Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 512.542

ОБ АНАЛОГЕ ГИПОТЕЗЫ ШЕМЕТКОВА ДЛЯ КЛАССОВ ФИШЕРА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. Н. Воробьёв, Е. Н. Залесская

Аннотация. Описываются методы построения классов Фишера конечных групп посредством операторов, определяемых заданными свойствами холловых π-подгрупп. В частности, доказано, что для любого класса Фишера $\mathfrak{F}$ и множества простых чисел π класс всех конечных π-разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп, т. е. групп, холловы π-подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$, является классом Фишера.

Ключевые слова: класс Фиттинга, класс Фишера, $\mathfrak{F}$-инъектор, холлова π-подгруппа.

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Многие результаты теории групп связаны с изучением свойств классов групп, определяемых заданными свойствами холловых π-подгрупп (см., например, [1, § 16; 2, IX, 4; 3, 2.3, 2.4], а также [4–15]). Напомним, что если n — натуральное число, то через $\sigma(n)$ обозначают множество всех простых делителей n; если G — группа, то $\sigma(G)=\sigma(|G|)$. Пусть π — подмножество множества всех простых чисел P и $\pi'=\mathrm{P}/\pi$. Натуральное число n называется *π-числом* (*π'-числом*), если $\sigma(n)\subseteq\pi$ ($\sigma(n)\subseteq\pi'$). Пусть $H \leq G$ и $|H|$ является π-числом. Тогда H называют *π-подгруппой* группы G. Если d — делитель n и $\sigma(d)\subseteq\pi$, то d называют *π-делителем* числа n. Обозначим через n_π наибольший π-делитель числа n. Подгруппу порядка $|G|_\pi$ называют *холловой π-подгруппой* группы G и обозначают через G_π.

Следуя [4], группу G будем называть *E_π-группой*, если в G имеется хотя бы одна холлова π-подгруппа, и *C_π-группой*, если G является E_π-группой и любые две холловы π-подгруппы G сопряжены. Символами E_π и C_π будем обозначать классы всех E_π-групп и всех C_π-групп соответственно. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп. Через $E_\pi\mathfrak{X}$ обозначим класс всех групп, обладающий по крайней мере одной холловой π-подгруппой, принадлежащей $\mathfrak{X}$, а через $C_\pi\mathfrak{X}$ — класс групп $C_\pi \cap E_\pi\mathfrak{X}$.

Напомним, что класс групп называют *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *насыщенной* или *локальной*, если $\mathfrak{F}$ замкнута относительно фраттиниевых расширений, т. е. из того, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$ (здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, т. е. пересечение всех максимальных подгрупп G).

В [6] доказано, что если $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то класс всех разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп также является насыщенной формацией. Позднее в [7] (см. также [1, теорема 16.2]) было показано, что класс всех π-обособленных $C_\pi\mathfrak{F}$-групп — насыщенная формация для любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$.

В [1] Л. А. Шеметковым сформулирована следующая

Гипотеза [1, проблема 19]. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Тогда $C_\pi\mathfrak{F}$ — насыщенная формация.*

Данная гипотеза опровергнута в [10], где показано, что для $\pi = \{3, 5\}$ и насыщенной формации $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп формация $C_\pi\mathfrak{N}$ не насыщенная. Кроме того, в [10, теорема 2] для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ такой, что класс $C_\pi\mathfrak{F}$ является формацией, установлен критерий насыщенности $C_\pi\mathfrak{F}$, а в [15, теоремы 1–3] доказано, что для любой формации $\mathfrak{F}$ класс $C_\pi\mathfrak{F}$ является формацией и найдены критерии ее частичной насыщенности.

Объектами, дуальными формациям и насыщенным формациям, являются классы Фиттинга и локальные классы Фиттинга, которые определены в [16, 17]. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют классом Фиттинга, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. В теории классов Фиттинга результат, в точности дуальный [6], получен в [11], где доказано, что для любого множества простых чисел π и любого локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс всех разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп также является локальным классом Фиттинга. В [12, теорема 3.3] установлена справедливость этого результата для класса всех π-разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп, а также сформулирован аналог гипотезы Шеметкова для локальных классов Фиттинга [12, проблема, с. 382]. Позднее в [18] показано, что указанные результаты [11, 12] справедливы также для случая, когда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ частично локален.

Настоящая работа посвящена нахождению тех условий, при которых аналог гипотезы Шеметкова справедлив для класса всех $C_\pi\mathfrak{F}$-групп в случае, когда $\mathfrak{F}$ — класс Фишера. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *классом Фишера* [19], если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно подгрупп вида PN, где P — силовская p-подгруппа группы $G \in \mathfrak{F}$ и N — ее нормальная подгруппа. Нами показано, что любой локальный класс Фиттинга является классом Фишера, хотя обратное в общем случае неверно (см. теорему 3.2). Один из основных результатов работы — доказательство того, что для любого множества простых чисел π и любого класса Фишера $\mathfrak{F}$ класс всех π-разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп является классом Фишера (теорема 4.4). В разд. 5 найдены условия, при которых для класса Фишера $\mathfrak{F}$ класс всех $C_\pi\mathfrak{F}$-групп G таких, что G обладает $\mathfrak{F}$-инъектором, содержащим некоторую холлову π-подгруппу G, является классом Фишера (теорема 5.4).

В терминологии и обозначениях мы следуем [1, 2].

2. Предварительные сведения

Будем использовать известный в теории групп результат, который представляет

Теорема 2.1 (С. А. Чунихин [20]). *Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и G — π-разрешимая группа. Тогда*

(1) *G имеет по крайней мере одну холлову π-подгруппу;*

(2) *любые две холловы π-подгруппы G сопряжены;*

(3) *каждая π-подгруппа группы G содержится в некоторой ее холловой π-подгруппе.*

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если выполняются следующие условия:

(i) из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ следует, что $N \in \mathfrak{F}$;

(ii) если N_1, $N_2 \trianglelefteq G$ и N_1, $N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1N_2 \in \mathfrak{F}$.

