*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6*

*УДК 517.51.475*

# СРЕДНИЕ ЧЕЗАРО ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА ДВОЙНОГО РЯДА ФУРЬЕ И ОБОБЩЕННАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ВАРИАЦИЯ

**У. Гогинава**

**Аннотация.** Исследована сходимость средних Чезаро отрицательного порядка двойного тригонометрического ряда Фурье функций ограниченной обобщенной $\Lambda$-вариации.

**Ключевые слова:** ряд Фурье, обобщенная ограниченная $\Lambda$-вариация, средние Чезаро.

## 1. Классы функций ограниченной обобщенной вариации

В 1881 г. Жордан [1] ввел класс функций ограниченной вариации и применил их к теории рядов Фурье. В дальнейшем это понятие было обобщено многими авторами (квадратичная вариация, $\Phi$-вариация, $\Lambda$-вариация и др., см. [2–16]). В двумерном случае класс $BV$ функций ограниченной вариации ввел Харди [10].

Пусть $f$ — вещественная измеримая функция двух переменных периода $2\pi$ относительно обеих переменных. Для интервалов $I = (a, b)$, $J = (c, d)$ и точек $x, y$ из $\mathbb{T} := [-\pi, \pi)$ обозначим

$$f(I, y) := f(b, y) - f(a, y), \quad f(x, J) := f(x, d) - f(x, c),$$

а для прямоугольника $A = (a, b) \times (c, d)$ положим

$$f(A) = f(I, J) := f(a, c) - f(a, d) - f(b, c) + f(b, d).$$

Пусть $E = \{I_i\}$ — набор непересекающихся интервалов из $\mathbb{T}$, упорядоченных произвольным образом, и пусть $\Omega$ — множество всех таких наборов $E$. Обозначим через $\Omega_n$ множество всех наборов из $n$ непересекающихся интервалов $I_k \subset \mathbb{T}$.

Введем обозначения:

$$\Lambda^1 V_1(f) = \sup_{y \in \mathbb{T}} \sup_{\{I_i\} \in \Omega} \sum_i \frac{|f(I_i, y)|}{\lambda_i^1}, \quad \Lambda^2 V_2(f) = \sup_{x \in \mathbb{T}} \sup_{\{J_j\} \in \Omega} \sum_j \frac{|f(x, J_j)|}{\lambda_j^2},$$

$$(\Lambda^1, \Lambda^2) V_{1,2}(f) = \sup_{\{I_i\}, \{J_j\} \in \Omega} \sum_i \sum_j \frac{|f(I_i, J_j)|}{\lambda_i^1 \lambda_j^2},$$

Исследование выполнено при поддержке Национального научного фонда им. Шота Руставели (грант № 13/06: геометрия функциональных пространств, интерполяция и теоремы вложения).

где $\Lambda^i = \{\lambda_n^i\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, — последовательность положительных чисел.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f$ *имеет ограниченную $\Lambda$-вариацию* на $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi)^2$, и писать $f \in \{\Lambda^1, \Lambda^2\}BV$, если

$$\{\Lambda^1, \Lambda^2\}V(f) := \Lambda^1 V_1(f) + \Lambda^2 V_2(f) + (\Lambda^1, \Lambda^2)V_{1,2}(f) < \infty.$$

Будем говорить, что функция $f$ *имеет ограниченную частичную $\Lambda$-вариацию*, и писать $f \in P\Lambda BV$, если

$$P\Lambda V(f) := \Lambda V_1(f) + \Lambda V_2(f) < \infty, \quad \Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

В случае, когда $\Lambda^1 = \Lambda^2$, пишем $\Lambda BV$ вместо $\{\Lambda^1, \Lambda^2\}BV$.

Если $\lambda_n \equiv 1$ (или если $0 < c < \lambda_n < C < \infty$, $n = 1, 2, \dots$), то классы $\Lambda BV$ и $P\Lambda BV$ совпадают с классами Харди $BV$ и $PBV$ соответственно. Естественно считать, что $\lambda_n \to \infty$, и в силу того, что интервалы в $E = \{I_i\}$ упорядочены произвольным образом, без потери общности будем предполагать, что последовательность $\{\lambda_n\}$ убывает. Тем самым далее

$$1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lim_{n\to\infty,} \lambda_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty. \tag{1}$$

В случае, когда $\lambda_n = n$, $n = 1, 2, \dots$, будем говорить *гармоническая вариация* вместо $\Lambda$-вариация и писать $H$ вместо $\Lambda$ ($HBV$, $PHBV$, $HV(f)$ и т. д.).

