*)_R = (g_L)\,\mathrm{Exch}(f_L)\,\mathrm{Exch},$$

$$\begin{aligned}(g_L \vee f_L)\,\mathrm{Exch} = ((g \vee f)_L)\,\mathrm{Exch} &= ((g \vee f)_*)_R \\ &= (g_*)_R \wedge (f_*)_R = (g_L)\,\mathrm{Exch} \wedge (f_L)\,\mathrm{Exch}.\end{aligned}$$

Тем самым $G_R$ изоморфна $G_L^*$, где $G_L^*$ получена из $G_L$ путем обращения порядка. Отображение $\tau : G \to G_L \times G_L^*$, определяемое по правилу $(g)\tau = g_L g_R$, устанавливает изоморфизм $m$-группы $(G, {}_*)$ с $(G_L \times G_L^*, \mathrm{Exch})$.

Обратно, пусть $G_L$ — транзитивная группа порядковых подстановок линейно упорядоченного множества $L$. Через $G_L^*(L^*)$ обозначим $\ell$-группу (линейно упорядоченное множество), полученную из $G_L(L)$ путем обращения порядка. Относительно координатного порядка прямое произведение $G_L \times G_L^*$ является $\ell$-группой. Определим отображение $\mathrm{Exch} : G_L \times G_L^* \to G_L \times G_L^*$ по правилу $(x, y)\,\mathrm{Exch} = (y, x)$, где $(x, y) \in G_L \times G_L^*$. Тогда пара $(G_L \times G_L^*, \mathrm{Exch})$ будет $m$-группой. Рассмотрим линейно упорядоченное множество $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^\varepsilon \overleftarrow{\cup} L^*$. Через $(w)_1$ ($(w)_2$) обозначим элемент $\Omega$, строго меньший (больший) $\{o\}^\varepsilon$, и определим $\mathrm{Exch} : \Omega \to \Omega$ по правилу $(w)_1\,\mathrm{Exch} = (w)_2$, $(w)_2\,\mathrm{Exch} = (w)_1$ и $\{o\}^\varepsilon\,\mathrm{Exch} = \{o\}^\varepsilon$. Ясно, что Exch — реверсивный автоморфизм второго порядка $\Omega$. Пусть $(x, y) \in G_L \times G_L^*$, $(w)_1, (w)_2 \in \Omega$. Определим действие $G_L \times G_L^*$ на $\Omega$ следующим образом: $(w)_1(x, y) = ((w)x)_1$, $(w)_2(x, y) = ((w)y)_2$, $\{o\}^\varepsilon(x, y) = \{o\}^\varepsilon$. Так определенное действие является точным и порядковым. Более того, например, $(w)_1\,\mathrm{Exch}(x, y)\,\mathrm{Exch} = (w)_2(x, y)\,\mathrm{Exch} = ((w)y)_1 = (w)_1(y, x) = (w)_1(x, y)\,\mathrm{Exch}$. Следовательно, можно рассмотреть представление $(G_L \times G_L^*, \Omega, \mathrm{Exch})$, которое собственно $m$-транзитивно. Тем самым доказано

**Предложение 2.5.** *Всякое $m$-транзитивное представление $(G, \Omega, a)$ собственно $m$-транзитивно тогда и только тогда, когда $G$ изоморфна прямому произведению $G_L \times G_L^*$ для подходящей транзитивной $\ell$-группы подстановок $G_L$ подходящего линейно упорядоченного множества $L$ и $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^\varepsilon \overleftarrow{\cup} L^*$.*

**Следствие 2.6.** *Всякая $m$-группа $(G, {}_*)$, допускающая собственно $m$-транзитивное представление $(G_L \times G_L^*, \Omega, a)$, не упорядочена.*

Доказательство. Действительно, элемент $g = g_L(g_*)_R \neq e$ неподвижен относительно действия ${}_*$, поэтому $g \not\parallel e$. $\square$

**Следствие 2.7.** *Собственно $m$-транзитивное представление $(G_L \times G_L^*, \Omega, a)$ собственно $m$-примитивно тогда и только тогда, когда транзитивное представление $(G_L, : L)$ примитивно.*

Доказательство вытекает из теоремы 2.4 и того факта, что $\mathrm{St}_G(\ell) = \mathrm{St}_{G_L}(\ell) G_L^*$ для $\ell \in L$. $\square$

Замечание. Описание транзитивных и примитивных представлений дает классификационная теорема Макклири (см., например, [4, теорема 2]).