Из условия (ii) определения вытекает, что для всякого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ любая группа G имеет наибольшую нормальную подгруппу, принадлежащую $\mathfrak{F}$, которую называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* группы G и обозначают через $G_{\mathfrak{F}}$.

Произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $(G\colon G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что произведение любых двух классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна (см., например, [2, IX.1.12(a),(c)]).

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Тогда подгруппа V группы G называется:

(1) *$\mathfrak{F}$-максимальной в* G, если $V \in \mathfrak{F}$ и из того, что $V \leq U \leq G$, $U \in \mathfrak{F}$, следует $U = V$;

(2) *$\mathfrak{F}$-инъектором* G, если $V \cap K$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в K для любой субнормальной подгруппы K группы G.

Множество (возможно, пустое) всех $\mathfrak{F}$-инъекторов группы G обозначим через $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$. Непосредственно из определения $\mathfrak{F}$-инъектора вытекают следующие свойства, которые мы будем использовать.

Лемма 2.2. *Пусть G — группа и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $V \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$ и $K \trianglelefteq G$, то $V \cap K \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(K)$;*

(2) *если V является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G и $V \cap M \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(M)$ для каждой максимальной нормальной подгруппы M группы G, то $V \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Через $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}^\pi$) будем обозначать класс всех разрешимых (всех π-разрешимых) групп соответственно, через $\mathfrak{E}_\pi$ — класс всех π-групп. В частности, если π совпадает с множеством P всех простых чисел, то класс $\mathfrak{E}_\pi$ равен классу $\mathfrak{E}$ всех групп. Для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $\sigma(\mathfrak{F})$ обозначим объединение множеств всех простых делителей порядка всех групп из $\mathfrak{F}$. Отметим, что ввиду теоремы 2.1 справедливо равенство $\mathfrak{S}^\pi \cap C_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{S}^\pi \cap E_\pi\mathfrak{F}$ и данные классы состоят из всех π-разрешимых групп, у которых холловы π-подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$. Если группа G принадлежит E_π, в частности, если она π-разрешима, то $\mathfrak{E}_\pi$-инъекторы G являются холловыми π-подгруппами G (см. [3, с. 328]).

В теории разрешимых групп изящное обобщение в терминах классов Фиттинга фундаментальных теорем Силова и Холла получено Гашюцом, Фишером и Хартли [16], которые доказали, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два ее $\mathfrak{F}$-инъектора сопряжены. Указанный результат впервые обобщен Л. А. Шеметковым [21] и в последующем В. Г. Сементовским [22]. Эти результаты, необходимые нам в дальнейшем, представляет

Теорема 2.3 [21, теоремы 2.1, 2.2; 22, теорема, с. 168]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $\pi = \sigma(\mathfrak{F})$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $G \in \{\mathfrak{S}^\pi, \mathfrak{F}\mathfrak{S}\}$, то G имеет единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов;*

(2) *если $G \in \mathfrak{S}^\pi$, то подгруппа V группы G является $\mathfrak{F}$-инъектором G в точности тогда, когда G обладает субнормальным рядом*

$$G = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_t = 1,$$

каждый фактор которого является либо π'-группой, либо нильпотентной π-группой, таким, что $V \cap G_i$ есть $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G_i для любого $i \in \{0, 1, \ldots, t\}$.

Для построения примеров классов Фиттинга $C_\pi\mathfrak{F}$-групп будем также использовать операторы * и $_*$, которые определены Локеттом [23]. Напомним, что каждому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ оператор * сопоставляет наименьший из классов Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H, а оператор $_*$ — классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}_* = \cap\{\mathfrak{X} : \mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*\}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *классом Локетта*, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Свойства операторов Локетта описывает

Лемма 2.4 [2, X.1.15]. *Для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ справедливы соотношения $(\mathfrak{F}_*)_* = \mathfrak{F}_* = (\mathfrak{F}^*)_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^*$.*

3. Локальные и частично наследственные классы Фиттинга

Напомним, что всякое отображение $f : P \to \{$классы Фиттинга$\}$ называют *функцией Хартли* или *H-функцией.*

Пусть $\pi = \mathrm{Supp}(f) = \{p \in P : f(p) \neq \varnothing\}$ и $LR(f) = \mathfrak{E}_\pi \cap \big(\bigcap\limits_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\big)$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *локальным* [17], если существует H-функция f такая, что $\mathfrak{F} = LR(f)$. Заметим, что семейство таких классов обширно, так как ввиду теоремы [24] каждый разрешимый наследственный класс Фиттинга, т. е. класс Фиттинга, замкнутый относительно взятия подгрупп, локален.

В [19] определены частично наследственные классы Фиттинга, которые по предложению Хартли стали называть *классами Фишера.*

Определение 3.1 [25]. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Фишера*, если из $G \in \mathfrak{F}$, $K \trianglelefteq G$, $K \leq H \leq G$ и того, что H/K является p-группой для некоторого простого p, всегда следует $H \in \mathfrak{F}$.

Очевидно, что каждый наследственный класс Фиттинга является классом Фишера. В частности, множество всех классов Фишера содержит все разрешимые наследственные локальные классы Фиттинга. Взаимосвязь между локальными классами Фиттинга и классами Фишера в общем случае раскрывает следующая

Теорема 3.2. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *каждый локальный класс Фиттинга является классом Фишера;*

(2) *существуют классы Фишера, которые не являются локальными классами Фиттинга.*

Доказательство. (1) Пусть $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f с носителем π. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \cap \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D} = \bigcap\limits_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Так как класс Фиттинга $\mathfrak{E}_\pi$ наследствен и пересечение любого множества классов Фишера является классом Фишера, для доказательства утверждения (1) достаточно выяснить, что для каждого простого $p \in \pi$ класс Фиттинга $\mathfrak{X}_p = f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ — класс Фишера. Пусть $G \in \mathfrak{X}_p$, $K \trianglelefteq G$, $K \leq H \leq G$ и H/K является q-группой для некоторого простого числа q. Докажем, что $H \in \mathfrak{X}_p$. Рассмотрим две имеющиеся возможности.