Понятие $\Lambda$-вариации введено Ватерманом [13] в одномерном случае и А. А. Саакяном [14] — в двумерном. Понятие ограниченной частичной вариации (класс $PBV$) введено автором в [9]. Эти классы функций обобщенной ограниченной вариации играют важную роль в теории рядов Фурье.

М. И. Дьяченко и Ватерман [5] ввели еще один класс функций обобщенной ограниченной вариации. Обозначая через $\Gamma$ множество конечных наборов непересекающихся прямоугольников $A_k := [\alpha_k, \beta_k] \times [\gamma_k, \delta_k] \subset \mathbb{T}^2$, полагаем

$$\Lambda^* V(f) := \sup_{\{A_k\}\in\Gamma} \sum_k \frac{|f(A_k)|}{\lambda_k}.$$

Определение 2 [5]. Пусть $f$ — вещественная функция на $\mathbb{T}^2$. Будем говорить, что $f$ *принадлежит* $\Lambda^* BV$, если

$$\Lambda V(f) := \Lambda V_1(f) + \Lambda V_2(f) + \Lambda^* V(f) < \infty.$$

В [6] автором совместно с А. А. Саакяном введены новые классы функций обобщенной ограниченной вариации и исследована сходимость ряда Фурье функций этих классов.

Обозначим

$$\Lambda^{\#} V_1(f) = \sup_{\{y_i\}\subset\mathbb{T}} \sup_{\{I_i\}\in\Omega} \sum_i \frac{|f(I_i, y_i)|}{\lambda_i}, \quad \Lambda^{\#} V_2(f) = \sup_{\{x_j\}\subset\mathbb{T}} \sup_{\{J_j\}\in\Omega} \sum_j \frac{|f(x_j, J_j|}{\lambda_j},$$

где $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность.

Определение 3 [6]. Будем говорить, что функция $f$ *принадлежит классу* $\Lambda^{\#} BV$, если

$$\Lambda^{\#} V(f) := \Lambda^{\#} V_1(f) + \Lambda^{\#} V_2(f) < \infty.$$

Для функции $f$ через $f(x \pm 0, y \pm 0)$ обозначим границы открытого координатного квадранта (если существуют) в точке $(x, y)$, а через $f^*(x, y) := \frac{1}{4} \sum f(x \pm 0, y \pm 0)$ — средние арифметические

$$\frac{1}{4}\{f(x + 0, y + 0) + f(x + 0, y - 0) + f(x - 0, y + 0) + f(x - 0, y - 0)\}. \tag{2}$$

Следующая теорема доказана в [6].

**Теорема 1** [6]. *Если $f \in \Lambda^{\#}BV$, то границы квадранта $f(x \pm 0, y \pm 0)$ существуют для любой точки $(x,y) \in \mathbb{T}^2$.*

Определение 4. Будем говорить, что функция $f$ *непрерывна в* $(\Lambda^1, \Lambda^2)$-*вариации на* $\mathbb{T}^2$, и писать $f \in C(\Lambda^1, \Lambda^2)V$, если

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n^1 V_1(f) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n^2 V_2(f) = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \left(\Lambda_n^1, \Lambda^2\right) V_{1,2}(f) = \lim_{n\to\infty} \left(\Lambda^1, \Lambda_n^2\right) V_{1,2}(f) = 0,$$

где $\Lambda_n^i := \left\{\lambda_k^i\right\}_{k=n}^{\infty} = \left\{\lambda_{k+n}^i\right\}_{k=0}^{\infty}$, $i = 1, 2$.

Определение 5. Будем говорить, что функция $f$ *непрерывна в* $\Lambda^{\#}$-*вариации на* $\mathbb{T}^2$, и писать $f \in C\Lambda^{\#}V$, если

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n^{\#} V_1(f) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n^{\#} V_2(f) = 0,$$

где $\Lambda_n := \{\lambda_k\}_{k=n}^{\infty}$.