**Предложение 2.8.** *Пусть $m$-группа $(G, {}_*)$ допускает $m$-транзитивное и $m$-примитивное представление $(G, \Omega, a)$ такое, что $\mathrm{St}_G(w) = \{e\}$ для некоторого $w \neq o \in \Omega$. Тогда $G$ будет архимедовой линейно упорядоченной группой.*

Доказательство. В силу $m$-транзитивности стабилизаторы всех точек, быть может, за исключением точки $o$, сопряжены (элементами группы $G_*$) и, следовательно, единичны. Предположим, что в группе $G$ найдется $g \not\parallel e$. Тогда для некоторой точки $w \in \Omega$ верно $(w)g < w$. Стало быть, $(w)(g \vee e) = w$, поэтому $g \vee e = g^+ \neq e \in \mathrm{St}_G(w)$; противоречие. Известно [5], что всякая упорядоченная $m$-группа абелева и, более того, принадлежит многообразию $\mathscr{I}$, определяемому тождеством $x_* = x^{-1}$. Тем самым всякая выпуклая $m$-подгруппа будет выпуклой $\ell$-подгруппой. Тогда в силу теоремы 2.4 $\ell$-группа $G$ не имеет собственных выпуклых $\ell$-подгрупп и, следовательно, архимедова. $\square$

## 3. $m$-2-Транзитивные представления

Будем говорить, что представление $(G, \Omega, a)$ *$m$-2-транзитивно*, если для любых $\ell_1 < \ell_2 \leq o < r_3 < r_4 \in \Omega$, быть может, за исключением точки $o$, существует $g \in G$ такой, что

1) $(\ell_1)g = r_3$, $(\ell_2)g = r_4$
либо
2) $(\ell_1)ag = r_4$, $(\ell_2)ag = r_3$.

**Предложение 3.1.** *Если представление $(G, \Omega, a)$ m-2-транзитивно, то оно m-транзитивно.*

Доказательство. Пусть $w, w' \in \Omega$. Можно считать, что $w' \neq (w)a$ и, например, $w < w'$. Возможны следующие случаи: 1) $w < o < w'$, 2) $o < w < w'$, 3) $w < w' < o$. Рассмотрим случай 1. Ясно, что $(w')a \in L$ и $(w')a \neq w$. Пусть, например, $(w')a < w < o < w'$. Найдется $h \in G$ такой, что $(w')a < w < o < w' < (w')h$. Тогда существует $g \in G$ такой, что $(w')hg^{-1} = w$ либо $(w')g^{-1} = (w)a$. Оставшиеся случаи разбираются аналогично. $\square$

**Предложение 3.2.** *Если представление $(G, \Omega, a)$ m-2-транзитивно, то оно m-примитивно.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют (не одноэлементные) классы эквивалентности $\triangle_1 < \triangle_2 < \triangle_3$ такие, что $\triangle_1 \subset L$ и $\triangle_2, \triangle_3$ содержат точки $R$. Пусть $\ell_1 < \ell_2 \in \triangle_1$ и $r_1 \in \triangle_2$, $r_2 \in \triangle_3$, где $r_1, r_2 \in R$. Найдется $g \in G$ такой, что $(\ell_1)g = r_1$, $(\ell_2)g = r_2$ либо $(\ell_1)ag = r_2$, $(\ell_2)ag = r_1$. Оба случая влекут $\triangle_2 = \triangle_3$; противоречие. $\square$

Представление $(G, \Omega, a)$, где $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^{\varepsilon} \overleftarrow{\cup} R$, назовем *m-полутранзитивным*, если для всех $\ell_1 < \ell_2 < \ell \in L$ существует $g \in \mathrm{St}_G(\ell)$ такой, что $(\ell_1)g = \ell_2$.

**Лемма 3.3.** *Если представление $(G, \Omega, a)$ m-транзитивно и m-полутранзитивно, то $G$ действует транзитивно на $L$.*

Доказательство. Пусть $\ell_1 < \ell \in L$. Если существует $\ell' \in L$ такой, что $\ell_1 < \ell < \ell'$, то $(\ell_1)g = \ell$ для некоторого $g \in \mathrm{St}_G(\ell')$. Поэтому можно считать $\ell$ наибольшим элементом $L$. Тогда $(\ell)a$ — наименьший элемент $R$. Если найдется $g \in G$ такой, что $\ell < (\ell)a < (\ell)g$, то, очевидно, $(\ell)g^{-1} < (\ell)ag^{-1} < \ell$. Следовательно, $(\ell)g^{-1}f = (\ell)ag^{-1}$ для некоторого $f \in \mathrm{St}_G(\ell)$, что, как отмечалось выше, влечет транзитивность представления. Пусть $(\ell)g < (\ell)a$ для каждого $g \in G$. Но тогда $\mathrm{St}_G(\ell) = \mathrm{St}_G((\ell)a) = G$, откуда в силу m-транзитивности представления следует тривиальность группы; противоречие. $\square$

**Лемма 3.4.** *Если представление $(G, \Omega, a)$ m-транзитивно и m-полутранзитивно, то $G$ действует 2-транзитивно на $L$.*