1. $p \neq q$. В этом случае $H/K \in \mathfrak{E}_{p'}$. Так как $K \in \mathfrak{X}_p$, то $K \leq H_{\mathfrak{X}_p}$. Следовательно, ввиду изоморфизма $(H/K)/(H_{\mathfrak{X}_p}/K) \cong H/H_{\mathfrak{X}_p}$ получаем $H/H_{\mathfrak{X}_p} \in \mathfrak{E}_{p'}$. Отсюда с учетом ассоциативности умножения классов Фиттинга следует, что $H \in \mathfrak{X}_p\mathfrak{E}_{p'} = \mathfrak{X}_p$, и утверждение (1) теоремы верно. Остается принять случай

2. $p = q$. Пусть H_p — силовская p-подгруппа группы H. Так как G является $\mathfrak{X}_p$-группой, фактор-группа $G/G_{f(p)\mathfrak{N}_p}$ принадлежит $\mathfrak{E}_{p'}$, поэтому силовская p-подгруппа группы G является также силовской p-подгруппой группы $G_{f(p)\mathfrak{N}_p}$. Следовательно, по теореме Силова $H_p \leq G_{f(p)\mathfrak{N}_p}$, тем самым $[K, H_p] \leq K \cap G_{f(p)\mathfrak{N}_p} = K_{f(p)\mathfrak{N}_p}$. Значит, $H_pK_{f(p)\mathfrak{N}_p}$ — нормальная подгруппа группы H_pK. Из $H/K \in \mathfrak{N}_p$ получаем $H_pK = H$. Кроме того, $H_pK_{f(p)\mathfrak{N}_p}/K_{f(p)\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $H_pK_{f(p)\mathfrak{N}_p} \in (f(p)\mathfrak{N}_p)\mathfrak{N}_p = f(p)\mathfrak{N}_p$, и, значит, $H_pK_{f(p)\mathfrak{N}_p} \leq H_{f(p)\mathfrak{N}_p}$. Заметим также, что $H_pK/H_pK_{f(p)\mathfrak{N}_p} = H_pK_{f(p)\mathfrak{N}_p}K/H_pK_{f(p)\mathfrak{N}_p} \cong K/K \cap H_pK_{f(p)\mathfrak{N}_p} = K/K_{f(p)\mathfrak{N}_p}K_p$. Стало быть, $H/H_pK_{f(p)\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{E}_{p'}$. Тогда ввиду изоморфизма $(H/H_pK_{f(p)})/(H_{f(p)\mathfrak{N}_p}/H_pK_{f(p)}) \cong H/H_{f(p)\mathfrak{N}_p}$ получаем $H \in \mathfrak{X}_p$, и утверждение (1) доказано.

(2) Для доказательства существования классов Фишера, не являющихся локальными классами Фиттинга, воспользуемся конструкциями классов групп, которые в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп изучались Хауком [26, 27] (см. также [2, IX.2.5(a),(b)]). Пусть E_z — операция, сопоставляющая каждому классу групп $\mathfrak{X}$ класс групп $\mathrm{E}_z\,\mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{S} : \exists N \trianglelefteq G,\ N \leq Z_\infty(G)$ и $G/N \in \mathfrak{X})$. Тогда ввиду леммы 2.2 из [26] E_z является операцией замыкания, т. е. $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{E}_z\,\mathfrak{X}$, из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$ следует, что $\mathrm{E}_z\,\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{E}_z\,\mathfrak{Y}$ и $\mathrm{E}_z(\mathrm{E}_z\,\mathfrak{X})=\mathrm{E}_z\,\mathfrak{X}$.

Пусть p — простое число и $\mathfrak{F}$ — наименьший из E_z-замкнутых классов Фиттинга такой, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$. Как установлено в [26, разд. 4.3] (см. также утверждения 1 и 2 теоремы 5.9 из [27]), $\mathfrak{F}$ является классом Фишера и $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{S} : G/C_G(O_p(G)) \in \mathfrak{N}_p)$. Покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ нелокален. Пусть, напротив, $\mathfrak{F}$ является локальным классом Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \cap \big(\bigcap\limits_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}\big)$ для некоторой H-функции f с носителем π. Пусть для некоторого простого $q \in \pi$ значение H-функции $f(q)$ таково, что $\omega = \sigma(f(q)) \neq P$. Отсюда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\omega\mathfrak{N}_q\mathfrak{E}_{q'}$ и $\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{N}_q\mathfrak{E}_{q'} \neq \mathfrak{S}$. Выберем группу G наименьшего порядка из класса $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}_\omega\mathfrak{N}_q\mathfrak{E}_{q'}$. Пусть $\Gamma = Z_r \wr G$ — регулярное сплетение циклической группы порядка $r \in \pi$ и группы G, причем $r \neq p \in \pi$. Тогда $\Gamma = N \rightthreetimes G$, где $N = \underbrace{Z_r \times \ldots \times Z_r}_{|G|}$.

