*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6*

*УДК 512.543*

# О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ HNN–РАСШИРЕНИЙ И ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА

**Д. Н. Азаров**

**Аннотация.** Для некоторых HNN-расширений и обобщенных свободных произведений разрешимых минимаксных групп получены необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости.

**Ключевые слова:** HNN-расширение группы, обобщенное свободное произведение, разрешимая группа, финитная аппроксимируемость, почти аппроксимируемость конечными $p$-группами.

## 1. Введение

Пусть $\mathscr{K}$ — абстрактный класс групп. Напомним, что группа $G$ называется *аппроксимируемой группами из класса* $\mathscr{K}$ (или, короче, $\mathscr{K}$*-аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента $a$ группы $G$ существует гомоморфизм группы $G$ на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$, при котором образ элемента $a$ отличен от 1. Группа $G$ называется *почти* $\mathscr{K}$*-аппроксимируемой*, если она содержит $\mathscr{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса. Вообще, группа обладает каким-либо свойством почти, если она содержит подгруппу конечного индекса с этим свойством.

Если $\mathscr{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathscr{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также более тонкое свойство $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости, где $p$ — некоторое простое число, $\mathscr{F}_p$ — класс всех конечных $p$-групп.

Очевидно, что произвольная $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемая группа является почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой. С другой стороны, любая почти $\mathscr{F}$-аппроксимируемая (и, в частности, любая почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемая) группа является $\mathscr{F}$-аппроксимируемой. Таким образом, свойство почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости является промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемостью.

В 1952 г. Гирш [1] доказал, что любая полициклическая группа финитно аппроксимируема. Этот результат был усилен в работе А. Л. Шмелькина [2], где доказана почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемость полициклической группы для произвольного простого $p$.

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой минимаксной группы. Напомним, что группа называется *минимаксной*, если в ней существует субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию минимальности или условию максимальности для подгрупп. Известно, что разрешимая группа удовлетворяет условию максимальности (минимальности) тогда и только тогда, когда она является полициклической группой (конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп). Поэтому разрешимые минимаксные группы могут быть охарактеризованы как группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой.

Элемент $a$ группы $G$ называется *полным*, если для любого целого положительного числа $n$ уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе $G$. Группа $G$ называется *полной* (или, в другой терминологии, *радикабельной*), если все ее элементы полны. Группа $G$ называется *редуцированной*, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Очевидно, что любая финитно аппроксимируемая группа является редуцированной. С другой стороны, известно (см., например, [3, п. 5.3.9]), что если разрешимая минимаксная группа редуцирована, то она почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых $p$. Таким образом, для разрешимой минимаксной группы условие редуцированности равносильно условию финитной аппроксимируемости.

Примерами редуцированных разрешимых минимаксных групп являются все полициклические группы, а также разрешимые группы Баумслага — Солитэра $G(1,n) = (a, b; b^{-1}ab = a^n)$, где $n$ — ненулевое целое число. Для доказательства редуцированности и минимаксности группы $G(1,n)$ достаточно заметить, что она представляет собой расширение аддитивной группы $n$-ичных дробей с помощью бесконечной циклической группы. Как и любая редуцированная разрешимая минимаксная группа $G(1,n)$ финитно аппроксимируема и почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых $p$. Более точно, группа $G(1,n)$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $p$ не делит $n$. Это утверждение является частью доказанной ниже теоремы 2.

Пусть $G$ — группа, $H$ и $K$ — подгруппы группы $G$, $\varphi$ — изоморфизм подгруппы $H$ на подгруппу $K$. Пусть

$$G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$$

— HNN-расширение группы $G$ с подгруппами $H$ и $K$, связанными относительно изоморфизма $\varphi$. Если хотя бы одна из связанных подгрупп $H$ или $K$ совпадает с группой $G$, то группа $G^*$ называется *нисходящим* HNN-*расширением группы* $G$.

В 2003 г. Вайс и Су в [4] доказали следующий результат. Нисходящее HNN-расширение почти полициклической группы является финитно аппроксимируемой группой.

Существенным обобщением этой теоремы является следующий результат Ремтуллы и Ширвани, доказанный в [5]. Нисходящее HNN-расширение редуцированной почти разрешимой минимаксной группы является финитно аппроксимируемой группой.

Здесь мы обобщаем и усиливаем приведенные выше результаты следующим образом.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — редуцированная почти разрешимая минимаксная группа, и пусть $G^*$ — HNN-расширение группы $G$ со связанными подгруппами $H$ и $K$, причем $H$ и $K$ являются подгруппами конечных индексов группы $G$. Тогда следующие три утверждения равносильны между собой:*

(1) *группа $G^*$ финитно аппроксимируема;*

(2) *или* $H = G$, *или* $K = G$, *или в группе* $G$ *существует подгруппа* $L$ *конечного индекса, нормальная в* $G^*$;

(3) *группа* $G^*$ *почти* $\mathscr{F}_p$*-аппроксимируема для всех достаточно больших простых* $p$.

Легко видеть, что если HNN-расширение почти разрешимой минимаксной группы $G$ является нисходящим, т. е. если хотя бы одна из связанных подгрупп $H$ или $K$ совпадает с группой $G$, то другая связанная подгруппа имеет в группе $G$ конечный индекс. Поэтому отмеченный выше результат Ремтуллы и Ширвани является частным случаем теоремы 1.