Определение 6. Будем говорить, что функция $f$ *непрерывна в* $\Lambda^*$-*вариации на* $\mathbb{T}^2$, и писать $f \in C\Lambda^* V$, если

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n^1 V_1(f) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n^2 V_2(f) = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n^* V(f) = 0.$$

**Теорема 2.** *Пусть $\alpha, \beta \in (0,1)$ и $\alpha + \beta < 1$. Тогда*

$$C\{i^{1-(\alpha+\beta)}\}^{\#} V \subset C\{i^{1-\alpha}\}\{j^{1-\beta}\} V.$$

Доказательство теоремы 2. Можем записать

$$\begin{aligned}
\sum_{i\ge n}\sum_{j\ge 1} \frac{|f(I_i, J_j)|}{i^{1-\alpha} j^{1-\beta}} &= \sum_{i\ge n}\sum_{j<n} \frac{|f(I_i, J_j)|}{i^{1-\alpha} j^{1-\beta}} + \sum_{i\ge n}\sum_{j\ge n} \frac{|f(I_i, J_j)|}{i^{1-\alpha} j^{1-\beta}} \\
&\le 2\sum_{i\ge n}\sum_{j\le i} \frac{|f(I_i, J_j)|}{i^{1-\alpha} j^{1-\beta}} + \sum_{i\ge n}\sum_{j>i} \frac{|f(I_i, J_j)|}{i^{1-\alpha} j^{1-\beta}} \\
&\le 2\sum_{i\ge n}\sum_{j\le i} \frac{|f(I_i, J_j)|}{i^{1-\alpha} j^{1-\beta}} + \sum_{j\ge n}\sum_{i\le j} \frac{|f(I_i, J_j)|}{i^{1-\alpha} j^{1-\beta}} := A + B. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Пусть $J_j := (\gamma_j, \delta_j)$. Тогда

$$A \le 2\sum_{i\ge n} \frac{1}{i^{1-\alpha}} \sum_{j\le i} \frac{|f(I_i, \gamma_j)| + |f(I_i, \delta_j)|}{j^{1-\beta}}.$$

Положим

$$|f(I_i, \bar\gamma_i)| := \max_{1\le j\le i} |f(I_i, \gamma_j)|, \quad |f(I_i, \bar\delta_i)| := \max_{1\le j\le i} |f(I_i, \delta_j)|.$$

В силу условий теоремы имеем

$$A \le c(\beta) \sum_{i\ge n} \frac{|f(I_i, \bar\gamma_i)| + |f(I_i, \bar\delta_i)|}{i^{1-(\alpha+\beta)}} \to 0 \quad \text{при } n\to\infty. \qquad (4)$$

Аналогично можно доказать, что

$$B \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{5}$$

Объединяя (3)–(5), завершаем доказательство теоремы 2. $\square$

Определим

$$v_1^{\#}(n,f) := \sup_{\{y_i\}_{i=1}^n} \sup_{\{I_i\}\in\Omega_n} \sum_{i=1}^{n} |f(I_i,y_i)|, \quad n = 1,2,\dots,$$

$$v_2^{\#}(m,f) := \sup_{\{x_j\}_{j=1}^m} \sup_{\{J_k\}\in\Omega_m} \sum_{j=1}^{m} |f(x_j,J_j)|, \quad m = 1,2,\dots.$$

**Теорема 3.** *Пусть* $\alpha+\beta<1$, $\alpha,\beta>0$ *и*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_s^{\#}(f;2^j)}{2^{j(1-(\alpha+\beta))}} < \infty, \quad s = 1,2.$$

*Тогда* $f \in C\{n^{1-(\alpha+\beta)}\}^{\#}V$.

Доказательство теоремы 3. Выберем последовательность $\{A_{2^j} : j \ge 1\}$ так, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{2^j} v_2^{\#}(f;2^j)}{2^{j(1-(\alpha+\beta))}} < \infty, \quad A_{2^j} \uparrow \infty.$$

Положим

$$A_n := A_{2^j}, \quad 2^j \le n < 2^{j+1},\ j = 0,1,2,\dots,$$

$$\gamma_n := \frac{n^{1-(\alpha+\beta)}}{A_n}.$$

Можем записать

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f(x_j,J_j)|}{\gamma_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j|f(x_j,J_j)|}{j^{(1-(\alpha+\beta))}} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=2^r}^{2^{r+1}-1} \frac{A_j|f(x_j,J_j)|}{j^{(1-(\alpha+\beta))}}$$
$$\le \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_{2^r} v_2^{\#}(f;2^r)}{2^{r(1-(\alpha+\beta))}} < \infty.$$

С другой стороны,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f(x_j,J_j)|}{(j+n)^{1-(\alpha+\beta)}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f(x_j,J_j)|}{A_{j+n}\gamma_{j+n}} \le \frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f(x_j,J_j)|}{\gamma_{j+n}}$$
$$= O\left(\frac{1}{A_n}\right) = o(1) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{6}$$

Аналогично можно доказать, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|f(I_i,y_i)|}{(i+n)^{1-(\alpha+\beta)}} = o(1) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{7}$$

