Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 512.543, 512.547

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОДГРУПП КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА ГРУПП БАУМСЛАГА — СОЛИТЕРА

Ф. А. Дудкин

Аннотация. Описаны все конечномерные неприводимые линейные представления над полем комплексных чисел для произвольной подгруппы конечного индекса группы Баумслага — Солитера $BS(p,q) = \langle a, t \mid t^{-1}a^p t = a^q \rangle$ при взаимно простых p и q. Найдены необходимые и достаточные условия эквивалентности этих представлений. Использованы только стандартные факты линейной алгебры и описание подгрупп конечного индекса групп Баумслага — Солитера.

Ключевые слова: группа Баумслага — Солитера, неприводимое представление, подгруппа конечного индекса.

Введение

Группа называется *хопфовой*, если всякий ее гомоморфизм на себя имеет тривиальное ядро, т. е. является автоморфизмом. Далее будем считать, что p и q — взаимно простые целые числа (пишем $p \perp q$), не равные нулю. Баумслаг и Солитер [1] впервые предложили серию примеров нехопфовых групп с двумя порождающими элементами и одним соотношением:

$$BS(p,q) = \langle a, t \| t^{-1}a^p t = a^q \rangle.$$

Эти группы оказались интересны и с точки зрения геометрических свойств, функций роста, функции Дэна и т. д.

Маклаури [2] использовал алгебраическую геометрию для поиска неприводимых представлений группы $BS(p,q)$. Пусть $\varphi : BS(p,q) \to \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ — произвольное неприводимое представление и $\mathbb{A}$ — замыкание группы $\langle \varphi(a) \rangle$ в топологии Зарисского, а $\mathbb{G}$ — замыкание всего образа $\varphi(BS(p,q))$. Решающее значение в работе Маклаури имеет теорема 3.2 о том, что группа $\mathbb{A}$ является нормальной подгруппой группы $\mathbb{G}$.

В данной работе будут найдены все неприводимые представления произвольной подгруппы конечного индекса группы $BS(p,q)$. При этом будут использованы только стандартные факты линейной алгебры и теории чисел.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–31222, 12–01–90006–Бел_а, 12–01–33102) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.1510).

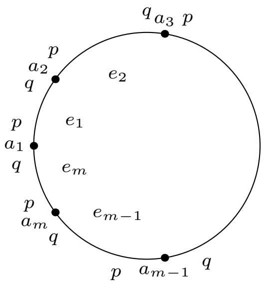

Рис. 1. Граф групп $\mathbb{B}_m$.

Пусть B_m — граф-цикл с вершинами $a_1, a_2, \dots, a_m$ и ребрами $e_1, e_2, \dots, e_m$. Поставим в соответствие вершинам и ребрам графа B_m бесконечные циклические группы $C_1, C_2, \dots, C_m$ и $E_1, E_2, \dots, E_m$ соответственно. Пусть $\alpha_{e_i} : e_i \to a_i^p$ и $\omega_{e_i} : e_i \to a_{i+1}^q$ — вложения реберной группы $E_i = \langle e_i \rangle$ в вершинные группы $C_{i+1} = \langle a_{i+1} \rangle$ и $C_i = \langle a_i \rangle$ вершин a_{i+1} и a_i, инцидентных ребру e_i. Эти вложения обозначены на рис. 1 метками p и q на началах и концах ребер e_i. Таким образом построен граф групп $\mathbb{B}_m$. Обозначим через $H_m = \pi_1(\mathbb{B}_m)$ фундаментальную группу графа групп $\mathbb{B}_m$ (определения и свойства графов групп и их фундаментальных групп см., например, в [3]).

По определению фундаментальной группы графа групп

$$H_m \cong \left\langle a_1, a_2, \dots, a_m, d \mid a_i^p = a_{i+1}^q,\ i = 1, 2, \dots, m-1,\ d^{-1} a_m^p d = a_1^q \right\rangle.$$

Заметим, что группа $BS(p, q)$ изоморфна H_1. В [4] доказано, что всякая подгруппа конечного индекса группы $BS(p, q)$ изоморфна некоторой группе H_m. Определим для некоторых $\mu, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $s \in \mathbb{N}$ следующие $(n \times n)$-матрицы:

$$\mathbf{A_{m-i}} = \begin{pmatrix} \mu^{s^i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu^{s^{i+m}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mu^{s^{i+(n-1)m}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