Другим частным случаем теоремы 1 является следующий результат Андреадакиса, Раптиса и Варсоса, доказанный в [6]. Если $G$ — конечно порожденная абелева группа, $H$ и $K$ — изоморфные подгруппы конечных индексов группы $G$, то группа $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$ тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда или $H = G$, или $K = G$, или в группе $G$ существует подгруппа $L$ конечного индекса, нормальная в $G^*$.

Важным примером HNN-расширения является группа Баумслага — Солитэра

$$G(m, n) = (a, b; b^{-1}a^m b = a^n),$$

где $m$ и $n$ — ненулевые целые числа. Эта группа представляет собой HNN-расширение бесконечной циклической группы $G = (a)$ со связанными подгруппами $H = (a^m)$ и $K = (a^n)$. Легко видеть, что для данного HNN-расширения условие (2) из теоремы 1 равносильно тому, что или $|m| = 1$, или $|n| = 1$, или $|m| = |n|$. Поэтому очевидным следствием теоремы 1 (а также отмеченного выше результата Андреадакиса, Раптиса и Варсоса) является следующий результат Баумслага, Солитэра [7] и Мескина [8]. Группа $G(m, n)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $|m| = 1$, или $|n| = 1$, или $|m| = |n|$.

Из теоремы 1 также следует, что если группа $G(m, n)$ финитно аппроксимируема, то она почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых $p$. Здесь получено следующее описание множества всех простых $p$, для которых финитно аппроксимируемая группа $G(m, n)$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.

**Теорема 2.** *Если* $|m| = 1$, *то группа* $G(m, n)$ *почти* $\mathscr{F}_p$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда* $p$ *не делит* $n$. *Если* $|n| = 1$, *то группа* $G(m, n)$ *почти* $\mathscr{F}_p$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда* $p$ *не делит* $m$. *Если* $|m| = |n|$, *то группа* $G(m, n)$ *почти* $\mathscr{F}_p$*-аппроксимируема для любого простого числа* $p$.

Напомним, что группа $G$ называется *группой конечного общего ранга*, если существует целое положительное число $r$ такое, что любое конечное множество элементов группы $G$ содержится в некоторой ее $r$-порожденной подгруппе. Это понятие введено А. И. Мальцевым в [9]. Условию конечности общего ранга удовлетворяют все конечно порожденные группы, а также все почти разрешимые минимаксные группы.

Рассмотрим теперь некоторые обобщения приведенных выше результатов на случай, когда база HNN-расширения является группой конечного общего ранга.

Прежде всего заметим, что нисходящее HNN-расширение $G^* = (G, t; t^{-1}Gt = K)$ финитно аппроксимируемой группы $G$ конечного общего ранга не обязано быть финитно аппроксимируемой группой, даже если индекс $[G : K]$ конечен.

Действительно, если $G$ — группа рациональных дробей, знаменатели которых взаимно просты с фиксированным простым числом $p$, $K = pG$, а изоморфизм $\varphi$ ставит в соответствие каждому $x$ из $G$ число $px$ из $K$, то $G$ — финитно аппроксимируемая группа ранга 1, индекс $[G : K]$ конечен и равен $p$, но группа $G^*$ не является финитно аппроксимируемой, так как содержит подгруппу, изоморфную аддитивной группе рациональных чисел.

Этот пример показывает, что для получения достаточного условия финитной аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения группы $G$ конечного общего ранга мы должны на базовую группу $G$ помимо условия финитной аппроксимируемости накладывать еще некоторые дополнительные ограничения. Одним из таких ограничений является почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемость группы $G$ для всех достаточно больших простых $p$. Накладывая это ограничение, получаем следующий результат, который представляет собой обобщение теоремы 1.

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — группа конечного общего ранга, удовлетворяющая нетривиальному тождеству и являющаяся почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой для всех достаточно больших простых $p$. Пусть $G^*$ — HNN-расширение группы $G$ со связанными подгруппами $H$ и $K$, причем $H$ и $K$ являются подгруппами конечных индексов группы $G$. Тогда следующие три утверждения равносильны между собой:*

(1) *группа $G^*$ финитно аппроксимируема;*

(2) *или $H = G$, или $K = G$, или в группе $G$ существует подгруппа $L$ конечного индекса, нормальная в $G^*$;*

(3) *группа $G^*$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых $p$.*

Так как любая редуцированная почти разрешимая минимаксная группа имеет конечный общий ранг, удовлетворяет нетривиальному тождеству и является почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой для всех достаточно больших простых $p$, теорема 3 является обобщением теоремы 1.

Помимо редуцированных разрешимых минимаксных групп существует много других примеров групп конечного общего ранга, которые почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы для всех достаточно больших простых $p$. Этим свойством обладают конечно порожденные линейные группы над полями нулевой характеристики (см., например, [10]), а также конечные расширения конечно порожденных свободных разрешимых групп [11]. Поэтому область применения теоремы 3 значительно шире, чем для теоремы 1. Тем не менее остается не исследованным вопрос о финитной аппроксимируемости HNN-расширения $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$, где $G$ — произвольная финитно аппроксимируемая группа конечного общего ранга с нетривиальным тождеством, $H$ и $K$ — подгруппы конечных индексов группы $G$. В случае, когда HNN-расширение не является нисходящим, ответ на поставленный выше вопрос содержится в следующей теореме.

