Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 514.84

ФУНКЦИЯ ГРИНА ПЯТИТОЧЕЧНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ДВУМЕРНОГО КОНЕЧНОЗОННОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА: СЛУЧАЙ ЧЕТЫРЕХ ОСОБЫХ ТОЧЕК НА СПЕКТРАЛЬНОЙ КРИВОЙ

Б. О. Василевский

Аннотация. Рассмотрим регулярную риманову поверхность конечного рода и «обобщенные спектральные данные» — специальный набор выделенных точек на ней. По ним строится дискретный аналог функции Бейкера — Ахиезера вместе с дискретным оператором, обнуляющим ее. При некоторых дополнительных условиях на обобщенные спектральные данные оператор принимает вид дискретного оператора Коши — Римана, а ее ограничение на четную подрешетку обнуляется соответствующим оператором Шрёдингера. В этой работе строится явная формула для функции Грина указанного оператора. Формула выражает функцию Грина в терминах интеграла по специальному контуру от дифференциала, построенного по волновой функции и дополнительным спектральным данным. В результате почти по каждой точке спектральной кривой можно получить функцию Грина с известной асимптотикой на бесконечности.

Ключевые слова: дискретный оператор, конечнозонный оператор, функция Грина, М-кривая.

1. Введение

В настоящее время одной из активно исследуемых задач математической физики является построение интегрируемых дискретных аналогов непрерывных интегрируемых систем. Большой прорыв в развитии последних был сделан в 1960-х гг. с применением теории солитонов.

В непрерывном случае хотелось бы упомянуть подходы С. В. Манакова и Б. А. Дубровина, И. М. Кричевера, С. П. Новикова. С. В. Манаков в своей работе [1] доказал, что для двумерных систем правильным обобщением пары Лакса является L, A, B-тройка. Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер и С. П. Новиков [2] показали интегрируемость двумерного стационарного конечнозонного оператора Шрёдингера при фиксированной энергии, используя конечнозонный подход. Следующий важный шаг сделан в работе А. П. Веселова и С. П. Новикова [3, 4], в которой авторы нашли условие на конечнозонные спектральные данные, соответствующие нулевому магнитному полю. На операторах с нулевым магнитным полем возникает иерархия Веселова — Новикова, порождающая бесконечную алгебру симметрий для задачи рассеяния.

В дискретном случае отдельный интерес (не только чисто теоретический) вызвала задача рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера при одной энергии. Интегрируемая (построено обратное спектральное преобразование в периодическом случае) гиперболическая дискретизация найдена в [5]. Далее, в [6] получена эллиптическая дискретизация из специальной редукции гиперболической дискретизации. Эта редукция в терминах спектральных данных оказалась очень похожа на редукцию в [3, 4]. В частности, на спектральной кривой требуется наличие голоморфной инволюции с двумя неподвижными точками.

Случаи двух и нуля неподвижных точек у голоморфной инволюции на римановой поверхности являются наиболее интересными согласно [7]. Как показано в [8], конечнозонные решения, построенные в [6], являются решениями специального вида. Решения общего положения отвечают спектральным кривым, у которых инволюция не имеет неподвижных точек. Вслед за [6] будем рассматривать инволюцию именно с двумя неподвижными точками.

Наиболее общие потенциалы отвечают римановой поверхности, на которой особенности находятся в четырех сериях выделенных точек. Однако наиболее интересен случай, когда все точки серий совпадают или, что эквивалентно, имеется ровно четыре особые точки. Остановимся на нем.

Приведем сведения из [6], необходимые для построения пятиточечного эллиптического оператора и его волновой функции. При этом сразу будем рассматривать случай только четырех особых точек. Главная цель данной статьи — явная формула для функции Грина этого оператора.

Будем считать, что имеются:

1) компактная, регулярная риманова поверхность рода g;

2) фиксированная точка R_1 на Γ — точка нормировки для волновой функции $\Psi(\gamma, m, n)$;

3) g точек $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ на Γ — дивизор полюсов волновой функции;

4) четыре выделенные точки P^+, P^-, Q^+, Q^-.

По теореме Римана — Роха для данных общего положения и для любых целых m, n существует единственная функция $\Psi(\gamma, m, n)$, $\gamma \in \Gamma$, со следующими свойствами.

1. $\Psi(\gamma, m, n)$ является мероморфной функцией от γ на Γ.

2. Ψ имеет полюса не более первого порядка в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_g$, полюс не более m-го порядка в точке P^+, полюс не более n-го порядка в точке Q^+ и не имеет никаких других особенностей.

3. Ψ имеет нуль по крайней мере m-го порядка в точке P^- и нуль по крайней мере n-го порядка в точке Q^-.

4. $\Psi(R_1, m, n) = 1$.

Из теоремы Римана — Роха также следует справедливость равенства

$$\Psi(\gamma, m+1, n+1) + \alpha_1(m,n)\Psi(\gamma, m+1, n) + \alpha_2(m,n)\Psi(\gamma, m, n+1) + \alpha_3\Psi(\gamma, m, n) = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты $\alpha_j(m, n)$ задаются формулами

$$\alpha_1(m,n) = -\lim_{\gamma \to P^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n+1)}{\Psi(\gamma, m+1, n)},$$

$$\alpha_2(m,n) = -\lim_{\gamma \to Q^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n+1)}{\Psi(\gamma, m, n+1)},$$

$$\alpha_3(m,n) = -1 - \alpha_1(m,n) - \alpha_2(m,n).$$

Полученный гиперболический дискретный оператор Шрёдингера построен в [5].

Пусть на Γ определена голоморфная инволюция σ ровно с двумя неподвижными точками $R_+ = R_1$, R_- и следующими свойствами:

1) на Γ существует мероморфный дифференциал Ω с двумя полюсами первого порядка в R_+, R_- и $2g$ нулями в $\gamma_1, \dots, \gamma_g, \sigma\gamma_1, \dots, \sigma\gamma_g$;

2) $\sigma P^+ = P^-$, $\sigma Q^+ = Q^-$.