Так как $O_p(\Gamma) = 1$, очевидно, $\Gamma \in \mathfrak{F}$. Следовательно, группа G является гомоморфным образом $\mathfrak{F}$-группы, и $\Gamma/N \cong G \in \mathfrak{S}_\omega\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}$. Полученное противоречие устанавливает тот факт, что каждое значение H-функции f является классом Фиттинга полной характеристики. Следовательно, $\mathfrak{N} \subseteq f(p)$ для каждого простого $p \in \pi$, поэтому $\mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{D} = \bigcap\limits_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Пусть теперь E_p^r— группа, которая является расширением минимальной нормальной p-подгруппы с помощью группы порядка r. Тогда $E_p^r \in \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{F}$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает утверждение (2). Теорема доказана.

4. Классы Фишера π-разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп

Напомним, что если π — некоторое подмножество множества всех простых чисел P, то символами G_π и $\mathrm{Hall}_\pi(G)$ обозначают холлову π-подгруппу группы G и множество всех холловых π-подгрупп G соответственно.

Лемма 4.1. *Пусть K_1, K_2 — нормальные подгруппы группы $G \in \mathfrak{S}^\pi$ и $G_\pi \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $K_1K_2 \cap G_\pi = (K_1 \cap G_\pi)(K_2 \cap G_\pi)$;

(2) $K_1G_\pi \cap K_2G_\pi = (K_1 \cap K_2)G_\pi$.

Доказательство. (1) Очевидно, $(K_1 \cap G_\pi)(K_2 \cap G_\pi) \leq K_1K_2 \cap G_\pi$. Так как подгруппа $K_i \cap G_\pi$ является холловой π-подгруппой K_i, то $|K_i \cap G_\pi| = |K_i|_\pi$ для $i \in \{1, 2\}$. Аналогично $|K_1K_2 \cap G_\pi| = |K_1K_2|_\pi$.

Следовательно, $|(K_1 \cap G_\pi)(K_2 \cap G_\pi)| = |K_1|_\pi|K_2|_\pi/|K_1 \cap K_2|_\pi = |K_1K_2|_\pi = |K_1K_2 \cap G_\pi|$. Отсюда вытекает справедливость равенства (1).

Утверждение (2) следует из (1) по лемме A.1.2 из [2]. Лемма доказана.

Построение классов Фиттинга π-разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп описывает

Лемма 4.2. *Для любого множества простых чисел π и класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс всех π-разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп является классом Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{C} = (G \in \mathfrak{S}^\pi : \mathrm{Hall}_\pi(G) \subseteq \mathfrak{F})$. Если $\mathfrak{F} = \varnothing$, то $\mathfrak{C} = \varnothing$ и лемма очевидна. Кроме того, для случаев, когда $\pi = \varnothing$ и $\pi = P$, имеем $\mathfrak{C} = \mathfrak{S}^\pi$ и $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}$ соответственно. Следовательно, в этих случаях $\mathfrak{C}$ — класс Фиттинга.

Предположим, что $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ и $\varnothing \subset \pi \subset$P. Пусть $G \in \mathfrak{C}$ и $K \trianglelefteq G$. Тогда из π-разрешимости группы G по теореме 2.1 следует существование в G холловой π-подгруппы G_π, которая является $\mathfrak{F}$-подгруппой G. Так как $G_\pi \cap K \in \mathrm{Hall}_\pi(K)$ и $K = G_\pi \cap K \trianglelefteq G_\pi$, то $K_\pi \in \mathfrak{F}$, поэтому $G \in \mathfrak{C}$ ввиду сопряженности холловых π-подгрупп из K.

Пусть $G = NM$, где $N \trianglelefteq G$, $M \trianglelefteq G$ и N, M являются $\mathfrak{C}$-подгруппами группы G. Покажем, что $G \in \mathfrak{C}$. Так как $N \in \mathfrak{S}^\pi$, $M \in \mathfrak{S}^\pi$ и $\mathfrak{S}^\pi$ — класс Фиттинга, то $G \in \mathfrak{S}^\pi$. Следовательно, по теореме 2.1 в G существует холлова π-подгруппа G_π. Тогда $G_\pi \cap N \in \mathrm{Hall}_\pi(N)$ и $G_\pi \cap M \in \mathrm{Hall}_\pi(M)$. Кроме того, $G_\pi \cap N$ и $G_\pi \cap M$ — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы G_π. Следовательно, по лемме 4.1 $(G_\pi \cap N)(G_\pi \cap M) = G_\pi \cap MN = G_\pi$ и $G_\pi \in \mathfrak{F}$. Ввиду сопряженности холловых π-подгрупп G имеем $G \in \mathfrak{C}$. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Для любого множества простых чисел π и класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга $\mathfrak{C}$ всех π-разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп π-насыщенный, т. е. $\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'} = \mathfrak{C}_{\pi'}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{F}$ — пустой класс Фиттинга или $\pi \in \{\varnothing,$P$\}$, то, очевидно, класс Фиттинга $\mathfrak{C}$ является π-насыщенным. Пусть $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, $\varnothing \subset \pi \subset$ P и $G \in \mathfrak{C}\mathfrak{E}_{\pi'}$. Заметим, что группы $G_\mathfrak{C}$ и $G/G_\mathfrak{C}$ являются π-разрешимыми и, следовательно, группа G π-разрешима.

Пусть H — холлова π-подгруппа группы $G_\mathfrak{C}$. Так как индекс $|G : G_\mathfrak{C}|$ является π'-числом, H — холловой π-подгруппой группы G. Но $G_\mathfrak{C} \in \mathfrak{C}$, поэтому $H = G_\pi \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{C}$, и справедливо включение $\mathfrak{C}\mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{C}$. Обратное включение очевидно. Лемма доказана.

Справедливость аналога гипотезы Шеметкова (см. введение) для класса всех π-разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп в случае, когда $\mathfrak{F}$ — класс Фишера, подтверждает

Теорема 4.4. *Пусть $\pi \subseteq$ P. Тогда для любого класса Фишера $\mathfrak{F}$ класс всех π-разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп является классом Фишера.*

Доказательство. Если $\mathfrak{F} = \varnothing$ или $\pi \in \{\varnothing, \text{P}\}$, то теорема очевидна. Пусть $\varnothing \subset \pi \subset$ P, $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ и $\mathfrak{C} = C_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}^\pi$.