**Теорема 4.** *Пусть $G$ — финитно аппроксимируемая (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемая) группа конечного общего ранга с нетривиальным тождеством. Пусть $G^*$ — HNN-расширение группы $G$ со связанными подгруппами $H$ и $K$, причем $H$ и $K$ являются собственными подгруппами конечных индексов группы $G$. Группа $G^*$ тогда и только тогда финитно аппроксимируема (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема), когда в группе $G$ существует подгруппа $L$ конечного индекса, нормальная в $G^*$.*

Аналогичное утверждение получено нами и для обобщенных свободных произведений групп.

**Теорема 5.** *Пусть $A$ и $B$ — финитно аппроксимируемые (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемые) группы конечного общего ранга с нетривиальными тождествами. Пусть $P$ — свободное произведение групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$, причем $H$ является собственной подгруппой конечного индекса в каждой из групп $A$ и $B$. Группа $P$ тогда и только тогда финитно аппроксимируема (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема), когда в группе $H$ существует подгруппа $L$ конечного индекса, нормальная в $P$.*

Несложные примеры показывают, что обобщенное свободное произведение двух конечных $p$-групп и HNN-расширение конечной $p$-группы не обязаны быть $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемыми группами. Поэтому в теоремах 4 и 5 условие почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости не может быть заменено условием $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости.

В качестве следствия из теоремы 5 отметим следующее утверждение.

**Следствие.** *Пусть $A$ и $B$ — редуцированные почти разрешимые минимаксные группы. Пусть $P$ — свободное произведение групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$, причем $H$ является собственной подгруппой конечного индекса в каждой из групп $A$ и $B$. Тогда следующие три утверждения равносильны между собой:*

1) *группа $P$ финитно аппроксимируема;*

2) *в группе $H$ существует подгруппа $L$ конечного индекса, нормальная в $P$;*

3) *группа $P$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых $p$.*

Так как теорема 1 является частным случаем теоремы 3, в доказательствах нуждаются только теоремы 2–5. Для доказательства этих теорем нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

## 2. Вспомогательные утверждения

Следующее утверждение является обобщением классической теоремы М. Холла, утверждающей, что конечно порожденная группа может содержать только конечное число подгрупп данного конечного индекса.

**Предложение 1.** *Группа конечного общего ранга может содержать только конечное число подгрупп данного конечного индекса.*

Доказательство. Пусть $A$ — произвольная группа, $s$ — целое положительное число. Через $n(A,s)$ будем обозначать число всех подгрупп группы $A$ индекса $s$, а через $N(A,s)$ — число всех подгрупп группы $A$, индекс которых не превосходит $s$.

Пусть $H$ — конечно порожденная группа с не более чем $r$ образующими. Тогда число $n(H,s)$ конечно и $n(H,s) \le (s!)^r$ (см., например, [12, с. 250]). Поэтому

$$N(H,s) \le f(r,s), \tag{1}$$

где $f(r,s) = \sum\limits_{k=1}^{s} (k!)^r$.

Пусть $G$ — группа конечного общего ранга $r$. Покажем, что число $n(G,s)$ конечно и не превосходит $f(r,s)$. Допустим противное. Тогда в $G$ существуют попарно различные подгруппы $G_1, G_2, \dots, G_m$ индекса $s$, где $m > f(r,s)$. Так как все $G_i$ имеют в группе $G$ один и тот же конечный индекс $s$, для любых различных $i, j \in \{1, \dots, m\}$ подгруппа $G_i$ не содержится в $G_j$, поэтому можно зафиксировать элемент

$$a_{ij} \in G_i \setminus G_j. \tag{2}$$

Поскольку общий ранг группы $G$ равен $r$, в $G$ существует подгруппа $H$ с не более чем $r$ образующими, содержащая все $a_{ij}$. Тогда для $H$ выполняется неравенство (1). С другой стороны, из (2) следует, что подгруппы $H_1, H_2, \dots, H_m$, высекаемые в $H$ подгруппами $G_1, G_2, \dots, G_m$, попарно различны и, кроме того, $[H : H_i] \leq [G : G_i] = s$ для любого $i \in \{1, \dots, m\}$. Поэтому $N(H, s) \geq m > f(r, s)$; противоречие неравенству (1). Тем самым число $n(G, s)$ конечно и не превосходит $f(r, s)$.

**Предложение 2.** *Если группа $G$ конечного общего ранга финитно аппроксимируема ($\mathscr{F}_p$-аппроксимируема), то для каждого неединичного элемента $a$ группы $G$ существует характеристическая подгруппа $N$ группы $G$ конечного индекса (конечного $p$-индекса), не содержащая элемента $a$.*

Доказательство. Так как $G$ финитно аппроксимируема ($\mathscr{F}_p$-аппроксимируема) и $a \neq 1$, в $G$ существует нормальная подгруппа $H$ конечного индекса (конечного $p$-индекса), не содержащая элемента $a$. Пусть $N$ — пересечение всех нормальных подгрупп группы $G$, индекс которых совпадает с $[G : H]$. По предложению 1 число таких подгрупп конечно. Поэтому $N$ — подгруппа конечного индекса (конечного $p$-индекса) группы $G$. Очевидно, что $N$ — характеристическая подгруппа и $a \notin N$. Предложение доказано.