здесь $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Теорема. *Пусть H — подгруппа конечного индекса группы $BS(p, q)$, изоморфная H_m, и $\varphi : H \to \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ — неприводимое представление. Тогда существуют*

1) *натуральное число $l \perp pq$, которое не делит $q^{km} - p^{km}$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$ и делит $q^{nm} - p^{nm}$,*

2) *натуральное число s такое, что $q \equiv ps \mod l$,*

3) *комплексное число λ, не равное нулю,*

4) *комплексное число μ — примитивный корень из 1 степени l*

такие, что в подходящем базисе $\varphi(a_i) = \mathbf{A_i}$ при $i = 1, 2, \dots, m$ и $\varphi(d) = \mathbf{D}$, как в (1).

Если параметры l, s, λ, μ удовлетворяют условиям 1–4, то гомоморфизм $\varphi : H \to \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$, заданный на порождающих $\varphi(a_i) = \mathbf{A_i}$ при $i = 1, 2, \dots, m$ и $\varphi(d) = \mathbf{D}$, является неприводимым представлением.

Напомним, что два представления $\varphi_1 : H \to \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ и $\varphi_2 : H \to \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ называют *эквивалентными*, если найдется $C \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ такая, что для любого $g \in G$ выполнено равенство $C^{-1}\varphi_1(g)C = \varphi_2(g)$.

Замечание. Пусть φ_1 и φ_2 — неприводимые представления группы H_m, соответствующие параметрам $l_1, s_1, \lambda_1, \mu_1$ и $l_2, s_2, \lambda_2, \mu_2$. Представления φ_1 и φ_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $l_1 = l_2 = l$, $s_1 \equiv s_2 \equiv s \mod l$, $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\mu_2 = \mu_1^{s^{km}}$ для некоторого $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Автор выражает благодарность В. А. Чуркину и Д. Г. Храмцову за плодотворное обсуждение этой работы.

Основная часть

Пусть H — подгруппа конечного индекса группы $BS(p,q)$, изоморфная H_m, и $\varphi : H \to \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ — неприводимое представление группы H. Обозначим $A_i = \varphi(a_i)$ при $i = 1, 2, \dots, m$, $D = \varphi(d)$ и $G = \varphi(H_m)$. Наша цель — доказать, что в подходящем базисе $A_i = \mathbf{A_i}$ при $i = 1, 2, \dots, m$ и $D = \mathbf{D}$. Будем считать, что вектор v из n-мерного векторного пространства над полем комплексных чисел V — это столбец из n комплексных чисел и действие линейных операторов левое (т. е. $A : v \to Av$).

Лемма 1. *Собственные числа всех матриц A_i при $i = 1, 2, \dots, m$ являются корнями из 1 степени $c \perp pq$.*

Доказательство. Из соотношений группы H_m следует, что $D^{-1}A_i^{p^m}D = A_i^{q^m}$ для $i = 1, 2, \dots, m$. Стало быть, $SpA_i^{p^m} = SpA_i^{q^m}$. Пусть $SpA_i = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Тогда $SpA_i^{p^m} = \{\lambda_1^{p^m}, \lambda_2^{p^m}, \dots, \lambda_n^{p^m}\} = \{\lambda_1^{q^m}, \lambda_2^{q^m}, \dots, \lambda_n^{q^m}\} = SpA_i^{q^m}$. Значит, есть такая перестановка $\sigma_i \in \mathbb{S}_n$, что $\lambda_j^{p^m} = \lambda_{\sigma_i(j)}^{q^m}$ при $j = 1, 2, \dots, n$. Если k_i — порядок перестановки σ_i, то $\lambda_j^{p^{k_i m}} = \lambda_j^{q^{k_i m}}$. Следовательно, λ_j — корень из 1 степени $c_i = p^{k_i m} - q^{k_i m} \perp pq$. Положим $c =$НОК$(c_1, c_2, \dots, c_m)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если v — собственный вектор оператора A_i^p (A_i^q), то v — собственный вектор оператора A_i.*

Доказательство. Докажем лемму для A_i^p, для A_i^q — аналогично. Пусть J_i — жорданова форма матрицы A_i, а C — матрица перехода к жорданову базису матрицы A_i. Тогда $J_i = C^{-1}A_iC$. Так как v — собственный вектор A_i^p, то $A_i^p v = \gamma^p v$ для некоторого $\gamma \in SpA_i$. Значит, $v \in \operatorname{Ker}\big(A_i^p - \gamma^p E\big) = \operatorname{Ker} C\big(J_i^p - \gamma^p E\big)C^{-1}$. Это равносильно тому, что $Cv \in \operatorname{Ker}\big(J_i^p - \gamma^p E\big)$. Докажем, что $\operatorname{Ker}\big(J_i^p - \gamma^p E\big) = \operatorname{Ker}(J_i - \gamma E)$. Это будет означать, что $v \in \operatorname{Ker}(A_i - \gamma E)$ и, следовательно, v — собственный вектор A_i.