Предположим, что $G \in \mathfrak{C}$, $K \trianglelefteq G$, $K \leq H \leq G$ и H/K является p-группой для некоторого простого числа p. Чтобы установить принадлежность группы H классу $\mathfrak{C}$, рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $p \in \pi'$. Так как по лемме 4.2 класс групп $\mathfrak{C}$ является классом Фиттинга, $K \in \mathfrak{C}$. Тогда из $K \trianglelefteq H$ следует, что $K \leq H_\mathfrak{C}$. По условию $H/K \in$

$\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{E}_{\pi'}$ и класс групп $\mathfrak{E}_{\pi'}$ — формация. Следовательно, $H/H_{\mathfrak{C}} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$ ввиду изоморфизма $(H/K)/(H_{\mathfrak{C}}/K) \cong H/H_{\mathfrak{C}}$. Так как по лемме 4.3 класс $\mathfrak{C}$ является π-насыщенным, то $H \in \mathfrak{C}$ и теорема в случае 1 верна.

Случай 2. $p \in \pi$. В данном случае $H/K \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Так как подгруппа H является π-разрешимой, в H по теореме 2.1 существует холлова π-подгруппа H_π. Следовательно, $H_\pi K/K \in \mathrm{Hall}_\pi(H/K)$ и $H = H_\pi K$. Значит, $H/K \cong H_\pi/H_\pi \cap K$, и $H_\pi/H_\pi \cap K$ является p-группой. Учитывая нормальность подгруппы K в группах G и H, получаем равенство $G_\pi \cap K = H_\pi \cap K$, справедливое для некоторой холловой π-подгруппы G_π группы G. Кроме того, из $G \in \mathfrak{C}$ следует, что $G_\pi \in \mathfrak{F}$. Теперь из условий $G_\pi \in \mathfrak{F}$, $H_\pi \cap K \trianglelefteq G_\pi$, $H_\pi \cap K \leq H_\pi \leq G_\pi$ и $H_\pi/H_\pi \cap K \in \mathfrak{N}_p$ получаем $H_\pi \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $H \in \mathfrak{C}$. Теорема доказана.

Напомним, что разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют нормальным, если для любой группы $G \in \mathfrak{S}$ ее $\mathfrak{F}$-инъектор — нормальная подгруппа в G. Для произвольного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс всех разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп не всегда является классом Фишера. Это подтверждает следующий

Пример 4.5. Пусть $\pi = \mathrm{P}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_*$ — наименьший из неединичных разрешимых нормальных классов Фиттинга. Тогда

$$\mathfrak{C} = C_\pi(\mathfrak{S}_*) = (G \in \mathfrak{S} : \mathrm{Hall}_\pi(G) \subseteq \mathfrak{S}_*) = \mathfrak{S}_*.$$

Пусть, напротив, класс Фиттинга $\mathfrak{C}$ является классом Фишера. Тогда по теореме X.1.25 из [2] $\mathfrak{C}$ — класс Локетта, т. е. $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}$. Учитывая свойства операторов Локетта, по лемме 2.4 получаем

$$\mathfrak{C}^* = (\mathfrak{S}_*)^* = \mathfrak{S}^* = \mathfrak{S} = \mathfrak{C} = \mathfrak{S}_*.$$

Но в [28] доказано, что симметрическая группа из трех символов S_3 принадлежит $\mathfrak{S}\backslash\mathfrak{S}_*$. Ввиду полученного противоречия $\mathfrak{C}$ не является классом Фишера.

5. О классах Фишера $D^\pi_{\mathfrak{F}}$-групп

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. По аналогии с обозначениями из [4] будем говорить, что группа G *обладает свойством* $E_{\mathfrak{F}}$, если в G имеется хотя бы один $\mathfrak{F}$-инъектор, и называть G в этом случае *$E_{\mathfrak{F}}$-группой.* Если G является $E_{\mathfrak{F}}$-группой и любые два $\mathfrak{F}$-инъектора G сопряжены, то будем говорить, что G *обладает свойством* $C_{\mathfrak{F}}$, и называть ее $C_{\mathfrak{F}}$- группой. Символы $E_{\mathfrak{F}}$ и $C_{\mathfrak{F}}$ будем использовать в том числе для обозначения классов $E_{\mathfrak{F}}$- и $C_{\mathfrak{F}}$-групп соответственно. Если $\mathfrak{F}$ равен классу Фиттинга $\mathfrak{E}_\pi$ всех π-групп, то ввиду [3, теорема 7.2.33] класс $E_{\mathfrak{F}}$ равен классу Фиттинга $\mathfrak{E}$ всех групп, хотя класс E_π отличен от $\mathfrak{E}$ и не является классом Фиттинга (см. [29]).

Определение 5.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $\pi \subseteq P$. Определим *класс групп* $D^\pi_{\mathfrak{F}}$ следующим образом: $G \in D^\pi_{\mathfrak{F}}$ в том и только в том случае, если G обладает одновременно свойствами C_π, $C_{\mathfrak{F}}$ и каждый $\mathfrak{F}$-инъектор G содержит некоторую холлову π-подгруппу G.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп. Тогда символом $\mathfrak{X}^\pi$ обозначим класс всех π-разрешимых $\mathfrak{X}$-групп, т. е. $\mathfrak{X}^\pi = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}^\pi$.