Для произвольной группы $A$ через $A'$ будем обозначать коммутант группы $A$, а через $A^n$ — степенную подгруппу группы $A$, где $n$ — целое неотрицательное число. Если $A$ — конечная $p$-группа, то ее подгруппа $A'A^p$, очевидно, совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы $A$.

**Предложение 3.** *Пусть $A$ — конечная $p$-группа, $\Gamma$ — подгруппа в группе всех автоморфизмов группы $A$. Если все автоморфизмы из $\Gamma$ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, то $\Gamma$ является $p$-группой.*

Этот результат Ф. Холла хорошо известен (см., например, [13, с. 562]).

Напомним, что $G$ называется *расщепляемым расширением* группы $A$ с помощью группы $B$, если $A$ — нормальная подгруппа группы $G$, $B$ — подгруппа группы $G$, $A \cap B = 1$ и $G = AB$.

**Предложение 4.** *Пусть $G$ — расщепляемое расширение группы $A$ с помощью группы $B$.*

1. *Если группа $A$ конечна, а группа $B$ финитно аппроксимируема, то и группа $G$ финитно аппроксимируема.*

2. *Если $A$ — конечная $p$-группа, группа $B$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема и взаимный коммутант $[B, A]$ подгрупп $B$ и $A$ содержится в подгруппе $A'A^p$, то и группа $G$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. 1. Пусть группа $A$ конечна, а группа $B$ финитно аппроксимируема. Тогда $B$ — подгруппа конечного индекса группы $G$. Таким образом, группа $G$ содержит финитно аппроксимируемую подгруппу конечного индекса. Поэтому группа $G$ финитно аппроксимируема.

2. Пусть $A$ — конечная $p$-группа, группа $B$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема и $[B, A] \subseteq A'A^p$.

Для каждого элемента $x$ из $G$ через $\hat{x}$ будем обозначать внутренний автоморфизм группы $G$, действующий по правилу: $g\hat{x} = x^{-1}gx$ для любого элемента $g$ группы $G$. Пусть $\mathrm{Aut}_{B}(A) = \{\hat{x}|_{A} : x \in B\}$ — множество ограничений на подгруппу $A$ всех внутренних автоморфизмов группы $G$, производимых элементами из $B$. Это множество является подгруппой в группе всех автоморфизмов группы $A$. Так как $[B, A] \subseteq A'A^{p}$, все автоморфизмы из $\mathrm{Aut}_{B}(A)$ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^{p}$. Поэтому в силу предложения 3 $\mathrm{Aut}_{B}(A)$ — конечная $p$-группа.

Пусть $\theta : B \to \mathrm{Aut}_{B}(A)$ — гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу $b$ из $B$ ограничение на подгруппу $A$ соответствующего ему внутреннего автоморфизма $\hat{b}$ группы $G$. Пусть $H = \mathrm{Ker}\,\theta$. Так как $\mathrm{Aut}_{B}(A)$ — конечная $p$-группа, то $H$ — нормальная подгруппа группы $B$ конечного $p$-индекса. Кроме того, индекс подгруппы $B$ в группе $G$ равен порядку подгруппы $A$ и, следовательно, является степенью числа $p$. В силу последних двух обстоятельств $H$ — подгруппа конечного $p$-индекса группы $G$. Заметим, что подгруппа $H$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема, поскольку содержится в группе $B$. Заметим еще, что подгруппа $H$ нормальна в группе $G$, так как она поэлементно перестановочна с подгруппой $A$ и нормальна в подгруппе $B$.

Таким образом, группа $G$ является расширением $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы $H$ с помощью конечной $p$-группы $G/H$. Отсюда следует, что группа $G$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.

**Предложение 5.** *Пусть $G$ — расщепляемое расширение группы $A$ конечного общего ранга с помощью группы $B$.*

1. *Если группы $A$ и $B$ финитно аппроксимируемы, то и группа $G$ финитно аппроксимируема.* (*Это утверждение обобщает аналогичный результат* А. И. Мальцева [14], *доказанный для случая, когда $A$ — конечно порожденная группа.*)

2. *Если группы $A$ и $B$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы и $[B, A] \subseteq A'A^{p}$, то и группа $G$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.*

3. *Если группы $A$ и $B$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы, то группа $G$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.*

4. *Если группы $A$ и $B$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы, то и группа $G$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Докажем сначала утверждения 1 и 2. Пусть группы $A$ и $B$ финитно аппроксимируемы ($\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы, причем $[B, A] \subseteq A'A^{p}$). Для доказательства финитной аппроксимируемости ($\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости) группы $G$ достаточно для каждого ее неединичного элемента $g$ указать нормальную подгруппу $N$ группы $G$, не содержащую элемента $g$ и такую, что фактор-группа $G/N$ финитно аппроксимируема ($\mathscr{F}_p$-аппроксимируема). Если $g \notin A$, то в качестве $N$ можно взять $A$, так как $G/A \cong B$ — финитно аппроксимируемая ($\mathscr{F}_p$-аппроксимируемая) группа. Если же $g \in A$, то по предложению 2 в группе $A$ существует характеристическая подгруппа $N$ конечного индекса (конечного $p$-индекса), не содержащая элемента $g$. Так как $N$ характеристична в $A$ и $A$ нормальна в $G$, то $N$ нормальна в $G$. Поэтому нам остается доказать финитную аппроксимируемость ($\mathscr{F}_p$-аппроксимируемость) группы $G/N$. Группа $G/N$ является расщепляемым расширением конечной группы (конечной $p$-группы) $A/N$ с помощью финитно аппроксимируемой ($\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой) группы $BN/N \cong B$, причем если $[B, A] \subseteq A'A^{p}$, то $[BN/N, A/N] \subseteq (A/N)'(A/N)^{p}$.