Матрица J_i — блочно-диагональная матрица с жордановыми клетками вида K_γ по диагонали, следовательно, J_i^p тоже блочно-диагональная матрица с блоками вида K_γ^p по диагонали. Нулевые столбцы в матрице $J_i - \gamma E$ являются первыми столбцами клеток K_γ. У матрицы $J_i^p - \gamma^p E$ эти столбцы тоже будут нулевыми. Покажем, что других нет. Во-первых, если $\gamma \neq \mu$, то в $K_\mu^p - \gamma^p E$ нет нулевых столбцов, так как $\gamma^p \neq \mu^p$. Это следует из того, что γ и μ — различные корни из 1 степени $c \perp pq$. Во-вторых, в $K_\gamma^p - \gamma^p E$ единственный нулевой столбец первый, потому что в остальных есть число $p\gamma^{p-1} \neq 0$ (так как $|\gamma| = 1$).

Кроме того, несложно видеть, что ненулевые столбцы в матрицах $J_i - \gamma E$ и $J_i^p - \gamma^p E$ линейно независимы. Осталось заметить, что $\operatorname{Ker}(J_i - \gamma E)$ порождается векторами жорданова базиса, соответствующими нулевым столбцам. Лемма 2 доказана.

Фиксируем w — собственный вектор оператора A_m с собственным числом μ. По лемме 1 μ — корень из 1. Обозначим через l порядок числа μ, тогда μ — примитивный корень из 1 степени l и $l \perp pq$.

Следствие 3. *Если $w \in V \setminus \{0\}$ и $\mu \in \mathbb{C}$ такие, как описано выше, то $A_{m-i}w = \mu^{s^i}w$, где s — натуральное число такое, что q сравнимо с ps по модулю l. Кроме того, комплексные числа μ^{s^i}, $i = 0, 1, \dots, m-1$, являются примитивными корнями из 1 степени l.*

Доказательство. Если $A_m w = \mu w$, то $A_m^{q^i} w = \mu^{q^i} w$. Тогда, используя соотношения H_m, получаем $A_{m-i}^{p^i} w = \mu^{q^i} w$. Отсюда по лемме 2 $A_{m-i} v = \mu^{s^i} v$. Предположим что для некоторого i число μ^{s^i} не является примитивным корнем из 1 степени l, тогда $(s^i, l) \neq 1$. Однако из определения s видно, что в кольце вычетов по модулю l число s является обратимым элементом, следовательно, $s \perp l$; противоречие. Следствие 3 доказано.

Лемма 4. *Если $A_i v = \lambda v$, λ — примитивный корень из 1 степени l и $v \neq 0$, то $A_i D v = \lambda^{s^m} D v$ и $Dv \neq 0$.*

Доказательство. Равенство $A_i v = \lambda v$ влечет $A_i^{q^m} v = \lambda^{q^m} v$. Умножив на D слева и применив соотношения H_m, получим $\lambda^{q^m} Dv = D A_i^{q^m} v = A_i^{p^m} Dv$. Используя лемму 2, делаем вывод: $A_i D v = \lambda^{s^m} D v$. Наконец, так как определитель D не равен нулю, получаем требуемое. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Векторное пространство V имеет базис $v_1, v_2, \dots, v_n$ собственных векторов матрицы A_m, на котором D действует так: $Dv_i = v_{i+1}$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$ и $Dv_n = \lambda v_1$ для некоторого комплексного числа $\lambda \neq 0$. Числа $\mu^{s^{im}}$ и $\mu^{s^{jm}}$ различны при $0 \leqslant i \neq j \leqslant n-1$ и $\mu = \mu^{s^{nm}}$.*

Доказательство. Пусть $w \in V \setminus \{0\}$ и $\mu \in \mathbb{C}$ такие, как описано выше. Построим подпространство W векторного пространства V с помощью следующей процедуры. Положим $W_1 = \langle w \rangle$. Если $Dw \notin W_1$, то $W_2 = \langle w, Dw \rangle$. Если построено W_i и $D^i w \notin W_i$, то $W_{i+1} = \langle w, Dw, \dots, D^i w \rangle$. Если $D^i w \in W_i$, то $W = W_i$, и процедура заканчивается.