В таком случае по [6, лемма 16]

$$\Psi(R_-, m, n) = (-1)^{m+n}, \quad \alpha_1(m,n) + \alpha_2(m,n) = 0, \quad \alpha_3(m,n) = -1, \tag{2}$$

а волновая функция Ψ удовлетворяет 4-точечному уравнению

$$\Psi(m+1, n+1) - \Psi(m,n) = if(m,n)(\Psi(m+1,n) - \Psi(m,n+1)), \tag{3}$$

$$f(m,n) = i\alpha_1(m,n) = -i\alpha_2(m,n). \tag{4}$$

Примечательно, что из существования такой инволюции с формой вытекает, что

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{f(m,n)}(\Psi(m+1,n+1) - \Psi(m,n)) \\
&+ f(m,n-1)(\Psi(m+1,n-1) - \Psi(m,n)) + f(m-1,n)(\Psi(m-1,n+1) - \Psi(m,n)) \\
&\qquad + \frac{1}{f(m-1,n-1)}(\Psi(m-1,n-1) - \Psi(m,n)) = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Это следует как из теоремы Римана — Роха, так и напрямую из [6, предложение 2]. После перехода на четную подрешетку

$$m = \mu - \nu, \quad n = \mu + \nu, \quad \Psi_{\mu,\nu} = \Psi(m,n) = \Psi(\mu-\nu, \mu+\nu),$$

$$a_{\mu,\nu} = \frac{1}{f(m,n)}, \quad a_{\mu-1,\nu} = \frac{1}{f(m-1,n-1)},$$

$$b_{\mu,\nu} = f(m-1,n), \quad b_{\mu,\nu-1} = f(m,n-1),$$

$$c_{\mu,\nu} = a_{\mu,\nu} + a_{\mu-1,\nu} + b_{\mu,\nu} + b_{\mu,\nu-1}$$

пятиточечный оператор запишется в следующем виде:

$$(L\Phi)_{\mu,\nu} = a_{\mu,\nu}\Phi_{\mu+1,\nu} + a_{\mu-1,\nu}\Phi_{\mu-1,\nu} + b_{\mu,\nu}\Phi_{\mu,\nu+1} + b_{\mu,\nu-1}\Phi_{\mu,\nu-1} - c_{\mu,\nu}\Phi_{\mu,\nu}. \tag{6}$$

Будем считать нормировку $\Omega(\gamma)$ такой, что его вычеты в точках R_+, R_- равны соответственно $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

Двойственная волновая функция определяется как $\Psi^+(\gamma, m, n) = \Psi(\sigma\gamma, m, n)$. При ее участии строится дифференциал

$$\widetilde{\Omega}(\gamma, m, n, \tilde{m}, \tilde{n}) = \Psi(\gamma, m, n)\Psi^+(\gamma, \tilde{m}, \tilde{n})\Omega.$$

Такое обозначение отличается от [6] заменой $\mu \leftrightarrow \tilde{\mu}$ и $\nu \leftrightarrow \tilde{\nu}$, что позволяет избежать излишнего загромождения формул. При помощи $\widetilde{\Omega}$ будем строить функцию Грина для оператора L.

Также потребуем существование на Γ антиголоморфной инволюции τ такой, что

1) τ и σ коммутируют;

2) $\tau R_+ = R_-$;

3) P^+, P^-, Q^+, Q^- являются неподвижными точками для τ;

4) дивизор $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ инвариантен относительно τ.

В этом случае по [6, лемма 17]

$$f(m,n) \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$\Psi(\tau\gamma, m, n) = (-1)^{m+n}\overline{\Psi(\gamma, m, n)}. \tag{8}$$

Пример 1. Рассмотрим случай сферы Римана. Пусть $P^{\pm} = \pm 1$, $Q^{\pm} = \pm i$, $R_+ = \infty$, $R_- = 0$. Волновая функция запишется как

$$\Psi(z, m, n) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n.$$

Отсюда видно, что $f(m,n) \equiv 1$, т. е. Ψ удовлетворяет гиперболическому уравнению

$$\varphi_{m+1,n+1} - \varphi_{mn} = i(\varphi_{m+1,n} - \varphi_{m,n+1}).$$

Определим инволюции и дифференциал Ω:

$$\sigma z = -z, \quad \Omega = -\frac{dz}{2z}, \quad \tau z = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Из существования σ, Ω немедленно следует, что Ψ является также решением эллиптического уравнения

$$\varphi_{m+1,n+1} + \varphi_{m+1,n-1} + \varphi_{m-1,n+1} + \varphi_{m-1,n-1} - 4\varphi_{mn} = 0.$$

Заметим, что на Γ есть только один вещественный овал (множество точек, инвариантных относительно τ) $|z| = 1$, на котором лежат все наши выделенные точки $P^{\pm}$, $Q^{\pm}$.

2. Рост волновой функции

Вопрос о том, как ведет себя $|\Psi(\gamma, m, n)|$ при фиксированном γ, очень важен для оценки роста функции Грина, построенной в работе. Для формулировки и доказательства теоремы потребуются некоторые понятия теории римановых поверхностей.

Выберем на Γ канонический базис циклов $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ и базис голоморфных дифференциалов $\omega_1, \dots, \omega_g$, нормированный следующим образом:

$$\oint\limits_{a_k} \omega_j = \delta_{jk}.$$

Нам понадобится тета-функция Римана поверхности Γ, которая определяется рядом

$$\theta(z|B) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i \langle BN, N\rangle + 2\pi i \langle N, z\rangle),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение, а B — матрица b-периодов голоморфных дифференциалов

$$\oint\limits_{b_k} \omega_j = B_{jk}.$$

Зададим отображение Абеля как

$$\vec{A}(\gamma) = \left(\int\limits_{R_+}^{\gamma} \omega_1, \dots, \int\limits_{R_+}^{\gamma} \omega_g \right). \tag{9}$$

Напомним, что это корректно определенное отображение $\Gamma \xrightarrow{A} J(\Gamma)$, где $J(\Gamma)$ — многообразие Якоби, $J(\Gamma) = \mathbb{C}^g/\{M + BN\}$ для $M, N \in \mathbb{Z}^g$.