Лемма 5.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, $\omega = \sigma(\mathfrak{F})$ и $\pi \subseteq P$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *класс $D^\pi_{\mathfrak{F}} \cap (\mathfrak{F}\mathfrak{S})^\pi$ является классом Фиттинга;*

(2) *если $\pi \subseteq \omega$, то класс всех ω-разрешимых $D^{\pi}_{\mathfrak{F}}$-групп является классом Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}^{\pi}_{\mathfrak{F}} \cap (\mathfrak{F}\mathfrak{S})^{\pi}$ и $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}^{\pi}_{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{S}^{\omega}$ для $\pi \subseteq \omega$. С учетом теорем 2.1 и 2.3 легко видеть, что каждый из классов $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ состоит из всех тех и только тех групп, индексы $\mathfrak{F}$-инъекторов в которых являются π'-числами.

Пусть $G \in \mathfrak{D}_i$ и $K \trianglelefteq G$, где $i \in \{1, 2\}$. Тогда по теореме 2.3 в группе G существует $\mathfrak{F}$-инъектор V и индекс $|G : V|$ является π'-числом. Ввиду утверждения (1) леммы 2.2 $V \cap G \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(K)$. Так как $|VK| = |V| \cdot |K|/|V \cap K|$, имеем $|K : V \cap K| = |G : V|/|G : VK|$. Следовательно, индекс $|K : V \cap K|$ является π'-числом и $K \in \mathfrak{D}_i$.

Пусть K_1 и K_2 — нормальные $\mathfrak{D}_i$-подгруппы группы G и $G = K_1K_2$. Поскольку K_i для $i \in \{1, 2\}$ принадлежит классам Фиттинга $(\mathfrak{F}\mathfrak{S})^{\pi}$ и $\mathfrak{S}^{\omega}$, группа G принадлежит каждому из этих классов. Следовательно, в G по теореме 2.3 существует $\mathfrak{F}$-инъектор V. Тогда по утверждению (1) леммы 2.2 подгруппы $V \cap K_1$ и $V \cap K_2$ являются $\mathfrak{F}$-инъекторами групп K_1 и K_2 соответственно. Покажем, что индекс $|G : V|$ — π'-число. Действительно,

$$k = |G : V| = |K_1| \cdot |K_2|/|V| \cdot |K_1 \cap K_2| = |K_1 : V_1| \cdot |K_2 : V_2| \cdot |V_1| \cdot |V_2|/|V| \cdot |K_1 \cap K_2|.$$

Значит,

$$\begin{aligned} k &= |K_1 : V_1| \cdot |K_2 : V_2| \cdot |V_1V_2| \cdot |V_1 \cap V_2|/|V| \cdot |K_1 \cap K_2| \\ &= |K_1 : V_1| \cdot |K_2 : V_2| \cdot |(V_1 \cap K_1)(V_2 \cap K_2)| \cdot |V \cap (K_1 \cap K_2)|/|V| \cdot |K_1 \cap K_2|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$k = |K_1 : V_1| \cdot |K_2 : V_2|/|V : (V_1 \cap K_1)(V_2 \cap K_2)| \cdot |(K_1 \cap K_2) : (V \cap (K_1 \cap K_2))|.$$

Так как по условию индексы $|K_1 : V_1|$ и $|K_2 : V_2|$ являются π'-числами, k — π'-число и $G \in \mathfrak{D}_i$. Лемма доказана.

Для доказательства основного результата этого раздела установим сначала признак $\mathfrak{F}$-инъектора π-разрешимой группы.

Лемма 5.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, $\pi = \sigma(\mathfrak{F})$ и $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$. Тогда если нормальная подгруппа K и $\mathfrak{F}$-подгруппа V группы G таковы, что $V \cap K \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(K)$ и выполняется $VK = G$, то $V \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Доказательство. Так как группа G π-разрешима, существует ряд $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$, в котором $G_k = K$ для некоторого k и каждый фактор G_i/G_{i-1} является либо π'-группой, либо нильпотентной π-группой для $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Поэтому по утверждению (2) теоремы 2.3 для доказательства леммы достаточно выяснить, что $G_j \cap V$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G_j для любого $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Так как подгруппа $V \cap K$ — $\mathfrak{F}$-инъектор группы K, то $V \cap G_j$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G_j для $0 \leq j \leq k$.

Пусть $k < j \leq n$. Предположим, что $G_j \cap V < F \leq G$ и $F \in \mathfrak{F}$. Поскольку $G = VK$, по тождеству Дедекинда $G_j = G_j \cap KV = K(G_j \cap V)$. Следовательно, применяя снова тождество Дедекинда, получаем

$$(G_j \cap V)(F \cap K) = F \cap K(G_j \cap V) = F \cap G_j = F.$$

Так как по предположению $G_j \cap V < F$, то $V \cap K \leq F \cap K$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $V \cap K = F \cap K$. В этом случае $F = (G_j \cap V)(V \cap K) = G_j \cap V$. Приходим к противоречию с предположением $G_j \cap V < F$. Остается принять

Случай 2. $V \cap K < F \cap K$. Так как $F \cap K \trianglelefteq F$ и $F \in \mathfrak{F}$, то $F \cap K$ является $\mathfrak{F}$-подгруппой, содержащей $V \cap K$. Это противоречит тому, что подгруппа $V \cap K$ — $\mathfrak{F}$-инъектор группы K и, следовательно, $\mathfrak{F}$-максимальна в K. Значит, $V \cap G_j$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G_j для $k < j \leq n$. Лемма доказана.