Ввиду того, что $\dim V = n < \infty$, построим W не более чем за n шагов. Из способа построения W, леммы 4 и следствия 3 следует, что W инвариантно относительно G. Ввиду того, что W содержит ненулевой вектор и φ неприводимо, получаем $W = V$.

По лемме 4 вектор $D^n w$ собственный для A_m с собственным числом $\mu^{s^{mn}}$. Так как $D^n w \in W_n$, то $D^n w = \alpha_0 w + \alpha_1 Dw + \dots + \alpha_{n-1} D^{n-1} w$. Это возможно только в том случае, когда среди векторов $w, Dw, \dots, D^{n-1} w$ есть такие, у которых собственные числа равны $\mu^{s^{mn}}$. Пусть r — минимальное число такое, что $\mu^{s^{mn}} = \mu^{s^{mr}}$. Тогда $D^n w = \alpha_r D^r w + \alpha_{r+1} D^{r+1} w + \dots + \alpha_{n-1} D^{n-1} w$ и все векторы $D^i w$ при $r \leqslant i \leqslant n-1$, входящие в разложение вектора $D^n w$ с коэффициентами, не равными нулю, являются собственными векторами оператора A_m с собственными числами $\mu^{s^{rm}}$.

Если $r \neq 0$, то подпространство $\langle D^r w, D^{r+1} w, \dots, D^{n-1} w \rangle$ инвариантно относительно G (ввиду разложения вектора $D^n w$, представленного выше), следовательно, $r = 0$.

Если $D^n w \in \langle w \rangle$, то получаем требуемое, иначе $D^n w = \alpha_0 w + \alpha_1 Dw + \dots + \alpha_{n-1} D^{n-1} w$ и все векторы $D^i w$, входящие в разложение с коэффициентами, не равными нулю, являются собственными для A_m с собственным числом μ. Пусть k — минимальное целое положительное число такое, что $A_m D^k w = \mu \cdot D^k w$. Ввиду действия D на базисе $w, Dw, \dots, D^{n-1} w$ и леммы 4 несложно видеть, что $n = k \cdot t$ и в этом базисе матрица A_m диагональная с числами

$$\underbrace{\mu, \mu^{s^m}, \dots, \mu^{s^{(k-1)m}}}_{k}, \underbrace{\mu, \mu^{s^m}, \dots, \mu^{s^{(k-1)m}}}_{k}, \dots, \underbrace{\mu, \mu^{s^m}, \dots, \mu^{s^{(k-1)m}}}_{k} \tag{2}$$

по диагонали.

Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}$ — координаты вектора в базисе $w, Dw, \dots, D^{n-1}w$. Используя (2), следствие 3 и знание о действии D на базисе, нетрудно убедиться, что подпространство, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 = x_{k+1} = \dots = x_{(t-1)k+1}, \\ x_2 = x_{k+2} = \dots = x_{(t-1)k+2}, \\ \dots \\ x_k = x_{2k} = \dots = x_{tk}, \end{cases}$$

инвариантно относительно G и является собственным; противоречие. Значит, $D^n w \in \langle w \rangle$ и $\mu^{s^{nm}} = \mu$.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть $\mu^{s^{im}} = \mu^{s^{jm}}$. Это эквивалентно тому, что $s^{im} \equiv s^{jm} \mod l$. Получаем $s^{(i-j)m} \equiv 1 \mod l$. Значит, можно считать, что $\mu = \mu^{s^{rm}}$ для некоторого целого r, $0 < r < n$. Используя первую часть доказательства этой леммы, получим противоречие. Лемма 5 доказана.

Следствие 6. *Матрицы A_i при $i = 1, 2, \dots, m$ имеют порядок l. В базисе собственных векторов матрицы A_m матрицы A_i и D имеют вид* (1).

Доказательство вытекает из следствия 3, лемм 4 и 5.

Лемма 7. *Представление H_m матрицами* (1) *неприводимо тогда и только тогда, когда l не делит $q^{km} - p^{km}$ для всех $k = 1, 2, \dots, n-1$.*

Доказательство. Если представление неприводимо, то по лемме 5 имеем $\mu \neq \mu^{s^{im}}$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$. Это эквивалентно тому, что $1 \not\equiv s^{im} \mod l$, следовательно, $p^{im} \not\equiv q^{im} \mod l$.