Для двух различных точек P, Q римановой поверхности существует мероморфный дифференциал $\Omega(P, Q)$ с полюсами первого порядка в P, Q и вычетами -1 и 1 соответственно, не имеющий других особенностей. Добавим условие равенства нулю по всем a-циклам, благодаря которому $\Omega(P, Q)$ определяется однозначно. Он противоположен соответствующему нормированному абелеву дифференциалу третьего рода.

Для волновой функции Ψ есть формула в явном виде [6, 5.2], верная при любых целых m, n:

$$\begin{aligned}\Psi(\gamma, m, n) = \exp\left(m\int_{R_+}^{\gamma} \Omega(P^+, P^-) + n\int_{R_+}^{\gamma} \Omega(Q^+, Q^-)\right) \\ \times \frac{\theta\left(\vec{A}(\gamma) + m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q - \sum\limits_{k=1}^{g} \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K}\right)}{\theta\left(\vec{A}(\gamma) - \sum\limits_{k=1}^{g} \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K}\right)} \\ \times \frac{\theta\left(\vec{A}(R_+) - \sum\limits_{k=1}^{g} \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K}\right)}{\theta\left(\vec{A}(R_+) + m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q - \sum\limits_{k=1}^{g} \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K}\right)},\end{aligned} \tag{10}$$

где $\vec{\Delta}_P = \vec{A}(P^-) - \vec{A}(P^+)$, $\vec{\Delta}_Q = \vec{A}(Q^-) - \vec{A}(Q^+)$. Пути во всех интегралах берутся одинаковыми. Проверим, что (10) задает однозначную на Γ функцию. Если путь до фиксированного γ изменяется на некоторый цикл, гомологичный $\sum\limits_{j=1}^{g}(N_j a_j + M_j b_j)$, $\vec{N}, \vec{M} \in \mathbb{Z}^g$, то отношение θ-функций умножится на $t = \exp(-2\pi i\langle \vec{M}, m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q\rangle)$. Из теории римановых поверхностей известно, что

$$\oint_{b_k} \Omega(P^+, P^-) = 2\pi i\int_{P^+}^{P^-} \omega_k, \quad \oint_{b_k} \Omega(Q^+, Q^-) = 2\pi i\int_{Q^+}^{Q^-} \omega_k, \tag{11}$$

а следовательно, экспонента умножится на t^{-1}.

Пусть Γ является М-кривой, т. е. инволюция τ имеет $g + 1$ неподвижных овалов $a_1, a_2, \dots, a_g, c$.

Теорема 1. *Пусть Γ является* М*-кривой, выделенные точки $P^\pm$, $Q^\pm$ попадают на овал c, на остальные овалы попадает по одной точке γ-дивизора: $\gamma_j \in a_j$, $j = 1, \dots, g$. Тогда канонический базис циклов и пути интегрирования на Γ можно выбрать таким образом, что для любого фиксированного $\gamma \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$ выполняется неравенство при всех целых m, n:*

$$|\Psi(\gamma, m, n)| \le R(\gamma)\left|\exp\left(m\int_{R_+}^{\gamma} \Omega(P^+, P^-) + n\int_{R_+}^{\gamma} \Omega(Q^+, Q^-)\right)\right|, \tag{12}$$

где $R : \Gamma \to \mathbb{R}$ — гладкая на $\Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$ функция.

Другими словами, для почти всех $\gamma \in \Gamma$ рост абсолютной величины $\Psi(m, n)$ зависит только от $\Omega(P^+, P^-)$, $\Omega(Q^+, Q^-)$.

Доказательство. Благодаря расположению γ_j все нули $\Psi(\gamma, m, n)$ при любых m, n располагаются только на неподвижных овалах $a_1, \dots, a_g, c$. Действительно, на каждом из a_j, $j = 1, \dots, g$, функция $\Psi(\gamma, m, n)$ вещественная или чисто мнимая (8) и имеет полюс первого порядка. Тогда на a_j найдется и нуль по крайней мере первого порядка. Степень дивизора $(mP^- - mP^+ + nQ^- - nQ^+ - \gamma_1 - \dots - \gamma_g)$ равна $(-g)$, и по построению у $\Psi(\gamma, m, n)$ нет полюсов вне точек этого дивизора. Следовательно, все нули на a_j имеют первый порядок, и более на Γ нулей у $\Psi(\gamma, m, n)$ нет.

Рассмотрим явную формулу (10). Пусть $\gamma \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$, тогда ни одна из θ-функций не обращается в нуль. Докажем существование гладких $R_{\min}(\gamma) > 0$ и $R_{\max}(\gamma) > 0$ таких, что для любых m, n выполняется

$$R_{\min}(\gamma) \le \left|\theta\left(\vec{A}(\gamma) + m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q - \sum_{k=1}^{g} \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K}\right)\right| \le R_{\max}(\gamma).$$

Искомая оценка будет выполняться при

$$R(\gamma) = \frac{R_{\max}(\gamma)}{R_{\min}(\gamma)} \frac{\left|\theta\left(\vec{A}(R_+) - \sum\limits_{k=1}^{g} \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K}\right)\right|}{\left|\theta\left(\vec{A}(\gamma) - \sum\limits_{k=1}^{g} \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K}\right)\right|}.$$

Возьмем в качестве a-циклов канонического базиса неподвижные овалы τ с точками γ-дивизора $a_1, \dots, a_g$. Благодаря такому выбору получаем целый ряд свойств.

Для каждого $j = 1, \dots, g$ дифференциал $\overline{\tau\omega_j}$ голоморфен и имеет ту же нормировку, что и ω_j. Следовательно, $\tau\omega_j = \overline{\omega}_j$ и ω_j принимает вещественные значения на неподвижных овалах τ.