Поэтому в силу предложения 4 группа $G/N$ финитно аппроксимируема ($\mathscr{F}_p$-аппроксимируема).

Докажем утверждение 3. Пусть группы $A$ и $B$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы. Пусть $\omega : B \to \operatorname{Aut} A/A'A^p$ — гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу $b$ из $B$ автоморфизм $\tilde{b}$ группы $A/A'A^p$, действующий по правилу

$$(aA'A^p)\tilde{b} = b^{-1}abA'A^p,$$

где $a \in A$. Обозначим через $C$ ядро гомоморфизма $\omega$. Очевидно, что $[C, A] \subseteq A'A^p$ и группа $H = AC$ является расщепляемым расширением группы $A$ с помощью группы $C$. Поэтому в силу уже доказанного второго утверждения предложения 5 группа $H$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема. Так как $A$ — группа конечного общего ранга, группа $A/A'A^p$ конечна. Отсюда и из того, что фактор-группа $B/C$ изоморфна некоторой подгруппе группы $\operatorname{Aut} A/A'A^p$, следует, что $C$ — подгруппа конечного индекса группы $B$. Тем самым $H$ является подгруппой конечного индекса группы $G$ и из $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости группы $H$ вытекает почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемость группы $G$.

Докажем утверждение 4. Пусть группы $A$ и $B$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы. Покажем, что группа $G$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема. Обозначим через $A_1$ и $B_1$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемые подгруппы конечных индексов групп $A$ и $B$ соответственно. Ввиду предложения 1 можно считать, что подгруппа $A_1$ характеристична в $A$ и поэтому нормальна в $G$. Подгруппа $G_1 = A_1B_1$, очевидно, имеет конечный индекс в $G$ и является расщепляемым расширением группы $A_1$ с помощью группы $B_1$, причем $A_1$ имеет конечный общий ранг как подгруппа конечного индекса группы $A$ конечного общего ранга. Поэтому в силу уже доказанного утверждения 3 группа $G_1$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема, и поскольку $[G : G_1] < \infty$, группа $G$ также почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.

**Предложение 6.** *Пусть $L$ — нормальная подгруппа конечного общего ранга группы $G$. Пусть фактор-группа $G/L$ содержит свободную подгруппу $H/L$ конечного индекса. Если группа $L$ финитно аппроксимируема (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема), то и группа $G$ финитно аппроксимируема (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема).*

Доказательство. Хорошо известно и легко проверяется, что любое расширение с помощью свободной группы расщепляемо. Поэтому группа $H$ является расщепляемым расширением группы $L$ с помощью свободной группы $F$. Предположим, что группа $L$ финитно аппроксимируема (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема). Так как любая свободная группа финитно аппроксимируема и даже $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема, в силу предложения 5 группа $H$ финитно аппроксимируема (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема). Поскольку $H$ является подгруппой конечного индекса группы $G$, и группа $G$ финитно аппроксимируема (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема).

**Предложение 7.** *Пусть $G$ — группа, $H$ — подгруппа конечного индекса группы $G$ и $\Omega$ — некоторое семейство нормальных подгрупп группы $G$ такое, что пересечение любых двух подгрупп из $\Omega$ принадлежит $\Omega$. Пусть $\bigcap\limits_{M\in\Omega} HM = H$. Тогда в $\Omega$ существует подгруппа $U$ такая, что $U \leq H$.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — система представителей левых смежных классов группы $G$ по подгруппе $H$. Тогда множество

$$X = \{x_i^{-1}x_j \mid i, j = 1, \ldots, m;\ i \neq j\}$$

не пересекается с подгруппой $H$. Отсюда и из того, что $\bigcap\limits_{M\in\Omega} HM = H$, следует, что для любого элемента $x$ из $X$ найдется подгруппа $M_x$ из $\Omega$ такая, что $x \notin HM_x$. Подгруппа $U = \bigcap\limits_{x\in X} M_x$ принадлежит семейству $\Omega$. Пусть $x$ — произвольный элемент из $X$. Тогда $x \notin HM_x$, поэтому $x \notin HU$. Таким образом, множество $X$ не пересекается с подгруппой $HU$, т. е. элементы $x_1, \dots, x_m$ попарно не сравнимы слева по модулю $HU$. Отсюда следует, что $[G : HU] \geq m = [G : H]$. Это неравенство может выполняться только в случае, когда $HU = H$, т. е. когда $U \leq H$.