Объединяя (6) и (7), завершаем доказательство теоремы 3. $\square$

## 2. $(C;\alpha,\beta)$-суммируемость двойного ряда Фурье $(-1 < \alpha,\beta < 0)$

Пусть $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$. *Рядом Фурье* функции $f$ относительно тригонометрической системы называется ряд

$$S[f,(x,y)] := \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m,n)e^{imx}e^{iny},$$

где

$$\hat{f}(m,n) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\mathbb{T}^2} f(x,y)e^{-imx}e^{-iny}\,dxdy$$

— коэффициенты Фурье функции $f$. *Прямоугольные частичные суммы* определяются так:

$$S_{M,N}f(x,y) := \sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(m,n)e^{imx}e^{iny},$$

*Средние Чезаро* $(C;\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta > -1$, двойного ряда Фурье определяются следующим образом:

$$\sigma_{n,m}^{(\alpha,\beta)}f(x,y) := \frac{1}{A_n^\alpha}\frac{1}{A_m^\beta}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{n-i}^{\alpha-1}A_{m-j}^{\beta-1}S_{i,j}f(x,y),$$

где

$$A_0^\alpha = 1, \quad A_k^\alpha = \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+k)}{k!}, \quad k = 1,2,\dots.$$

Известно (см. [17, с. 157]), что

$$\sigma_{mn}^{(\alpha,\beta)}f(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\mathbb{T}^2} f(x+t,y+s)K_m^\alpha(s)K_n^\beta(t)\,dsdt, \tag{8}$$

где ядро $K_n^\alpha$, $-1 < \alpha < 0$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\left|K_n^{-\alpha}(u)\right| \le 2n, \quad u \in \mathbb{T}, \tag{9}$$

$$K_n^\alpha(u) = \varphi_n^\alpha(u) + O(1/nu^2), \quad 0 < |u| \le \pi, \tag{10}$$

$$\varphi_n^\alpha(u) = \frac{\sin[(n+1/2+\alpha/2)u - \alpha\pi/2]}{A_n^\alpha[2\sin u/2]^{1+\alpha}}. \tag{11}$$

Для коэффициентов $A_n^\alpha$ имеются следующие ограничения:

$$c_1(\alpha)n^\alpha \le A_n^\alpha \le c_2(\alpha)n^\alpha. \tag{12}$$

Пусть $C(\mathbb{T}^2)$ — пространство $2\pi$-периодических относительно каждой переменной непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_C := \sup_{(x,y)\in\mathbb{T}^2} |f(x,y)|.$$

Известная теорема Дирихле — Жордана (см. [17]) утверждает, что ряд Фурье функции $f(x)$, $x \in \mathbb{T}$, ограниченной вариации сходится в каждой точке $x$ к значению $[f(x+0)+f(x-0)]/2$. Если к тому же $f$ непрерывна на $\mathbb{T}$, то ряд Фурье сходится равномерно на $\mathbb{T}$. Этот результат обобщен Ватерманом в [13].

**Теорема** [13]. *Если $f \in HBV$, то $S[f]$ сходится в каждой точке $x$ к значению $[f(x+0)+f(x-0)]/2$. Если при этом $f$ непрерывна на $T$, то $S[f]$ сходится равномерно на $\mathbb{T}$.*

Харди [10] обобщил теорему Дирихле — Жордана для двойных рядов Фурье. Он доказал, что если функция $f$ имеет ограниченную вариацию в смысле Харди ($f \in BV$), то $S[f]$ сходится в любой точке $(x,y)$ к значению $\frac{1}{4}\sum f(x\pm 0, y\pm 0)$. Если при этом $f$ непрерывна на $\mathbb{T}^2$, то $S[f]$ сходится равномерно на $\mathbb{T}^2$.

Результат Харди был, в свою очередь, обобщен А. А. Саакяном.

**Теорема** [14]. *Ряд Фурье функции $f \in HBV$ сходится к $\frac{1}{4}\sum f(x\pm 0, y\pm 0)$ в любой точке $(x,y)$, где существуют границы квадранта (2). Сходимость равномерна на любом компакте $K \subset \mathbb{T}^2$, если $f$ непрерывна в окрестности $K$.*

Аналоги этой теоремы для бо́льших размерностей могут быть найдены в [12, 19]. Сходимость сферических и других частичных сумм двойного ряда Фурье функций ограниченной $\Lambda$-вариации подробно исследована М. И. Дьяченко (см. [3–5] и библиографию в них).

Автор в [9] доказал, что в теореме Харди нет необходимости требовать ограниченность смешанной вариации. В частности, верна

**Теорема** [9]. *Если $f \in C(\mathbb{T}^2) \cap PBV$, то $S[f]$ сходится равномерно на $\mathbb{T}^2$.*

Эта теорема обобщена в [8].