Вещественной частью многообразия Якоби $\operatorname{Re} J(\Gamma)$ назовем подмножество $J(\Gamma)$ классов эквивалентности с вещественными представителями $\vec{x} + B\vec{M}$, где $\vec{x} \in \mathbb{R}^g$, $\vec{M} \in \mathbb{Z}^g$.

Вспомним, что при изменении m, n аргументы θ-функций изменяются на $\vec{\Delta}_P = \vec{A}(P^-) - \vec{A}(P^+)$, $\vec{\Delta}_Q = \vec{A}(Q^-) - \vec{A}(Q^+)$ соответственно. Тогда из вещественности ω_j на неподвижных овалах и определения

$$(\vec{\Delta}_P)_j = \int_{P^+}^{P^-} \omega_j, \quad (\vec{\Delta}_Q)_j = \int_{Q^+}^{Q^-} \omega_j$$

следует, что $\vec{\Delta}_P \in \operatorname{Re} J(\Gamma)$, $\vec{\Delta}_Q \in \operatorname{Re} J(\Gamma)$, так как от вещественного вектора они могут отличаться только на периоды многообразия Якоби.

Фиксируем $\lambda \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$ и рассмотрим множество всех значений аргументов рассматриваемой θ-функции при различных m, n:

$$V(\lambda) = \left\{\vec{A}(\lambda) + m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q - \sum_{k=1}^{g} \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Докажем, что замыкание $V(\lambda)$ в $J(\Gamma)$ не содержит нулей θ-функции. Пусть такой нуль $z \in J(\Gamma)$ все-таки нашелся. Тогда разность $z - \left(\vec{A}(\lambda) - \sum\limits_{k=1}^{g} \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K}\right)$ сколь угодно приближается суммой $m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q \in \operatorname{Re} J(\Gamma)$ и по замкнутости сама принадлежит $\operatorname{Re} J(\Gamma)$. Следовательно, найдется такая $\lambda_0 \in \Gamma$, $\tau\lambda_0 = \lambda_0$, что на $J(\Gamma)$ выполняется равенство $z = \vec{A}(\lambda_0) - \sum_{k=1}^{g} \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K}$, откуда вытекает, что $\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\lambda) \in \operatorname{Re} J(\Gamma)$.

Воспользуемся возможностью выбрать пути интегрирования и добьемся вещественности последней разности: $\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\lambda) \in \mathbb{R}^g$. Из $\tau\omega_j = \overline{\omega}_j$ вытекает

$$\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\tau\lambda) = \overline{\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\lambda)},$$

а из вещественности правой части — $\vec{A}(\lambda) = \vec{A}(\tau\lambda)$. Поскольку $\tau\lambda \neq \lambda$, такое может быть только на сфере $g = 0$, где доказываемая оценка тривиальна.

Из отсутствия нулей в замыкании $V(\lambda) \subset J(\Gamma)$ и компактности последнего следует существование искомых $R_{\min}(\lambda)$, $R_{\max}(\lambda)$ для всех $\lambda \notin (a_1 \cup \dots \cup a_h \cup c)$, этим и завершается доказательство.

Замечание 1. Выбор путей интегрирования в точности соответствует случаю $\vec{\Delta}_P \in \mathbb{R}^g$, $\vec{\Delta}_Q \in \mathbb{R}^g$, поэтому по (11) интегралы от $\Omega(P^+, P^-)$, $\Omega(Q^+, Q^-)$ по любому циклу вещественны.

Замечание 2. По всей видимости, оценка (12) выполняется почти всюду и в более общем случае, когда Γ не является M-кривой. Но строгое доказательство требует более серьезной техники. Эта задача — тема для дальнейших исследований.

3. Квазиимпульсы

Дифференциалы квазиимпульсов dp_m, dp_n определяются по аналогии с [9]. А именно, это мероморфные дифференциалы третьего рода; dp_m имеет вычеты i, $-i$ в точках P^+, P^- соответственно, dp_n — такие же вычеты в точках Q^+, Q^- соответственно. Дифференциалы квазиимпульсов однозначно определяются условием вещественности интегралов по всем контурам. Сами квазиимпульсы определяются как

$$p_m(\gamma) = \int_{R_+}^{\gamma} dp_m, \quad p_n(\gamma) = \int_{R_+}^{\gamma} dp_n \tag{13}$$

и многозначны на Γ, однако их мнимые части $\operatorname{Im} p_m(\gamma)$, $\operatorname{Im} p_n(\gamma)$ уже однозначны на Γ.

Из замечания 1 и единственности дифференциалов квазиимпульсов следует, что при выборе канонического базиса циклов и путей интегрирования, как в теореме 1, выполняется $\Omega(P^+, P^-) = -idp_m$, $\Omega(Q^+, Q^-) = -idp_n$. Поэтому оценка (12) может быть переписана в терминах квазиимпульсов:

$$|\Psi(\gamma, m, n)| \leq R(\gamma) e^{m \operatorname{Im} p_m(\gamma)} e^{n \operatorname{Im} p_n(\gamma)}. \tag{14}$$

Отметим, что поскольку и левая часть, и квазиимпульсы уже не зависят от выбора базиса или путей интегралов, то функция $R(\gamma)$ также не зависит от них.

Оценка абсолютной величины двойственной волновой функции получается заменой γ на $\sigma\gamma$:

$$|\Psi^+(\gamma, m, n)| \leq R(\sigma\gamma) e^{m \operatorname{Im} p_m(\sigma\gamma)} e^{n \operatorname{Im} p_n(\sigma\gamma)}.$$

Дифференциал $-dp_m(\sigma\gamma)$ имеет полюса в P^+, P^- с вычетами соответственно $+i$, $-i$, а также интеграл от него по любому контуру вещественный. Следовательно, $dp_m(\sigma\gamma) = -dp_m$. Рассуждая аналогично, получим $dp_n(\sigma\gamma) = -dp_n$. Поэтому последнее неравенство можно переписать в виде

$$|\Psi^+(\gamma, m, n)| \le R(\sigma\gamma) e^{-m \operatorname{Im} p_m(\gamma)} e^{-n \operatorname{Im} p_n(\gamma)}. \tag{15}$$

Для контроля роста Ψ будем рассматривать множества вида

$$C_\lambda = \{\gamma : \operatorname{Im} p_n(\gamma) = \operatorname{Im} p_n(\lambda)\}, \quad \lambda \in \Gamma.$$

Такого рода контуры возникли еще в [10].

