Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 514.70

ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СФЕРЫ S^{4n+3} С НАИБОЛЬШЕЙ СВЯЗНОЙ ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ $Sp(n+1) \cdot U(1)$

В. Н. Берестовский

Аннотация. Найдены все (новые) δ-однородные, в том числе не являющиеся нормальными однородными, инвариантные римановы метрики на сферах размерностей $4n+3, n \geq 1$, с наибольшей связной группой Ли изометрий $Sp(n+1) \times U(1)$ и всех накрываемых ими однородных (неодносвязных) линзовых пространствах. Все рассматриваемые здесь δ-однородные римановы пространства имеют положительные секционные кривизны и нулевую эйлерову характеристику. Получены ответы на некоторые поставленные ранее вопросы.

Ключевые слова: геодезически орбитальное пространство, геодезический вектор, δ-однородное пространство, δ-вектор, сфера, естественно редуктивное пространство, (обобщенное) нормальное однородное риманово пространство, однородное риманово расслоение, риманова субмерсия, тело кватернионов, эйлерова характеристика.

Введение

В статье продолжены исследования, начатые в [1].

Метрическое пространство (M, ρ) называется *δ-однородным* [2, 3], если для любых точек $x, y \in M$ существует изометрия f (*δ-x-перенос*) пространства (M, ρ) на себя такая, что $f(x) = y$ и f имеет максимальное смещение в точке x, т. е. $\rho(z, f(z)) \leq \rho(x, f(x)) = \rho(x, y)$ для любой точки $z \in M$. Очевидно, каждое δ-однородное метрическое пространство однородно. Связное риманово многообразие (M, μ) называется *δ-однородным*, если оно δ-однородно относительно своей внутренней метрики ρ_μ. При этом оно называется *G-δ-однородным* или *обобщенным G-нормальным однородным* [4], если изометрии f в определении δ-однородности можно брать из (под)группы Ли G изометрий пространства (M, μ). Каждое нормальное однородное риманово многообразие [5] δ-однородно; каждое δ-однородное риманово многообразие геодезически орбитально и имеет неотрицательную секционную кривизну [3]. Геодезически орбитальные римановы многообразия определены и изучались в [6].

Пусть $\mathbb{H}^{n+1}$— кватернионное векторное пространство с *каноническим скалярным произведением* $(v, w) = \Re(\bar{v}^T w)$, где $v, w \in \mathbb{H}^{n+1}$ — вектор-столбцы, а ^{T} и $\overline{(\cdot)}$ — операции транспонирования и кватернионного сопряжения матриц; $S^{4n+3} = S^{4n+3}(1) \subset (\mathbb{H}^{n+1}, (\cdot, \cdot))$ — единичная сфера с центром в нуле. Известно,

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00081–а).

что группа Ли $Sp(n+1)$ действует слева изометриями на $(\mathbb{H}^{n+1}, (\cdot,\cdot))$ и транзитивно и эффективно на сфере S^{4n+3} со стабилизатором $E_1 \times Sp(n) \subset Sp(n+1)$ в точке $v_0 = (1, 0, \dots, 0)^T \in S^{4n+3}$.

В [1] доказано, что если какое-нибудь однородное риманово многообразие $(Sp(n+1)/Sp(n), \mu)$ еще и $Sp(n+1)$-δ-однородно, то его группа изометрий содержит группу $Sp(n+1) \times Sp(1)$. Отсюда следует, в частности, что любое однородное риманово многообразие $(Sp(n+1)/Sp(n), \nu)$ с полной связной группой Ли движений $Sp(n+1)$ не δ-однородно.

Здесь группа $Sp(1)$ единичных кватернионов действует справа на $\mathbb{H}^{n+1}$ и S^{4n+3} по формуле

$$R_q((q_1, \dots, q_{n+1})^T) = (q_1 q, \dots, q_{n+1} q)^T, \quad q \in Sp(1). \tag{1}$$

Каждая такая метрика μ гомотетична некоторой единственной метрике из 1-параметрического семейства μ_t, $t > 0$. Метрики μ_t можно характеризовать следующими свойствами:

1) пространство орбит $(S^{4n+3}, \mu_t)/Sp(1)$ по описанному правому действию группы $Sp(1)$ с фактор-метрикой изометрично кватернионному проективному пространству $(\mathbb{H}P^n, \eta)$ с канонической метрикой η и секционными кривизнами в отрезке $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$;

2) (вполне геодезические) слои возникающей таким образом римановой субмерсии $\mathrm{pr} : (S^{4n+3}, \mu_t) \to (\mathbb{H}P^n, \eta)$ изометричны 3-мерным сферам постоянной секционной кривизны $\frac{1}{t}$.

В частности, μ_1 *индуцирована скалярным произведением* $(\cdot,\cdot)$ *на* $\mathbb{H}^{n+1}$ *и* (S^{4n+3}, μ_1) *имеет постоянную секционную кривизну* 1.