**Теорема** [8]. (а) *Пусть $f \in P\{\frac{n}{\log^{1+\delta} n}\}BV$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда двойной ряд Фурье функции $f$ сходится к $\frac{1}{4}\sum f(x\pm 0, y\pm 0)$ в любой точке $(x,y) \in \mathbb{T}^2$, где существуют границы квадранта (2). Сходимость равномерна на любом компакте $K \subset \mathbb{T}^2$, если $f$ непрерывна в окрестности $K$.*

(б) *Существует непрерывная функция $f \in P\{\frac{n}{\log n}\}BV$, двойной ряд Фурье которой расходится на кубах в точке $(0,0)$.*

Для класса $\{\frac{n}{\log n}\}^* BV \subset P\{\frac{n}{\log n}\}BV$ М. И. Дьяченко и Ватерманом доказана следующая

**Теорема** [5]. *Если $f \in \{\frac{n}{\log n}\}^* BV$, то в любой точке $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ существуют границы квадранта (2) и двойной ряд Фурье $f$ сходится к $\frac{1}{4}\sum f(x\pm 0, y\pm 0)$.*

*Кроме того, последовательность $\{\frac{n}{\log n}\}$ не может быть заменена произвольной последовательностью $\{\frac{n\alpha_n}{\log n}\}$, где $\alpha_n \to \infty$.*

В [6] автором совместно с А. А. Саакяном обобщена теорема Дьяченко — Ватермана и доказана

**Теорема** [6]. *Если $f \in \{\frac{n}{\log n}\}^{\#} BV$, то в любой точке $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ существуют границы квадранта (2) и двойной ряд Фурье $f$ сходится к $\frac{1}{4}\sum f(x\pm 0, y\pm 0)$. Сходимость равномерна на любом компакте $K \subset \mathbb{T}^2$, если $f$ непрерывна в окрестности $K$.*

Для одномерного ряда Фурье Ватерманом доказана

**Теорема** [15]. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Ряд Фурье функции $f \in \{n^{1-\alpha}\}BV$ всюду $(C,-\alpha)$-ограничен и равномерно $(C,-\alpha)$-ограничен на каждом замкнутом интервале непрерывности функции $f$.*

*Если $f \in C\{n^{1-\alpha}\}BV$, то $S[f]$ всюду $(C,-\alpha)$-суммируема к значению $[f(x+0)+f(x-0)]/2$ и суммируемость равномерна на каждом замкнутом интервале непрерывности $f$.*

Позднее А. И. Саблин доказал в [12], что для $0<\alpha<1$ классы $\{n^{1-\alpha}\}BV$ и $C\{n^{1-\alpha}\}BV$ совпадают.

Определение 7. Будем говорить, что класс функций $\Omega \subset L^1(\mathbb{T}^2)$ является *классом $(C;-\alpha,-\beta)$-суммируемости на* $\mathbb{T}^2$, если $(C;-\alpha,-\beta)$-средние Чезаро ряда Фурье любой функции $f \in \Omega$ сходятся к $f^*(x)$ в любой регулярной точке $x \in \mathbb{T}^2$. Суммируемость равномерна на любом компакте $K \subset \mathbb{T}^2$, если при этом $f$ непрерывна в окрестности $K$.

Жижиашвили [18] исследовал сходимость средних Чезаро двойного тригонометрического ряда Фурье. В частности, доказана

**Теорема** [18]. *Класс $BV$ — класс $(C;-\alpha,-\beta)$-суммируемости на $\mathbb{T}^2$.*

Для функций частичной ограниченной $\Lambda$-вариации известны следующие результаты.

**Теорема** [7]. *Пусть $\alpha,\beta \in (0,1)$, $\alpha+\beta<1$.*

(а) *Если $f \in P\{\frac{n^{1-(\alpha+\beta)}}{\log^{1+\varepsilon}(n+1)}\}BV$, то $P\{\frac{n^{1-(\alpha+\beta)}}{\log^{1+\varepsilon}(n+1)}\}BV$ — класс $(C;-\alpha,-\beta)$-суммируемости на $\mathbb{T}^2$ для некоторого $\varepsilon>0$.*

(б) *Существует непрерывная функция $f \in P\{\frac{n^{1-(\alpha+\beta)}}{\log(n+1)}\}BV$ такая, что $(C;-\alpha,-\beta)$-средние двумерного ряда Фурье функции $f$ расходятся на кубах в точке $(0,0)$.*