Пример 2. Продолжим рассмотрение случая $g = 0$. В качестве дифференциалов квазиимпульсов подходят

$$dp_m = \frac{idz}{z-1} - \frac{idz}{z+1}, \quad dp_n = \frac{idz}{z-i} - \frac{idz}{z+i}.$$

Действительно, мнимые части квазиимпульсов получаются однозначными:

$$p_m = i \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right), \quad p_n = i \ln\left(\frac{z-i}{z+i}\right),$$

$$\operatorname{Im} p_m = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|, \quad \operatorname{Im} p_n = \ln\left|\frac{z-i}{z+i}\right|.$$

На сфере Римана контуры $\operatorname{Im} p_m = \text{const}$, $\operatorname{Im} p_n = \text{const}$ представляют собой окружности с центрами в $P^\pm$, $Q^\pm$ соответственно. Заметим, что точки $P^\pm$, $R_\pm$ лежат на одном контуре $\operatorname{Im} p_n = 0$.

Оценки (14) и (15) в случае сферы обращаются в равенства при $R \equiv 1$.

Перечислим важные для нас в будущем свойства контура C_λ. Для начала заметим, что при $\lambda = Q^\pm$ он вырождается в точку.

Лемма 1. *Почти для всех $\lambda \in \Gamma \setminus \{Q^+, Q^-\}$ верны следующие свойства:*

1) *C_λ является объединением некоторого количества кусочно гладких замкнутых кривых,*

2) *C_λ гомологичен точке,*

3) *точки R_+, R_- лежат по одну сторону относительно C_λ, точки Q^+, Q^- — по разные.*

Доказательство. 1. Дифференциал dp_n имеет $2g$ нулей на Γ с учетом кратностей. Если C_λ через них не проходит, то по теореме о неявной функции в окрестности каждой своей точки C_λ представляет собой гладкую неособую кривую. При прохождении через нули кривая может потерять гладкость, но остается непрерывной. Из компактности Γ следует замкнутость каждого пути.

2. Гомологичность точке C_λ вытекает из того, что он является границей подмногообразия с краем $\{\gamma : \operatorname{Im} p_n(\gamma) \le \operatorname{Im} p_n(\lambda)\}$, гладкого почти для всех λ.

3. Утверждение о Q^+, Q^- гарантируют равенства

$$\operatorname{Im} p_n(Q^+) = -\infty, \quad \operatorname{Im} p_n(Q^-) = +\infty.$$

В силу предыдущих пунктов достаточно показать, что

$$\operatorname{Im} p_n(R_-) = \operatorname{Im} p_n(R_+) = 0.$$

Для начала заметим, что дифференциал $-\overline{\tau(dp_n)}$ мероморфен, имеет простые полюса в Q^+, Q^- с вычетами i и $-i$ соответственно, а также интеграл от него по любому контуру веществен. Тогда ввиду единственности $\tau(dp_n) = -\overline{dp_n}$. Используя $\tau R_+ = R_-$ и вещественность интегралов по контурам, получаем

$$\operatorname{Im}\int\limits_{R_+}^{R_-} dp_n = -\operatorname{Im}\int\limits_{R_+}^{R_-} \overline{\tau(dp_n)} = -\operatorname{Im}\int\limits_{R_-}^{R_+} \overline{dp_n} = \operatorname{Im}\int\limits_{R_+}^{R_-} \overline{dp_n} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im}\int\limits_{R_+}^{R_-} dp_n = 0,$$

что и требовалось.

4. Функция Грина оператора L

Нас интересует такая функция $G(\lambda,\mu,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu)$, что для любого фиксированного $\lambda\in\Gamma$

$$LG = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu=\tilde\mu \text{ и } \nu=\tilde\nu, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} LG &= a_{\mu,\nu}G(\lambda,\mu+1,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu) + a_{\mu-1,\nu}G(\lambda,\mu-1,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu) \\ &+ b_{\mu,\nu}G(\lambda,\mu,\nu+1,\tilde\mu,\tilde\nu) + b_{\mu,\nu-1}G(\lambda,\mu,\nu-1,\tilde\mu,\tilde\nu) - c_{\mu,\nu}G(\lambda,\mu,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu). \end{aligned} \tag{17}$$

Забегая вперед, заметим, что почти при всех λ для найденной функции выполнено

$$|G(\lambda,\mu,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu)| \le R_1(\lambda)e^{(\mu-\tilde\mu)\operatorname{Im}p_\mu(\lambda)}e^{(\nu-\tilde\nu)\operatorname{Im}p_\nu(\lambda)}, \tag{18}$$

где

$$p_\mu = p_n + p_m, \quad p_\nu = p_n - p_m \tag{19}$$

и $R_1 : \Gamma \to \mathbb{R}$ — гладкая в точках выполнения неравенства. Другими словами, почти всюду рост абсолютной величины G такой же, как и Ψ.

Предположение П. Г. Гриневича заключалось в том, что функцию Грина можно найти примерно в таком же виде, как в непрерывном случае [11]. Здесь покажем справедливость предположения. Искомую G будет строить в два шага: сначала построим ненормализованную функцию G_0, удовлетворяющую (16), а затем подправим ее, чтобы обеспечить нужный рост (18).

4.1. Ненормализованная функция Грина по C-контуру. Прежде чем формулировать основную теорему раздела, докажем несколько лемм.