Построение классов Фишера посредством класса $D^{\pi}_{\mathfrak{F}}$-групп представляет

Теорема 5.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фишера, $\omega = \sigma(\mathfrak{F})$ и $\pi \subseteq P$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *класс $D^{\pi}_{\mathfrak{F}} \cap (\mathfrak{F}\mathfrak{S})^{\pi}$ является классом Фишера;*

(2) *если $\pi \subseteq \omega$, то класс всех ω-разрешимых $D^{\mathfrak{F}}_{\pi}$-групп является классом Фишера.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = D^{\pi}_{\mathfrak{F}} \cap (\mathfrak{F}\mathfrak{S})^{\pi}$ и $\mathfrak{F}_2$ — класс всех ω-разрешимых $D^{\pi}_{\mathfrak{F}}$-групп, где $\pi \subseteq \omega$. По лемме 5.2 классы групп $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ являются классами Фиттинга.

Пусть $G \in \mathfrak{F}_i$ и $K \trianglelefteq G$, где $i \in \{1,2\}$. Покажем, что если $K \leq H \leq G$ и H/K является p-группой для некоторого простого p, то $H \in \mathfrak{F}_i$.

Докажем утверждение (1). Вначале заметим, что $H/K \in \mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{S}$. Так как по лемме 5.2 $\mathfrak{F}_1$ — класс Фиттинга, то $K \in \mathfrak{F}_1$, поэтому $K \leq H_{\mathfrak{F}_1}$. Учитывая изоморфизм $(H/K)/(H_{\mathfrak{F}_1}/K) \cong H/H_{\mathfrak{F}_1}$, имеем $H/H_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{S}$. Кроме того, $H_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}$, и, следовательно, $H_{\mathfrak{F}_1} \leq H_{\mathfrak{F}\mathfrak{S}}$. Ввиду изоморфизма $(H/H_{\mathfrak{F}_1})/(H_{\mathfrak{F}\mathfrak{S}}/H_{\mathfrak{F}_1}) \cong H/H_{\mathfrak{F}\mathfrak{S}}$ и свойства ассоциативности умножения классов Фиттинга, получаем $H \in (\mathfrak{F}\mathfrak{S})\mathfrak{S} = \mathfrak{F}\mathfrak{S}$. Кроме того, $G \in \mathfrak{F}_1$ и, значит, $H \in \mathfrak{S}^{\pi}$. Следовательно, $H \in (\mathfrak{F}\mathfrak{S})^{\pi}$, и в группе H ввиду теорем 2.3 и 2.1 существуют единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов и единственный класс сопряженных холловых π-подгрупп. Рассмотрим две имеющиеся возможности.

1.1. $p \in \pi'$. В этом случае $H/K \in \mathfrak{S}_{\pi'}$. Пусть F — $\mathfrak{F}$-инъектор группы H. Тогда по утверждению (1) леммы 2.2 подгруппа $F \cap K$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы K. Так как $K \in \mathfrak{F}_1$, то K — $D^{\pi}_{\mathfrak{F}}$-группа, поэтому $F \cap K$ содержит некоторую холлову π-подгруппу группы K. Следовательно, найдется холлова π-подгруппа H_π группы H такая, что $H_\pi = H_\pi \cap K \leq F \cap K \leq F$. Значит, $H \in \mathfrak{F}_1$, и теорема в случае 1.1 верна.

1.2. $p \in \pi$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, существует $\mathfrak{F}$-инъектор V группы G, содержащий холлову π-подгруппу группы G. Следовательно, по утверждению (3) теоремы 2.1 V содержит также некоторую холлову π-подгруппу H_π группы H. Поскольку H/K — p-группа, ввиду изоморфизма $(V \cap H)K/K \cong (V \cap H)/(V \cap H \cap K)$ следует, что $(V \cap H)/(V \cap K) \in \mathfrak{N}_p$. Кроме того, $V \cap K \trianglelefteq V$. Итак, $V \in \mathfrak{F}$, $V \cap K \leq V \cap H \leq V$ и $(V \cap H)/(V \cap K) \in \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $V \cap H \in \mathfrak{F}$.

Покажем $\mathfrak{F}$-максимальность подгруппы $V \cap H$ в H. Пусть $V \cap H \leq R \leq H$ и $R \in \mathfrak{F}$. Тогда $V \cap H \cap K \leq R \cap K$. Так как $R \cap K \trianglelefteq R$, то $R \cap K$ — $\mathfrak{F}$-подгруппа K. Кроме того, подгруппа $(V \cap H) \cap K = V \cap K$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы K, и, значит, $V \cap H$ — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в K. Следовательно, $(V \cap H) \cap K = R \cap K$. Поскольку H/K — π-группа, $H = H_\pi K$. Теперь из $V \geq H_\pi$ следует, что $H = (V \cap H)K$. Поэтому, применяя тождество Дедекинда, получаем $R = R \cap (V \cap H)K = (V \cap H)(R \cap K)$ и $R = (V \cap H)((V \cap H)K) = V \cap H$. Это доказывает $\mathfrak{F}$-максимальность подгруппы $V \cap H$ в H.

Таким образом, для групп $H, V \cap H$ и K выполняются следующие условия:

(i) $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}$ и $H/K \in \mathfrak{N}$;

(ii) подгруппа $V \cap H$ $\mathfrak{F}$-максимальна в H и $(V \cap H) \cap K \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(K)$.

Значит, по лемме 2.5 из [30] подгруппа $V \cap H$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы H. Кроме того, $V \cap H \geq H_\pi$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_1$, и первое утверждение теоремы доказано.

(2) Так как $\pi \subseteq \omega$, каждая группа из $\mathfrak{F}_2$ π-разрешима. Рассуждая, как в случае доказательства утверждения (1), получаем, что для $\mathfrak{F}$-инъектора V группы G и ее подгрупп K, H выполняются следующие условия:

(j) $(V \cap H)K = H \in \mathfrak{S}^\omega$;

(jj) $V \cap H$ является $\mathfrak{F}$-подгруппой H и $(V \cap H) \cap K \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(K)$.

По лемме 4.3 $V \cap H \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(H)$. Следуя доказательству утверждения (1), имеем $V \cap H \geq H_\pi$, поэтому $H \in \mathfrak{F}_2$. Теорема доказана.