А. Н. Бахваловым в [19] доказана

**Теорема.** *Класс $C\{i^{1-\alpha}\}\{j^{1-\beta}\}V$ — класс $(C;-\alpha,-\beta)$-суммируемости на $\mathbb{T}^2$.*

В данной статье будет доказана

**Теорема 4.** (а) *Пусть $\alpha,\beta \in (0,1)$, $\alpha+\beta<1$ и $f \in C\{n^{1-(\alpha+\beta)}\}^{\#}BV$. Тогда $\sigma_{n,m}^{(-\alpha,-\beta)}f(x,y)$ сходится в любой точке $(x,y)$ к значению $f^*(x,y)$. Суммируемость равномерна на любом компакте $K \subset \mathbb{T}^2$, если при этом $f$ непрерывна в окрестности $K$.*

(б) *Пусть $\Lambda := \{n^{1-(\alpha+\beta)}\xi_n\}$, где $\xi_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$. Тогда существует функция $f \in C(\mathbb{T}^2) \cap C\Lambda^{\#}V$ такая, что $(C;-\alpha,-\beta)$-средние двойного ряда Фурье расходятся неограниченно в точке $(0,0)$.*

Доказательство теоремы 4. П. (а) немедленно следует из теоремы Бахвалова и теоремы 2.

Чтобы доказать п. (б), обозначим

$$\{n^{1-(\alpha+\beta)}\sqrt{\xi_n}\}^{\#}BV \subset C\{n^{1-(\alpha+\beta)}\xi_n\}^{\#}V.$$

Тогда для доказательства п. (б) достаточно показать, что существует непрерывная функция $f \in \{n^{1-(\alpha+\beta)}\sqrt{\xi_n}\}^{\#}BV$, для которой $(C;-\alpha,-\beta)$-средние двойного ряда Фурье расходятся неограниченно в $(0,0)$.

Ясно, что для любой последовательности $\Lambda=\{\lambda_n\}$, удовлетворяющей условию (1), класс $C(\mathbb{T}^2)\cap\Lambda^{\#}BV$ — банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{\Lambda^{\#}BV} := \|f\|_C + \Lambda^{\#}BV(f).$$

Положим

$$A_{i,j} := \left[\frac{\pi i - \alpha\pi/2}{N+1/2-\alpha/2}, \frac{\pi(i+1)-\alpha\pi/2}{N+1/2-\alpha/2}\right) \times \left[\frac{\pi j - \beta\pi/2}{N+1/2-\beta/2}, \frac{\pi(j+1)-\beta\pi/2}{N+1/2-\beta/2}\right).$$

Пусть

$$g_N(x,y) := \sum_{1\le i,j\le (N-1)/2} \mathbf{1}_{A_{i,j}}(x,y)\sin[(N+1/2-\alpha/2)x+\alpha\pi/2] \times \sin[(N+1/2-\beta/2)y+\beta\pi/2],$$

где $\mathbf{1}_A(x,y)$ — характеристическая функция множества $A\subset\mathbb{T}^2$.

Легко показать, что $(s=1,2)$

$$\{n^{1-(\alpha+\beta)}\sqrt{\xi_n}\}^{\#}V_s(g_N) \le c(\alpha,\beta)\sum_{1\le i\le (N-1)/2}\frac{1}{i^{1-(\alpha+\beta)}\sqrt{\xi_i}} = o(N^{\alpha+\beta}) \quad \text{при } N\to\infty,$$

значит,

$$\|g_N\|_{\Lambda^{\#}BV} = o(N^{\alpha+\beta}) = \eta_N N^{\alpha+\beta},$$

где $\eta_N = o(1)$ при $N\to\infty$. Если $f_N := \frac{g_N}{\eta_N N^{\alpha+\beta}}$, то $\sup\limits_N \|f_N\|_{\Lambda^{\#}BV} < \infty$. Отсюда $f_N \in \{n^{1-(\alpha+\beta)}\sqrt{\xi_n}\}^{\#}BV$.