В обратную сторону. Если $U \subset V$ — собственное инвариантное подпространство относительно G, то для сужений $A_i|_U$ и $D|_U$ верны все доказанные утверждения. В частности, если $k = \dim(U)$, то на U есть базис $u, Du, \dots, D^{k-1}u$ для некоторого u — собственного вектора A_m с собственным числом $\mu^{s^{im}}$. Тогда $\mu^{s^{im+km}} = \mu^{s^{im}}$, значит, $s^{im} \equiv s^{im+km} \mod l$. В итоге получается $p^{km} \equiv q^{km} \mod l$ для некоторого целого $k, 0 < k < n$; противоречие. Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы. Если $\varphi : H \to \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ — неприводимое представление, то существование нужных констант и базиса вытекает из следствий 3, 6 и лемм 5, 7. Если же l, s, λ, μ удовлетворяют условиям 1–4, то гомоморфизм $\varphi : H \to \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$, заданный на порождающих $\varphi(a_i) = \mathbf{A_i}$ при $i = 1, 2, \dots, m$ и $\varphi(d) = \mathbf{D}$, является неприводимым представлением ввиду леммы 7 и проверки соотношений группы H_m на матрицах $\mathbf{A_i}$ и $\mathbf{D}$. Теорема доказана.

Обозначим через $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ диагональную матрицу.

Ввиду доказанной теоремы при фиксированных n, p, q и m каждое неприводимое представление соответствует набору параметров l, s, λ, μ.

Замечание. Пусть φ_1 и φ_2 — неприводимые представления группы H_m, соответствующие параметрам $l_1, s_1, \lambda_1, \mu_1$ и $l_2, s_2, \lambda_2, \mu_2$. Представления φ_1 и φ_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $l_1 = l_2 = l$, $s_1 \equiv s_2 \equiv s \mod l$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\mu_2 = \mu_1^{s^{km}}$ для некоторого $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Доказательство. Пусть φ_1 эквивалентно φ_2. Обозначим $\varphi_1(d) = D_1$, $\varphi_2(d) = D_2$, $\varphi_1(a_i) = A_i$ и $\varphi_2(a_i) = B_i$ при $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда существует невырожденная матрица C такая, что

$$C^{-1} D_1 C = D_2, \quad C^{-1} A_i C = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{3}$$

Так как A_i и B_i сопряжены, их порядки равны. Из следствия 6 получается, что $l_1 = l_2 = l$ и, стало быть, $s_1 \equiv s_2 \equiv s \mod l$.

Из равенств (3) следует, что жордановы формы матриц A_m и B_m совпадают, но эти матрицы уже диагональны, значит, существует подстановка σ на множестве $\{0, 1, \dots, n-1\}$ такая, что

$$\begin{aligned} C^{-1} A_m C = \operatorname{diag}\left\{\mu_1^{s^{(0\sigma)\cdot m}}, \mu_1^{s^{(1\sigma)\cdot m}}, \dots, \mu_1^{s^{((n-1)\sigma)\cdot m}}\right\} \\ = \operatorname{diag}\left\{\mu_2, \mu_2^{s^m}, \dots, \mu_2^{s^{(n-1)m}}\right\} = B_m. \quad (4) \end{aligned}$$

Получаем $\mu_2 = \mu_1^{s^{(0\sigma)\cdot m}}$ или $\mu_2 = \mu_1^{s^{km}}$ при $k = 0\sigma$. Наконец, из (3) выводим, что $\det(D_1) = \det(D_2)$ и, следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Получили требуемое.

Пусть $l_1 = l_2 = l$, $s_1 \equiv s_2 \equiv s \mod l$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\mu_2 = \mu_1^{s^{km}}$ для некоторого $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Найдем невырожденную матрицу C, удовлетворяющую (3). Из равенства $\mu_2 = \mu_1^{s^{km}}$ вытекает, что

$$\mu_2^{s^{i+j\cdot m}} = \left(\mu_1^{s^{k\cdot m}}\right)^{s^{i+j\cdot m}} = \mu_1^{s^{i+(j+k)m}}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1,\ 0 \leqslant i \leqslant m-1. \quad (5)$$