Лемма 2. *При $\mu-\nu=\tilde\mu-\tilde\nu$ выполняется*

$$\operatorname{res}_{P^+} a_{\mu,\nu}\Psi_{\mu+1,\nu}(\gamma)\Psi^+_{\tilde\mu,\tilde\nu}(\gamma)\Omega(\gamma) = -\operatorname{res}_{P^+} b_{\mu,\nu-1}\Psi_{\mu,\nu-1}\Psi^+_{\tilde\mu,\tilde\nu}(\gamma)\Omega(\gamma). \tag{20}$$

Доказательство. Посчитаем порядок полюса в P^+ у левого дифференциала. Функция $\Psi_{\mu+1,\nu}(\gamma)$ имеет в P^+ полюс порядка не более чем $\mu-\nu+1$, $\Psi^+_{\tilde\mu,\tilde\nu}(\gamma)$ имеет в P^+ нуль порядка не менее чем $\tilde\mu-\tilde\nu$; в сочетании с условием леммы это означает, что левый дифференциал имеет в P^+ полюс порядка не более чем 1. Аналогично получаем, что и у правого дифференциала в P^+ полюс порядка не более чем 1. Следовательно, при вычислении вычетов можно использовать $\operatorname{res}_{\gamma_0}\omega(\gamma) = \lim\limits_{\gamma\to\gamma_0}(\gamma-\gamma_0)\omega(\gamma)$. Перейдем к обозначениям $m=\mu-\nu$, $n=\mu+\nu$:

$$a_{\mu,\nu} = \frac{1}{f(m,n)} = i\lim_{\gamma\to P^+}\frac{\Psi(\gamma,m+1,n)}{\Psi(\gamma,m+1,n+1)},$$

$$b_{\mu,\nu-1} = f(m,n-1) = -i \lim_{\gamma\to P^+} \frac{\Psi(\gamma,m+1,n)}{\Psi(\gamma,m+1,n-1)}.$$

По условию $\tilde{m} = m$, тогда левая часть (20) равна

$$\lim_{\gamma\to P^+} (\gamma - P^+) i \frac{\Psi(\gamma,m+1,n)}{\Psi(\gamma,m+1,n+1)} \Psi(\gamma,m+1,n+1)\Psi^+(\gamma,m,\tilde{n})\Omega(\gamma).$$

Расписав таким же образом правую часть, получим после сокращений утверждение леммы.

Напомним, что $\widetilde{\Omega}(\gamma,\mu,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu})$ — дифференциал $\Psi_{\mu,\nu}(\gamma)\Psi^+_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}(\gamma)\,\Omega(\gamma)$.

Лемма 3. *Для любых μ, ν выполняется*

$$\operatorname{res}_{Q^+} a_{\mu,\nu}\widetilde{\Omega}(\gamma,\mu+1,\nu,\mu,\nu) = i. \tag{21}$$

Доказательство. Это утверждение возникло еще в [6, 5.2]. Поскольку $a_{\mu,\nu} = 1/f(m,n)$, в обозначениях m, n оно выглядит как

$$\operatorname{res}_{Q^+} \Psi(m+1,n+1)\Psi^+(m,n)\Omega(\gamma) = if(m,n).$$

Для доказательства рассмотрим 4-точечное равенство (3), домножим его на $\Psi^+(m,n)\Omega(\gamma)$ и возьмем вычеты в точке Q^+:

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{Q^+} &(\Psi(m+1,n+1) - \Psi(m,n))\Psi^+(m,n)\Omega(\gamma) \\ &= if(m,n)\operatorname{res}_{Q^+}(\Psi(m+1,n) - \Psi(m,n+1))\Psi^+(m,n)\Omega(\gamma),\end{aligned}$$

$$\operatorname{res}_{Q^+} \Psi(m+1,n+1)\Psi^+(m,n)\Omega(\gamma) = -if(m,n)\operatorname{res}_{Q^+} \Psi(m,n+1)\Psi^+(m,n)\Omega(\gamma).$$

Дифференциал $\Psi(m,n+1)\Psi^+(m,n)\Omega(\gamma)$ имеет полюса в точках R_+, R_-, Q^+. По (2) оба вычета в R_+, R_- равны $\frac{1}{2}$, поэтому $\operatorname{res}_{Q^+} \Psi(m,n+1)\Psi^+(m,n)\Omega(\gamma) = -1$. Подставив этот результат в формулу выше, получим утверждение леммы.

Определение 1. Объединение α некоторого количества замкнутых кусочно-гладких кривых на Γ будем называть С-*контуром*, если

- α гомологичен тривиальному пути, т. е. разбивает Γ на две части и интеграл по α равен сумме вычетов;
- точки R_+ и R_- лежат по одну сторону относительно него, точки Q^+ и Q^- лежат по разные стороны относительно него, точки $P^\pm$ не лежат на нем;
- ориентация кривых фиксируется следующим условием:

$$\oint_\alpha dp_n = +2\pi. \tag{22}$$

По лемме 1 контур C_λ с правильно выбранной ориентацией почти при всех $\lambda \in \Gamma$ является С-контуром.

Лемма 4. *Пусть α является* С-*контуром. Тогда функция*

$$K(\mu,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu}) = \oint_\alpha \Psi_{\mu,\nu}(\gamma)\Psi^+_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}(\gamma)\Omega(\gamma) = \oint_\alpha \widetilde{\Omega}(\gamma,\mu,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu}) \tag{23}$$

обнуляется оператором L по переменным μ, ν. Кроме того, $K(\mu,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu}) = 0$ при $\mu - \nu = \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$.

Доказательство. Первое утверждение легко следует из $L\Psi_{\mu,\nu}(\gamma) \equiv 0$.

У подынтегрального дифференциала $\widetilde{\Omega}(\gamma,\mu,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu})$ при $\mu-\nu=\tilde{\mu}-\tilde{\nu}$ имеются только три полюса: R_+, R_- и либо Q^+, либо Q^- в зависимости от знака $\tilde{\mu}+\tilde{\nu}-\mu-\nu=\tilde{n}-n$. Из определений и (2) следует, что вычеты в R_+ и R_- у $\widetilde{\Omega}$ равны соответственно $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, как у Ω. Поэтому вычет в третьем полюсе равен нулю. Поскольку R_+ и R_- лежат по одну сторону относительно α и α гомологичен точке, то $\oint\limits_\alpha \widetilde{\Omega}(\gamma,\mu,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu})=0$, что и требовалось.