В силу (8)–(12) можем записать

$$\begin{aligned}
\pi^2\sigma_{N,N}^{(-\alpha,-\beta)}f_N(0,0) &= \iint\limits_{\mathbb{T}^2} f_N(x,y)K_N^{-\alpha}(x)K_N^{-\beta}(y)\,dxdy \\
&= \frac{1}{N^{\alpha+\beta}\eta_N}\sum_{1\le i,j\le (N-1)/2}\iint\limits_{A_{i,j}}\sin[(N+1/2-\alpha/2)x+\alpha\pi/2] \\
&\quad\times \sin[(N+1/2-\beta/2)y+\beta\pi/2]\,O\left(\frac{1}{Nx^2}\right)O\left(\frac{1}{Ny^2}\right)dxdy \\
&+ \frac{1}{N^{\alpha+\beta}\eta_N}\sum_{1\le i,j\le (N-1)/2}\iint\limits_{A_{i,j}}\sin[(N+1/2-\alpha/2)x+\alpha\pi/2] \\
&\quad\times \frac{\sin^2[(N+1/2-\beta/2)y+\beta\pi/2]}{A_N^{-\beta}(2\sin y/2)^{1-\beta}}\,O\left(\frac{1}{Nx^2}\right)dxdy \\
&+ \frac{1}{N^{\alpha+\beta}\eta_N}\sum_{1\le i,j\le (N-1)/2}\iint\limits_{A_{i,j}}\frac{\sin^2[(N+1/2-\alpha/2)x+\alpha\pi/2]}{A_N^{-\alpha}(2\sin x/2)^{1-\alpha}} \\
&\quad\times \sin[(N+1/2-\beta/2)y+\beta\pi/2]\,O\left(\frac{1}{Ny^2}\right)dxdy \\
&+ \frac{1}{N^{\alpha+\beta}\eta_N}\sum_{1\le i,j\le (N-1)/2}\iint\limits_{A_{i,j}}\frac{\sin^2[(N+1/2-\alpha/2)x+\alpha\pi/2]}{A_N^{-\alpha}(2\sin x/2)^{1-\alpha}} \\
&\quad\times \frac{\sin^2[(N+1/2-\beta/2)y+\beta\pi/2]}{A_N^{-\beta}(2\sin y/2)^{1-\beta}}\,dxdy = \sum_{k=1}^{4} III_N^{(k)}(x,y). \qquad (13)
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\left|III_N^{(1)}(x,y)\right| \le \frac{c}{N^{\alpha+\beta}\eta_N}\sum_{1\le i,j\le (N-1)/2}\frac{1}{i^2j^2} \le \frac{c}{N^{\alpha+\beta}\eta_N}, \qquad (14)$$

$$\left|III_N^{(2)}(x,y)\right| \le \frac{c(\alpha,\beta)}{N^{\alpha+\beta}\eta_N} \sum_{1\le i,j\le (N-1)/2} \frac{1}{i^2 j^{1-\beta}} \le \frac{c(\alpha,\beta)}{N^{\alpha}\eta_N}, \tag{15}$$

$$\left|III_N^{(3)}(x,y)\right| \le \frac{c(\alpha,\beta)}{N^{\alpha+\beta}\eta_N} \sum_{1\le i,j\le (N-1)/2} \frac{1}{i^{1-\alpha} j^{2}} \le \frac{c(\alpha,\beta)}{N^{\beta}\eta_N}. \tag{16}$$

Для $III_N^{(4)}$ можем записать

$$\begin{aligned}\left|III_N^{(4)}(x,y)\right| &= \frac{1}{(N+1/2-\alpha/2)(N+1/2-\beta/2)} \frac{c(\alpha,\beta)}{N^{\alpha+\beta}\eta_N} \\ &\times \sum_{1\le i,j\le (N-1)/2} \int_{\pi i}^{\pi(i+1)} \int_{\pi j}^{\pi(j+1)} \frac{\sin^2 u}{A_N^{-\alpha}\left(2\sin\frac{u-\alpha\pi/2}{2(N+1/2-\alpha/2)}\right)^{1-\alpha}} \\ &\times \frac{\sin^2 v}{A_N^{-\beta}\left(2\sin\frac{v-\beta\pi/2}{2(N+1/2-\beta/2)}\right)^{1-\beta}}\, dudv \\ &\ge \frac{c(\alpha,\beta)}{\eta_N N^{\alpha+\beta}} \sum_{1\le i,j\le (N-1)/2} \frac{1}{i^{1-\alpha} j^{1-\beta}} \int_{\pi i}^{\pi(i+1)} \sin^2 u\, du \int_{\pi j}^{\pi(j+1)} \sin^2 v\, dv \ge \frac{c(\alpha,\beta)}{\eta_N}. \end{aligned} \tag{17}$$

Объединяя (14)–(17), получаем

$$\pi^2\left|\sigma_{N,N}^{(-\alpha,-\beta)} f_N(0,0)\right| \ge c(\alpha,\beta)\frac{c(\alpha,\beta)}{\eta_N} \to \infty \quad \text{при } N\to\infty. \tag{18}$$