Тем самым равенства $C^{-1} A_{m-i} C = B_{m-i}, 0 \leqslant i \leqslant m-1$, равносильны тому, что

$$\begin{aligned} & C^{-1} \operatorname{diag}\left\{\mu_1^{s^i}, \mu_1^{s^{i+m}}, \dots, \mu_1^{s^{i+(n-1)m}}\right\} C \\ & = \operatorname{diag}\Big\{\underbrace{\mu_1^{s^{i+km}}, \mu_1^{s^{i+(k+1)m}}, \dots, \mu_1^{s^{i+(n-1)m}}}_{n-k}, \underbrace{\mu_1^{s^i}, \mu_1^{s^{i+m}}, \dots, \mu_1^{s^{i+(k-1)m}}}_{k}\Big\}, \\ & \qquad 0 \leqslant i \leqslant m-1. \end{aligned}$$

Это значит, что на диагональных матрицах сопряжение матрицей C индуцирует циклический сдвиг на k элементов.

Обозначим через T матрицу, которая получается из матрицы $\mathbf{D}$ (см. (1)) при $\lambda = 1$. Можно убедиться, что сопряжение диагональной матрицы с помощью T дает циклический сдвиг диагонали на 1 элемент. Учитывая равенства (5), несложно проверить, что для любых ненулевых комплексных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ выполнено равенство

$$(\operatorname{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) T^k)^{-1} \cdot A_i \cdot \operatorname{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) T^k = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

По условию $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Можно проверить, что матрица

$$C = \operatorname{diag}\{\underbrace{\lambda, \lambda, \dots, \lambda}_{k}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-k}\} T^k$$

удовлетворяет равенству $C^{-1} D_1 C = D_2$. Это можно сделать прямыми вычислениями, помня, что $D_1 = \operatorname{diag}(\lambda, 1, 1, \dots, 1) T$, $D_2 = \operatorname{diag}(\lambda, 1, 1, \dots, 1) T$, и используя равенство $T^{-1} \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) T = \operatorname{diag}(a_2, a_3, \dots, a_n, a_1)$. Замечание доказано.

Пример. Из замечания следует, что при данных p, q, m, n неприводимое представление с точностью до эквивалентности довольно жестко задается числами l и λ. Приведем пример неэквивалентных представлений, у которых l и λ совпадают.

Пусть $p = 2, q = 3, m = 2, n = 3, \lambda = 1$. Из теоремы следует, что l должно не делить $q^{1\cdot m} - p^{1\cdot m} = 5$ и $q^{2\cdot m} - p^{2\cdot m} = 13 \cdot 5$ и делить $q^{3\cdot m} - p^{3\cdot m} = 19 \cdot 7 \cdot 5$. Можно взять $l = 7 \perp 2 \cdot 3 = 6$. Тогда s найдем из сравнения $3 \equiv 2 \cdot s \mod 7$, получим $s = 5$. Положим $\mu_1 = e^{2\pi\cdot\frac{2}{7}\cdot i}$ — примитивный корень из 1 степени 7. Этот набор параметров определяет неприводимое представление.

По замечанию представлениям, эквивалентным данному, будут соответствовать еще 2 примитивных корня $\mu_2 = \mu_1^{s^{1\cdot m}} = \mu_1^{5^2} = \mu_1^{25} = \mu_1^4 = e^{2\pi\cdot\frac{1}{7}\cdot i}$ и $\mu_3 = \mu_1^{s^{2\cdot m}} = \mu_1^{5^4} = \mu_1^{625} = \mu_1^2 = e^{2\pi\cdot\frac{4}{7}\cdot i}$. Однако числа $e^{2\pi\cdot\frac{3}{7}\cdot i}$, $e^{2\pi\cdot\frac{5}{7}\cdot i}$ и $e^{2\pi\cdot\frac{6}{7}\cdot i}$ тоже являются примитивными корнями из 1 степени 7, им соответствуют другие, не эквивалентные данному представления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68, N 3. P. 199–201.

2. *McLaury D.* Irreducible representations of Baumslag–Solitar groups // J. Group Theory. 2012. V. 15, N 4. P. 543–552.

3. *Serre J. P.* Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1980.

4. *Дудкин Ф. А.* Подгруппы конечного индекса в группах Баумслага — Солитера // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 331–345.

Статья поступила 13 июня 2012 г., окончательный вариант — 16 ноября 2012 г.

Дудкин Федор Анатольевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`dudkinf@ngs.ru`