**Предложение 8.** *Пусть $P$ — HNN-расширение конечной группы $G$ (обобщенное свободное произведение конечных групп $A$ и $B$). Тогда группа $P$ содержит свободную подгруппу $F$ конечного индекса.*

Доказательство. Согласно [15, 16] группа $P$ финитно аппроксимируема. Поэтому существует гомоморфизм группы $P$ на конечную группу, инъективный на конечной подгруппе $G$ (на конечных подгруппах $A$ и $B$). Ядро $F$ этого гомоморфизма является подгруппой конечного индекса в группе $P$. Так как $F$ пересекается по единице со всеми подгруппами группы $P$, сопряженными с $G$ (с $A$ и $B$), по теореме Х. Нейман [17, с. 288] подгруппа $F$ свободная.

## 3. Доказательство теоремы 4

Пусть $G$ — группа, $H$ и $K$ — подгруппы группы $G$ и $\varphi$ — изоморфизм подгруппы $H$ на подгруппу $K$. Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$ — HNN-расширение группы $G$ с подгруппами $H$ и $K$, связанными относительно изоморфизма $\varphi$. Подгруппу $M$ группы $G$ будем называть *$\varphi$-совместимой*, если $(M \cap H)\varphi = M \cap K$. Обозначим через $\Omega$ множество всех нормальных $\varphi$-совместимых подгрупп конечного индекса группы $G$. Введенные обозначения считаются фиксированными в этом разделе.

В [15] доказано, что если

$$\bigcap_{M\in\Omega} M = 1, \quad \bigcap_{M\in\Omega} HM = H, \quad \bigcap_{M\in\Omega} KM = K,$$

то группа $G^*$ финитно аппроксимируема. Очевидно, что если группа $G^*$ финитно аппроксимируема, то $\bigcap\limits_{M\in\Omega} M = 1$. В [18] доказаны следующие два утверждения.

1. Пусть подгруппа группы $G$, порожденная подгруппами $H$ и $K$, строго содержится в некоторой подгруппе группы $G$ с нетривиальным тождеством. Если группа $G^*$ финитно аппроксимируема, то $\bigcap\limits_{M\in\Omega} HM = H$ и $\bigcap\limits_{M\in\Omega} KM = K$.

2. Пусть подгруппа группы $G$, порожденная подгруппами $H$ и $K$, удовлетворяет нетривиальному тождеству. Пусть ни одна из подгрупп $H$ и $K$ не содержится в другой. Если группа $G^*$ финитно аппроксимируема, то $\bigcap\limits_{M\in\Omega} HM = H$ и $\bigcap\limits_{M\in\Omega} KM = K$.

Таким образом, имеет место

**Лемма 1.** *Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$, группа $G$ удовлетворяет нетривиальному тождеству, $H$ и $K$ — собственные подгруппы группы $G$. Группа $G^*$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\bigcap\limits_{M\in\Omega} M = 1$, $\bigcap\limits_{M\in\Omega} HM = H$ и $\bigcap\limits_{M\in\Omega} KM = K$.*

**Лемма 2.** *Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$, группа $G$ удовлетворяет нетривиальному тождеству, $H$ и $K$ — собственные подгруппы конечных индексов группы $G$. Пусть группа $G^*$ финитно аппроксимируема. Тогда в группе $G$ существует подгруппа $L$ конечного индекса, нормальная в $G^*$.*

Доказательство. По лемме 1 $\bigcap\limits_{M\in\Omega} HM = H$ и $\bigcap\limits_{M\in\Omega} KM = K$. Очевидно также, что пересечение любых двух подгрупп из $\Omega$ принадлежит $\Omega$. Поэтому в силу предложения 7 в $\Omega$ существуют подгруппы $U$ и $V$ такие, что $U \le H$ и $V \le K$. Тогда подгруппа $L = U \cap V$ принадлежит $\Omega$, т. е. $L$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $G$ и $(L \cap H)\varphi = L \cap K$. Так как $L \le H$ и $L \le K$, последнее равенство принимает вид $L\varphi = L$, т. е. $t^{-1}Lt = L$. Отсюда следует, что $L$ нормальна не только в $G$, но и в $G^*$. Лемма доказана.

Если $M \in \Omega$, то можно рассматривать HNN-расширение $G^*_M$ группы $G/M$ с подгруппами $HM/M$ и $KM/M$, связанными относительно изоморфизма $\varphi_M$, который определен по правилу $(hM)\varphi_M = h\varphi M$, где $h \in H$. Группа $G^*_M$ представляет собой фактор-группу группы $G^*$ по нормальному замыканию подгруппы $M$. В частности, если $M$ нормальна в $G^*$, то $G^*_M$ совпадает с фактор-группой группы $G^*$ по подгруппе $M$.

**Лемма 3.** *Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$, группа $G$ имеет конечный общий ранг и содержит подгруппу $L$ конечного индекса, нормальную в $G^*$. Если группа $G$ финитно аппроксимируема (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема), то и группа $G^*$ финитно аппроксимируема (почти $\mathscr{F}_p$–аппроксимируема).*

Доказательство. Так как $L$ — нормальная подгруппа группы $G^*$ и $L \subseteq G$, с помощью леммы Бриттона [17, с. 249] легко проверяется, что $L \subseteq H \cap K$. Следовательно, $(L \cap H)\varphi = L\varphi = t^{-1}Lt = L = L \cap K$. Тем самым $L \in \Omega$ и можно рассматривать HNN-расширение $G^*_L = G^*/L$. База $G/L$ этого HNN-расширения конечна, поэтому в силу предложения 8 $G^*/L$ содержит свободную подгруппу конечного индекса, причем $L$ имеет конечный общий ранг как подгруппа конечного индекса в группе $G$ конечного общего ранга. Справедливость доказываемого утверждения вытекает из предложения 6.