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ не является классом Фишера, то класс Фиттинга всех разрешимых $\mathfrak{D}^\pi_{\mathfrak{F}}$-групп в общем случае не является классом Фишера. Это подтверждает

Пример 5.5. Пусть $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{S} : \mathrm{Soc}_3(G) \leq Z(G))$, где $\mathrm{Soc}_3(G)$ — 3-цоколь группы G, т. е. произведение всех ее минимальных нормальных 3-подгрупп. Тогда по [2, теорема IX.2.8] $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга и не является классом Фишера (см. пример IX.3.7(a) в [2]). Пусть $\pi = \{2\}$. Тогда по утверждению (1) леммы 5.2 класс групп $\mathfrak{H} = \mathfrak{D}^\pi_{\mathfrak{F}}$ является классом Фиттинга. В этом случае, как показано в примере IX.3.15 из [2], существует группа $G \in \mathfrak{S}$, силовская 2-подгруппа $\mathfrak{H}$-инъектора которой не является силовской 2-подгруппой для каждой из нормальных подгрупп группы G. Это означает, что класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ не нормально вложенный (см. [2, определение IX.3.3]). Следовательно, по [2, теорема IX.3.4(a)] класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ не является классом Фишера.

В заключение отметим, что каждый наследственный класс Фиттинга является классом Фишера. Однако из наследственности класса Фишера $\mathfrak{F}$ в общем случае не следует наследственность класса $\mathfrak{H}$ всех разрешимых $\mathfrak{D}^\pi_{\mathfrak{F}}$-групп. Действительно, если класс $\mathfrak{F}$ равен классу $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп и $\pi = \{3\}'$, то $\mathfrak{F}$ — наследственный класс Фишера и по теореме 5.4 класс групп $\mathfrak{H}$ является классом Фишера. Но $\mathfrak{H}$ наследствен (см. замечание к теореме IX.3.8(a) из [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

3. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006, (Math Appl.; V. 584).

4. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1056. V. 3, N 22. P. 286–304.

5. *Lockett P.* On the theory of Fitting classes of finite soluble groups // Math. Z. 1973. Bd 131, Heft 3. S. 103–115.

6. *Blessenohl D.* Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1975. Bd 142, Heft 3. S. 299–300.

7. *Слепова Л. М.* О формациях $E^{\mathfrak{F}}$-групп // Докл. АН БССР. 1977. Т. 21, № 7. С. 587–589.

8. *Doerk K. Hawkes T.* Ein Beispiel aus der Theorie der Schunkklassen // Arch. Math (Basel). 1978. Bd 30. S. 539–544.

9. *Hauck P.* Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse // J. Algebra. 1978. V. 53, N 4. P. 395–401.

10. *Васильев А. Ф., Шеметков Л. А.* Нелокальные формации конечных групп // Докл. НАН Беларуси. 1995. Т. 39, № 4. С. 5–8.

11. *Загурский В. Н., Воробьев Н. Т.* Классы Фиттинга с заданными свойствами холловых подгрупп // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 2. С. 234–240.

12. *Guo W., Li B.* On the Shemetkov problem for Fitting classes // Beiträge Algebra Geom. 2007. V. 48, N 1. P. 281–289.

13. *Mechovich A. P., Vorob'ev N. N., Vorob'ev N. T.* Hall operators on the set of formations of finite groups // Algebra Discrete Math. 2010. V. 9, N 1. P. 72–78.
14. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 506–516.
15. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О., Шеметков Л. А.* Формации конечных C_π-групп // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 1. С. 40–52.
16. *Fischer B., Gaschütz W., Hartley B.* Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z. 1967. Bd 102, Heft 5. S. 337–339.
17. *D'Arcy P.* Locally defined Fitting classes // J. Austral. Math. Soc. 1975. V. 20, N 1. P. 25–31.
18. *Витько Е. А., Воробьев Н. Т.* О классах Фиттинга и холловых подгруппах конечных π-разрешимых групп // Весцi НАН Беларусi. Сер. физ.-мат. наук. 2011, № 1. С. 37–42.
19. *Fischer B.* Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen: Habilitationschrift. Frankfurt: Univ. Frankfurt (M), 1966.
20. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1964.
21. *Шеметков Л. А.* О подгруппах π-разрешимых групп // Конечные группы. Мн.: Наука и техника, 1975. С. 207–212.
22. *Сементовский В. Г.* Инъекторы конечных групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1984. С. 166–170.
23. *Lockett F. P.* The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. 1974. Bd 137, Heft 2. S. 131–136.
24. *Воробьёв Н. Т.* Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 3. С. 3–8.
25. *Hartley B.* On Fischer′s dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1959. V. 3, N 2. P. 193–207.
26. *Hauck P.* On products of Fitting classes // J. London Math. Soc. 1979. V. 20, N 3. P. 423–434.
27. *Hauck P.* Zur Theorie der Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen: Habilitationschrift. Mainz: Johannes Gutenberg-Univ. Mainz, 1977.
28. *Camina A. R.* A note of Fitting classes // Math. Z. 1974. Bd 136, Heft 4. S. 351–352.
29. *Revin D. O.* The classes of E_π-groups is nonradical // Book of abstracts of the Intern. Conf. on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov. Kyiv, 2012. P. 127.
30. *Guo W., Li B.* On the injectors of finite groups // J. Group Theory. 2008. V. 10, N 6. P. 849–852.

Статья поступила 10 апреля 2012 г., окончательный вариант — 24 апреля 2013 г.

Воробьев Сергей Николаевич, Залесская Елена Николаевна
Витебский гос. университет имени П. М. Машерова,
Московский пр., 33, Витебск 210038, Беларусь
belarus8889@mail.ru, alenushka0404@mail.ru