Теорема 2 (ненормализованная функция Грина по C-контуру). *Функция*

$$G_0(\mu,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu})=\frac{1}{4\pi}\operatorname{sgn}(\mu-\nu+\tilde{\nu}-\tilde{\mu})K(\mu,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu}) \tag{24}$$

удовлетворяет условию (16).

Доказательство. Пусть сначала $\mu-\nu\neq\tilde{\mu}-\tilde{\nu}$. Обозначим $\delta_m=(\mu-\nu)-(\tilde{\mu}-\tilde{\nu})$, $\delta_m\neq 0$, и $K(\mu,\nu)=K(\mu,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu})$. Тогда

$$\begin{gathered}4\pi(LG_0)_{\mu,\nu}=\operatorname{sgn}(\delta_m+1)a_{\mu,\nu}K(\mu+1,\nu)+\operatorname{sgn}(\delta_m-1)b_{\mu,\nu-1}K(\mu,\nu-1)\\+\operatorname{sgn}(\delta_m-1)a_{\mu-1,\nu}K(\mu-1,\nu)+\operatorname{sgn}(\delta_m-1)b_{\mu,\nu}K(\mu,\nu+1)-\operatorname{sgn}(\delta_m)c_{\mu,\nu}K(\mu,\nu).\end{gathered}$$

Равенство нулю правой части следует из леммы 4. Действительно, если sgn при каком-либо слагаемом обращается в нуль, то по лемме $K=0$. Поэтому sgn можно вынести за оператор L, т. е. $4\pi LG_0=\operatorname{sgn}(\delta_m)(LK)_{\mu,\nu}\equiv 0$.

Пусть $\mu-\nu=\tilde{\mu}-\tilde{\nu}$. Из леммы 4 следует $K(\mu,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu})=0$. Имеем

$$LG_0=\frac{1}{4\pi}(a_{\mu,\nu}K(\mu+1,\nu)+b_{\mu,\nu-1}K(\mu,\nu-1)-a_{\mu-1,\nu}K(\mu-1,\nu)-b_{\mu,\nu}K(\mu,\nu+1)). \tag{25}$$

Прибавим к правой части $LK\equiv 0$, слагаемые с минусами сократятся, а с плюсами умножатся на 2:

$$LG_0=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_\alpha a_{\mu,\nu}\widetilde{\Omega}(\gamma,\mu+1,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu})+b_{\mu,\nu-1}\widetilde{\Omega}(\gamma,\mu,\nu-1,\tilde{\mu},\tilde{\nu}). \tag{26}$$

Данный интеграл равен сумме вычетов ввиду гомологичности нулю C-контура α. Дифференциалы $\widetilde{\Omega}(\gamma,\mu+1,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu})$, $\widetilde{\Omega}(\gamma,\mu,\nu-1,\tilde{\mu},\tilde{\nu})$ имеют полюса в точках R_+, R_-, P^+, и каждый из них может иметь полюс в Q^+ или Q^- в зависимости от $\mu+\mu-\tilde{\mu}-\tilde{\nu}=n-\tilde{n}$. В точках R_+, R_- вычеты равны $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$. Следовательно, сумма вычетов во всех остальных полюсах равна 0.

Поскольку $R_\pm$ лежат по одну сторону относительно α, вместе они дают нулевой вклад. По лемме 2 вычет в точке P^+ суммы $\omega=a_{\mu,\nu}\widetilde{\Omega}(\gamma,\mu+1,\nu,\tilde{\mu},\tilde{\nu})+b_{\mu,\nu-1}\widetilde{\Omega}(\gamma,\mu,\nu-1,\tilde{\mu},\tilde{\nu})$ равен нулю, поэтому P^+ также не влияет на итоговую сумму.

Если $\mu+\mu\neq\tilde{\mu}+\tilde{\nu}$, то у ω ровно четыре полюса. Следовательно, и в четвертом полюсе у этой суммы вычет равен нулю, что доказывает $LG_0=0$.

Итак, остался случай, когда $\mu=\tilde{\mu}$, $\nu=\tilde{\nu}$. Перейдем от интегралов к вычетам. По сказанному выше полюса $R_\pm$, P^+ дают нулевой вклад. В точках Q^+, Q^- у ω полюса первого порядка. Поскольку они лежат по разные стороны относительно α, в результат нужно включить любой из них. Из ориентации контура (22) множитель для вычета в Q^+ равен $-2\pi i$. Используя лемму 3, имеем

$$LG_0=-i\operatorname{res}_{Q^+}\omega=-i\operatorname{res}_{Q^+}a_{\mu,\nu}\widetilde{\Omega}(\mu+1,\nu,\mu,\nu)=-i^2=1. \tag{27}$$

Получили, что G_0 удовлетворяет (16), что и требовалось.

Пример 3. В случае сферы из предыдущих примеров в качестве С-контура можно взять малую окружность O_ε с центром в $Q^+ = i$, ориентированную по часовой стрелке. Для краткости будем использовать обозначения $m = \mu - \nu$, $\nu = \mu + \nu$, $(m+n)$ четное. Функция G_0 имеет вид

$$G_0(m,n,\tilde m,\tilde n) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{O_\varepsilon}\operatorname{sgn}(m-\tilde m)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{m-\tilde m}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{n-\tilde n}\left(-\frac{dz}{2z}\right).$$

Предположим, что $\tilde m = \tilde n = 0$. Согласно ориентации O_ε вычет в точке i входит в правую часть со знаком минус:

$$G_0(m,n,0,0) = \frac{i}{2}\operatorname{sgn}(m)\operatorname{res}_{z=i}\left[\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n\frac{dz}{2z}\right].$$

Очевидно, что $G_0(m,n,0,0) = 0$ при $n \ge 0$. Прямым вычислением получается

$$G_0(m,-1,0,0) = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(m)(-i)^{m+1}, \quad G_0(m,-2,0,0) = -\operatorname{sgn}(m)m(-i)^m.$$

Из формулы для $G_0(m,n,0,0)$ видно, что рост G_0 не ограничен экспонентой и условие (18) не выполняется.