Доказательство. Пусть $\ell_1 < \ell_2$, $\ell_3 < \ell_4$ — произвольные пары точек $L$. Рассмотрим следующий случай их взаимного расположения: $\ell_1 < \ell_2 \leq \ell_3 < \ell_4$. Ввиду m-полутранзитивности найдутся $g, h \in \mathrm{St}_G(\ell_4)$ такие, что $(\ell_1)g = \ell_3$, $(\ell_2)h = \ell_3$. В силу леммы 3.3 существует $f \in G$ такой, что $(\ell_3)f = \ell_4$. Тогда $(\ell_1)(g \vee hf) = \max(\ell_3, (\ell_1)hf)$, $(\ell_2)(g \vee hf) = \max(\ell_4, (\ell_2)g)$. Так как $\ell_2 < \ell_4$, то $(\ell_2)g < (\ell_4)g = \ell_4$. Следовательно, $(\ell_2)(g \vee hf) = \ell_4$. Если $\ell_3 \geq (\ell_1)hf$, то $g \vee hf$ — требуемый элемент. Отметим, что неравенство $\ell_1 < \ell_2$ влечет $(\ell_1)hf < (\ell_2)hf = \ell_4$.

Итак, пусть $\ell_3 < (\ell_1)hf < \ell_4$. Существует $t \in \mathrm{St}_G(\ell_4)$ такой, что $(\ell_1)hft = \ell_3$. Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что $g \vee hft$ — искомый элемент.

Оставшиеся случаи сводятся к рассмотренному выше. Например, пусть $\ell_1 < \ell_3 < \ell_2 < \ell_4$. Существует $\ell' < \ell_1$. По лемме 3.3 найдется $f \in G$ такой, что $\ell_1 f < \ell_2 f = \ell' < \ell_3 < \ell_4$. В силу рассмотренного выше случая $(\ell_1)fg = \ell_3$ и $(\ell_2)fg = \ell_4$ для подходящего $g \in G$. $\square$

**Теорема 3.5.** *Представление $(G,\Omega,a)$ $m$-2-транзитивно тогда и только тогда, когда оно $m$-транзитивно и $m$-полутранзитивно.*

Доказательство. Пусть $(G,\Omega,a)$ $m$-2-транзитивно и $\ell_1 < \ell_2 < \ell \in L$. Рассмотрим следующие пары точек: $\ell_1 < \ell$ и $(\ell)a < (\ell_2)a$. Найдется $g \in G$ такой, что $(\ell_1)g = (\ell)a$, $(\ell)g = (\ell_2)a$ либо $(\ell_1)ag = (\ell_2)a$, $(\ell)ag = (\ell)a$. Во втором случае элемент $g_* = aga$ искомый. Пусть имеет место первый случай. Тогда $(\ell_1)gg_* = \ell_2$. Предположим, что $\ell < (\ell)gg_*$. Следовательно, $(\ell)a > (\ell_2)g$, поэтому $(\ell_1)g > (\ell_2)g$, что противоречит условию $\ell_1 < \ell_2$. Таким образом, $\ell \geq (\ell)gg_*$. Теперь $gg_*^+ = gg_* \vee e$ и $(\ell)gg_*^+ = \max((\ell)gg_*,\ell) = \ell$, $(\ell_1)gg_*^+ = \max((\ell_1)gg_*,\ell_1) = \max(\ell_2,\ell_1) = \ell_2$.

Обратное утверждение следует из свойств автоморфизма $a$ и леммы 3.4. □

**Следствие 3.6.** *Если представление $(G,\Omega,a)$ $m$-2-транзитивно, то оно 2-транзитивно либо собственно $m$-примитивно.*

Доказательство. Пусть существуют $\ell \in L$ и $g \in G$ такие, что $(\ell)g \in R$. Тогда по лемме 3.3 найдется $f \in G$ такой, что $(\ell)a = (\ell)gf$, а это влечет транзитивность. Рассмотрим произвольные $w_1 < w_2 < w$ из $\Omega$. В силу транзитивности найдется $t \in G$ такой, что $(w)t = \ell$, поэтому $(w_1)t < (w_2)t < (w)t$. По $m$-полутранзитивности существует $s \in \mathrm{St}_G((w)t)$ такой, что $(w_1)ts = (w_2)t$. Следовательно, $tst^{-1} \in \mathrm{St}_G(w)$, поэтому рассматриваемое транзитивное представление имеет полутранзитивные стабилизаторы точек. По теореме Холланда (см., например, [4, теорема 1]) такие представления 2-транзитивны.

Если $(\ell)g \in L$ для любой $\ell \in L$ и любого $g \in G$, то, очевидно, представление собственное и по предложению 3.2 $m$-примитивное. □

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Giraudet M., Rachunek J.* Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. 1999. V. 49, N 124. P. 743–766.
2. *Giraudet M., Lukas F.* Groupes á motié ordonnés // Fund. Math. 1991. V. 139, N 2. P. 75–89.
3. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
4. *Kopytov V. M., Medvedev N. Ya.* The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994.
5. *Баянова Н. В., Никонова О. В.* Реверсивные автоморфизмы решеточно упорядоченных групп // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 763–768.


*Статья поступила 27 декабря 2012 г.*

Зенков Алексей Владимирович
Алтайский гос. аграрный университет,
пр. Красноармейский, 98, Барнаул 656049
alexey_zenkov@yahoo.com