Применяя теорему Банаха — Штейнгауза, из (18) заключаем, что существует непрерывная функция $f \in \{n^{1-(\alpha+\beta)}\sqrt{\xi_n}\}^{\#}BV$ такая, что

$$\sup_N \left|\sigma_{N,N}^{(-\alpha,-\beta)} f(0,0)\right| = +\infty. \quad \square$$

Поскольку $C\Lambda^* V \subset C\Lambda^{\#} V$, теорема 4 влечет

**Следствие.** *Пусть $\alpha,\beta \in (0,1)$, $\alpha+\beta<1$ и $f \in C\{n^{1-(\alpha+\beta)}\}^* BV$. Тогда $\sigma_{n,m}^{(-\alpha,-\beta)} f(x,y)$ сходится в любой точке $(x,y)$ к значению $f^*(x,y)$. Суммируемость равномерна на любом компакте $K \subset \mathbb{T}^2$, если при этом $f$ непрерывна в окрестности $K$.*

Из теорем 4 и 3 следует

**Теорема 5.** *Пусть $\alpha,\beta \in (0,1)$, $\alpha+\beta<1$ и*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_s^{\#}(f;2^j)}{2^{j(1-(\alpha+\beta))}} < \infty, \quad s=1,2.$$

*Тогда $\sigma_{n,m}^{(-\alpha,-\beta)} f(x,y)$ сходится в любой точке $(x,y)$ к значению $f^*(x,y)$. Суммируемость равномерна на любом компакте $K \subset \mathbb{T}^2$, если при этом $f$ непрерывна в окрестности $K$.*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Jordan C.* Sur la series de Fourier // C. R., Math., Acad. Sci. Paris. 1881. V. 92. P. 228–230.
2. *Chanturia Z. A.* The modulus of variation of a function and its application in the theory of Fourier series // Soviet. Math. Dokl. 1974. V. 15. P. 67–71.
3. *Dyachenko M. I.* Waterman classes and spherical partial sums of double Fourier series // Anal. Math. 1995. V. 21. P. 3–21.
4. *Дьяченко М. И.* Двумерные классы Ватермана и $u$-сходимость рядов Фурье // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 7. С. 23–40.
5. *Dyachenko M. I., Waterman D.* Convergence of double Fourier series and W-classes // Trans. Amer. Math. Soc. 2005. V. 357. P. 397–407.
6. *Goginava U., Sahakian A.* Convergence of double Fourier series and generalized $\Lambda$-variation // Georgian Math. J. 2012. V. 19, N 3. P. 497–509.
7. *Goginava U., Sahakian A.* On the convergence of Cesàro means of negative order of double trigonometric Fourier series of functions of bounded partial generalized variation // Acta. Sci. Math. (Szeged). 2011. V. 77. P. 451–471.
8. *Goginava U., Sahakian A.* On the convergence of Fourier series of functions of bounded partial generalized variation // East J. Approx. 2010. V. 16, N 2. P. 153–165.
9. *Goginava U.* Uniform convergence of Cesáro means of negative order of double Walsh — Fourier series // J. Approx. Theory. 2003. V. 124, N 1. P. 96–108.
10. *Hardy G. H.* On double Fourier series and especially which represent the double zeta function with real and incommensurable parameters // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1906. V. 37. P. 53–79.
11. *Marcinkiewicz J.* On a class of functions and their Fourier series // Compt. Rend. Soc. Sci. Warsowie. 1934. V. 26. P. 71–77.
12. *Саблин А. И.* $\Lambda$-вариация и ряды Фурье // Изв. вузов. Математика. 1987. № 10. С. 66–68.
13. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Stud. Math. 1972. V. 44. P. 107–117.
14. *Саакян А. А.* О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации // Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. 1986. Т. 21, № 6. С. 517–529.
15. *Waterman D.* On the summability of Fourier series of functions of $\Lambda$-bounded variation // Stud. Math. 1976. V. 55. P. 87–95.
16. *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // Massachusetts J. Math. 1924. V. 3. P. 72–94.
17. *Zygmund A.* Trigonometric series. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959.
18. *Zhizhiashvili L. V.* Trigonometric Fourier series and their conjugates. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1996.
19. *Бахвалов А. Н..* Суммирование методами Чезаро рядов Фурье функций из многомерных классов Ватермана // Докл. АН. 2011. Т. 437, № 6. С. 731–733.


*Статья поступила 12 марта 2013 г.*

Гогинава Ушанги
Тбилисский гос. университет им. И. Джавахишвили,
ул. Чавчавадзе, 1, Тбилиси 0128, Грузия
zazagoginava@gmail.com