Справедливость теоремы 4 обеспечивается леммами 2 и 3.

## 4. Доказательство теоремы 2

Пусть $G$ — разрешимая минимаксная группа, $\mathscr{R}$ — субнормальный ряд группы $G$, каждый фактор которого является либо циклической, либо квазициклической группой. *Спектром* группы $G$ называется множество $\mathrm{sp}(G)$ всех простых чисел $p$ таких, что ряд $\mathscr{R}$ имеет квазициклический фактор типа $p^\infty$. Очевидно, что множество $\mathrm{sp}(G)$ не зависит от выбора ряда $\mathscr{R}$. В монографии [3, п. 5.3.9] доказана

**Лемма 4.** *Пусть $G$ — редуцированная разрешимая минимаксная группа. Тогда группа $G$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых $p$. Более точно, если простое число $p$ не принадлежит спектру группы $G$, то группа $G$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.*

**Лемма 5.** *Группа $G(1, n) = (a, b; b^{-1}ab = a^n)$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $p$ не делит $n$.*

Доказательство. Очевидно, что нормальное замыкание $A$ элемента $a$ группы $G = G(1, n)$ изоморфно группе $n$-ичных дробей $Q_n$, а фактор-группа

$G/A$ является бесконечной циклической. Поэтому $G$ — редуцированная разрешимая минимаксная группа и ее спектр совпадает с множеством всех простых делителей числа $n$. Если $p$ не делит $n$, то в силу леммы 4 группа $G$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема. Предположим, что $p$ делит $n$. Тогда $Q_p \leq Q_n \cong A$, поэтому группа $G$ содержит подгруппу, изоморфную группе $Q_p$ $p$-ичных дробей. Очевидно, что группа $Q_p$ не содержит подгрупп, индекс которых конечен и делится на $p$. Тем самым группа $Q_p$, а значит, и $G$, не является почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой.

**Лемма 6.** *Если $|m| = |n|$, то группа $G(m,n)$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для любого простого числа $p$.*

Доказательство. Как уже отмечалось, группа $G(m,n)$ представляет собой HNN-расширение бесконечной циклической группы $G = (a)$ со связанными подгруппами $H = (a^m)$ и $K = (a^n)$. Очевидно, что группа $G$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для любого простого числа $p$, и если $|m| = |n|$, то $H = K$ — подгруппа конечного индекса группы $G$, нормальная в $G(m,n)$. Поэтому справедливость леммы 6 вытекает из леммы 3.

Справедливость теоремы 2 обеспечивается леммами 5 и 6, а также тем обстоятельством, что группы $G(m,n)$, $G(n,m)$ и $G(-m,-n)$ изоморфны между собой.

## 5. Доказательство теоремы 3

В [19, теорема 5] автором настоящей статьи получен следующий результат, обобщающий и усиливающий сформулированный выше результат Ремтуллы и Ширвани.

**Лемма 7.** *Пусть $G$ — группа конечного общего ранга, $\varphi$ — изоморфизм группы $G$ на ее подгруппу $K$ и $G^* = (G, t; t^{-1}Gt = K)$ — соответствующее нисходящее* HNN-*расширение группы $G$. Пусть индекс подгруппы $K$ в группе $G$ конечен и равен $n$.*

*Если для некоторого простого числа $p$, не делящего $n$, группа $G$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема, то и группа $G^*$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.*

*В частности, если группа $G$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых $p$, то и группа $G^*$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых $p$.*

Перейдем к доказательству теоремы 3. Пусть $G$ — группа конечного общего ранга с нетривиальным тождеством, являющаяся почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой для всех достаточно больших простых $p$. Пусть $G^*$ — HNN-расширение группы $G$ со связанными подгруппами $H$ и $K$, причем $H$ и $K$ являются подгруппами конечных индексов группы $G$.

Покажем, что условия (1)–(3) из формулировки теоремы 3 равносильны между собой.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) обеспечивается леммой 2. Действительно, пусть группа $G^*$ финитно аппроксимируема. Если $H \neq G$ и $K \neq G$, то наличие нетривиального тождества в группе $G$ позволяет использовать лемму 2, в силу которой в группе $G$ существует подгруппа $L$ конечного индекса, нормальная в $G^*$, поэтому в данном случае условие (2) выполняется. Если же $H = G$ или $K = G$, то условие (2) выполняется автоматически.

Докажем импликацию (2) $\Rightarrow$ (3). Предположим, что выполняется условие (2). Если хотя бы одна из связанных подгрупп $H$ или $K$ совпадает с группой $G$, то $G^*$ — нисходящее HNN-расширение. В этом случае по лемме 7 группа $G^*$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых $p$. Пусть $H \neq G$ и $K \neq G$. Тогда в силу условия (2) в группе $G$ существует подгруппа $L$ конечного индекса, нормальная в $G^*$. Отсюда и из того, что группа $G$ имеет конечный общий ранг и почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых $p$, по лемме 3 следует, что и $G^*$ почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых $p$. Таким образом, условие (3) выполняется.