4.2. Нормализованная функция Грина. Рассмотрим уже упоминавшееся семейство $C_\lambda = \{\gamma : \operatorname{Im} p_n(\gamma) = \operatorname{Im} p_n(\lambda)\}$. Как отмечено выше, C_λ регулярно почти при всех $\lambda \in \Gamma$. Следовательно, при $\alpha = C_\lambda$ функция G_0 из теоремы 2 удовлетворяет (16).

Рассмотрим функцию

$$Z(\lambda,\mu,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{C_\lambda}\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} p_m(\lambda) - \operatorname{Im} p_m(\gamma))\Psi_{\mu,\nu}(\gamma)\Psi^+_{\tilde\mu,\tilde\nu}(\gamma)\Omega(\gamma).$$

Поскольку путь интегрирования не зависит от дискретных параметров, $LZ = 0$. Прибавим Z к построенной G_0. Следующая теорема утверждает, что полученная функция искомая. Чтобы не загромождать выкладки, формулируем ее с использованием обеих координатных систем μ, ν и $m = \mu - \nu$, $n = \mu + \nu$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда функция*

$$G(\lambda,\mu,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{C_\lambda}(\operatorname{sgn}(m-\tilde m) + \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} p_m(\lambda) - \operatorname{Im} p_m(\gamma)))\Psi_{\mu,\nu}(\gamma)\Psi^+_{\tilde\mu,\tilde\nu}(\gamma)\Omega(\gamma) \quad (28)$$

является функцией Грина оператора L и почти при всех $\lambda \in \Gamma$ для нее выполняется условие на рост (18).

Доказательство. Фиксируем λ. Как отмечено выше, $G = G_0 + Z$, где в качестве α взят контур C_λ. Поэтому G очевидным образом удовлетворяет условию (16).

Обозначим через C'_λ множество C_λ без неподвижных точек инволюции τ. Поскольку последнее имеет в C_λ меру нуль, от замены C_λ на C'_λ интеграл (28) не изменится. Для точек C'_λ уже справедлива теорема 1. Оценим интеграл (28) стандартным способом:

$$|G(\lambda,\mu,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu)| \le \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{C_\lambda}|\Omega(\gamma)| \times \sup_{\gamma\in C'_\lambda}|(\operatorname{sgn}(m-\tilde m) + \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} p_m(\lambda) - \operatorname{Im} p_m(\gamma)))\Psi_{\mu,\nu}(\gamma)\Psi^+_{\tilde\mu,\tilde\nu}(\gamma)\Omega(\gamma)|.$$

Вспомним условия на рост волновой функции (14) и двойственной к ней (15):

$$|\Psi_{\mu,\nu}(\gamma)| \le R(\gamma)e^{m \operatorname{Im} p_n(\gamma) + n \operatorname{Im} p_n(\gamma)},$$

$$|\Psi^{+}_{\tilde\mu,\tilde\nu}(\gamma)| \le R(\sigma\gamma)e^{-\tilde m \operatorname{Im} p_m(\gamma) - \tilde n \operatorname{Im} p_n(\gamma)}.$$

Из $\gamma \in C_\lambda$ имеем $\operatorname{Im} p_n(\gamma) = \operatorname{Im} p_n(\lambda)$. Пусть $m > \tilde m$, тогда нетривиален случай $\operatorname{Im} p_m(\gamma) \le \operatorname{Im} p_m(\lambda)$, в котором $\exp((m-\tilde m)\operatorname{Im} p_m(\gamma)) \le \exp((m-\tilde m)\operatorname{Im} p_m(\lambda))$. Пусть $m < \tilde m$, тогда $\operatorname{Im} p_m(\gamma) \ge \operatorname{Im} p_n(\lambda)$ и это же неравенство снова справедливо.

Из проведенных рассуждений вытекает, что искомое неравенство (18) выполняется при

$$R_1(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_\lambda} |\Omega(\gamma)| \sup_{\gamma \in C'_\lambda} (2R(\gamma)R(\sigma\gamma)). \tag{29}$$

Выражаю большую благодарность П. Г. Гриневичу за постановку задачи и ценные советы по поводу ее решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Манаков С. В.* Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31, № 5. С. 245–246.
2. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Уравнение Шрёдингера в периодическом поле и римановы поверхности // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. С. 15–18.
3. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 1. С. 20–24.
4. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 4. С. 784–788.
5. *Кричевер И. М.* Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 1. С. 31–36.
6. *Doliwa A., Grinevich P., Nieszporski M., Santini P. M.* Integrable lattices and their sublattices: from the discrete Moutard (discrete Cauchy–Riemann) 4-point equation to the self-adjoint 5-point scheme // J. Math. Phys. 2007. V. 48, N 1.
7. *Fay J.* Theta functions on Riemann surfaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1973. (Lect. Notes Math.; V. 352).
8. *Grushevsky S., Krichever I.* Integrable discrete Schrödinger equations and a characterization of Prym varieties by a pair of quadrisecants // Duke Math. J. 2010. V. 152, N 2. P. 317–371.
9. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31, № 1. С. 55–136.
10. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов // Функцион. анализ и его прил. 1987. Т. 21, № 2. С. 46–63.
11. *Гриневич П. Г.* Быстроубывающие потенциалы на фоне конечнозонных и $\bar\partial$-проблема на римановых поверхностях // Функцион. анализ и его прил. 1989. Т. 23, № 4. С. 79–80.

Статья поступила 4 февраля 2013 г.

Василевский Борис Олегович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова, Москва 119234;
Лаборатория геометрических методов математической физики
имени Н. Н. Боголюбова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, главное здание МГУ, Москва 119991
vasilevskiy.boris@gmail.com