## 6. Доказательство теоремы 5

Пусть $P$ — свободное произведение групп $A$ и $B$ с подгруппами $H$ и $K$, объединенными относительно изоморфизма $\varphi : H \to K$. Хорошо известно, что $A$ и $B$ естественным образом вложимы в группу $P$. Поэтому далее будем считать, что $A$ и $B$ — подгруппы группы $P$. Тогда $A \cap B = H = K$. Будем называть группу $P$ *свободным произведением* групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$.

**Лемма 8.** *Пусть $P$ — свободное произведение групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$. Пусть $(A_i)_{i\in I}$ и $(B_j)_{j\in J}$ — семейства всех нормальных подгрупп конечного индекса в группах $A$ и $B$ соответственно,*

$$\Lambda = \{(i,j) \in I \times J : A_i \cap H = B_j \cap H\}.$$

*Для каждого $\lambda = (i,j)$ из $\Lambda$ введем следующие обозначения: $A_\lambda = A_i$, $B_\lambda = B_j$. Если*

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = 1, \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H, \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = 1, \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda H = H, \tag{3}$$

*то группа $P$ финитно аппроксимируема. Если группа $P$ финитно аппроксимируема, группы $A$ и $B$ удовлетворяют нетривиальному тождеству, $H \neq A$ и $H \neq B$, то выполняются условия* (3).

Первое утверждение леммы 8 известно как фильтрационная теорема Баумслага и доказано в [16]. Второе утверждение представляет собой обращение фильтрационной теоремы Баумслага и доказано в [20]. Ниже мы сохраняем обозначения, введенные в формулировке леммы 8.

**Лемма 9.** *Пусть $A$ и $B$ — группы с нетривиальными тождествами, $P$ — свободное произведение групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$, причем $H$ является собственной подгруппой конечного индекса в каждой из групп $A$ и $B$. Пусть группа $P$ финитно аппроксимируема. Тогда в группе $H$ существует подгруппа $L$ конечного индекса, нормальная в $P$.*

Доказательство. По лемме 8 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H$. Очевидно также, что пересечение любых двух подгрупп из семейства $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ снова принадлежит этому семейству. Поэтому в силу предложения 7 существует $\mu \in \Lambda$ такое, что $A_\mu \subseteq H$. Аналогично проверяется, что существуют $\nu \in \Lambda$ такое, что $B_\nu \subseteq H$. Тогда подгруппа $L = A_\mu \cap B_\nu$ является подгруппой конечного индекса группы $H$. Так как $L = A_\mu \cap H \cap B_\nu = A_\mu \cap H \cap A_\nu = A_\mu \cap A_\nu$, то $L$ нормальна $A$. Поскольку

$$L = A_\mu \cap H \cap B_\nu = B_\mu \cap H \cap B_\nu = B_\mu \cap B_\nu,$$

то $L$ нормальна $B$. Из последних двух обстоятельств следует, что $L$ нормальна в $P$. Таким образом, $L$ — подгруппа конечного индекса группы $H$, нормальная в $P$.

**Лемма 10.** *Пусть $A$ и $B$ — группы конечного общего ранга, $P$ — свободное произведение групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$, причем $H$ является подгруппой конечного индекса в каждой из групп $A$ и $B$. Пусть в группе $H$ существует подгруппа $L$ конечного индекса, нормальная в $P$. Если группы $A$ и $B$ финитно аппроксимируемы (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы), то и группа $P$ финитно аппроксимируема (почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема).*

Доказательство. Фактор-группа $P/L$ является свободным произведением конечных групп $A/L$ и $B/L$ с объединенной подгруппой $H/L$, поэтому в силу предложения 8 $P/L$ содержит свободную подгруппу конечного индекса, причем $L$ имеет конечный общий ранг как подгруппа конечного индекса в группе $A$ конечного общего ранга. Теперь справедливость доказываемого утверждения вытекает из предложения 6.

Справедливость теоремы 5 обеспечивается леммами 9 и 10.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Hirsch K. A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. V. 27. P. 81–85.
2. *Шмелькин А. Л.* Полициклические группы // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. С. 234–235.
3. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon Press, 2004.
4. *Hsu T., Wise D.* Ascending HNN-extensions of polycyclic groups are residually finite // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 182, N 1. P. 65–78.
5. *Rhemtulla A., Shirvani M.* The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups // Illinois J. Math. 2003. V. 47, N 1/2. P. 477–484.
6. *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D.* Residual finiteness and hopficity of certain HNN-extensions // Arch. Math. 1986. V. 47. P. 1–5.
7. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 199–201.
8. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 105–114.
9. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 351–352.
10. *Lubotzky A.* A group theoretic characterization of linear groups // J. Algebra. 1988. V. 113. P. 207–214.
11. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.
12. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
13. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.
14. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Ивановск. гос. ун-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49–60.
15. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN-extensions // Comm. Algebra. 1978. V. 6. P. 179–194.
16. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
17. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
18. *Shirvani M.* On residually finite HNN-extensions // Arch. Math. 1985. V. 44. P. 110–115.
19. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными $p$-группами нисходящих HNN-расширений групп // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, № 1. С. 9–19.
20. *Shirvani M.* A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 104, N 3. P. 703–706.


*Статья поступила 14 января 2013 г.*

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский гос. университет,
ул. Ермака, 37, Иваново 153025
azarovdn@mail.ru