В [1] доказано, что римановы многообразия (S^{4n+3}, μ_t) δ-однородны тогда и только тогда, когда $0 < t \leq 1$, и не являются нормальными однородными относительно произвольной группы изометрий при $\frac{1}{2} < t < 1$.

Цель данной статьи — найти все δ-однородные римановы многообразия среди однородных римановых многообразий (S^{4n+3}, μ) с наибольшей связной группой Ли движений $Sp(n+1) \times U(1)$ и стабилизатором $Sp(n) \times U(1)$ в точке v_0, где $Sp(n+1) \subset Sp(n+1) \times U(1) \subset Sp(n+1) \times Sp(1)$.

Каждая метрика μ с такой группой движений гомотетична некоторой единственной метрике из 2-параметрического семейства $\mu_{t,s}$, $t, s > 0$, $t \neq s$, которое можно характеризовать следующим образом [7].

Существует единственная риманова метрика ν_t на $\mathbb{C}P^{2n+1}$, для которой естественная проекция (расслоение Хопфа)

$$\mathrm{pr}_1 : S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n) \to Sp(n+1)/(U(1) \times Sp(n)) = \mathbb{C}P^{2n+1} \tag{2}$$

является римановой субмерсией относительно римановой метрики μ_t на S^{4n+3} (с вполне геодезическими слоями-окружностями длины $2\pi\sqrt{t}$). Метрика $\mu_{t,s}$ получается умножением скалярного произведения в слоях субмерсии pr_1, индуцированного метрикой μ_t, на число $\frac{s}{t}$, $s \neq t$; во всех подпространствах $C_x \subset S^{4n+3}_x$, $x \in S^{4n+3}$, вещественной размерности $2(2n+1)$, ортогональных слоям субмерсии pr_1, оставляется скалярное произведение, индуцированное метрическим тензором μ_t.

В данной статье доказано, что сферы $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$ при $s \neq t$ δ-однородны тогда и только тогда, когда $0 < s < t$ и $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, и эти пространства нормальны однородны только тогда, когда $0 < s < t = \frac{1}{2}$. Доказано, что секционные кривизны δ-однородных римановых многообразий $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$ положительны. Эти результаты справедливы для всех накрываемых этими сферами (неодносвязных линзовых) пространств орбит относительно циклических подгрупп $\mathbb{Z}_k \subset U(1)$, $k > 1$.

Автор благодарен профессору Ю. Г. Никонорову за полезные дискуссии.

1. Предварительные результаты

Сначала дадим $\mathrm{Ad}(H)$-инвариантное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и описание римановых метрик $\mu_{t,s}$ для однородного пространства

$$S^{4n+3} = G/H = Sp(n+1)/Sp(n).$$

Вследствие простоты группы Ли $Sp(n+1)$ всякое $\mathrm{Ad}(Sp(n+1))$-инвариантное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{sp}(n+1)$ пропорционально

$$\langle U, V\rangle := -\Re(\mathrm{trace}(UV)). \tag{3}$$

Возникает $\mathrm{Ad}(Sp(n))$-инвариантное $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортогональное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n+1) = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(n), \tag{4}$$

где

$$\mathfrak{p}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\bar{u}^T \\ u & 0_n \end{pmatrix}, u \in \mathbb{H}^n \right\}. \tag{5}$$

При этом $\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{sp}(n+1)$ — алгебра Ли подгруппы Ли $Sp(1) \times Sp(n)$ и

$$[\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1] = \mathfrak{p}_1, \quad [\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{p}_1] = \mathfrak{p}_1, \quad [\mathfrak{p}_2, \mathfrak{sp}(n)] = 0, \quad [\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{sp}(n)] = \mathfrak{sp}(n). \tag{6}$$

Второе и третье равенства в (6) означают, что группа $\mathrm{Ad}(Sp(n))$ действует неприводимо на первом слагаемом суммы (4), а на $\mathfrak{p}_2 := \mathfrak{sp}(1) = \{u_1 \in \Im(\mathbb{H})\}$ действует тривиально.

Можно считать, что алгебра Ли группы Ли $K = U(1)$ имеет вид $\mathfrak{k} = \mathfrak{p}_{2,2} = \mathbb{R}i \subset \mathfrak{p}_2$. Ее $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортогональным дополнением в $\mathfrak{p}_2$ является подпространство $\mathfrak{p}_{2,1} = \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$. При этом $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_{2,1}] = \mathfrak{p}_{2,1}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_{2,2}] = 0$, что означает, что $\mathrm{Ad}(K)$ действует неприводимо на $\mathfrak{p}_{2,1}$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортогональными вращениями), а на $\mathfrak{p}_{2,2}$ — тривиально.

Для каждого фиксированного элемента $U \in \mathfrak{sp}(n+1)$ вектор-функция $U(v) = Uv$, $v \in S^{4n+3}$, — киллингово векторное поле на S^{4n+3} для любой $Sp(n+1)$-инвариантной римановой метрики, в частности, для всех $\mu_{t,s}$. Вследствие транзитивности группы $Sp(n+1)$ на S^{4n+3} $\{Uv : U \in \mathfrak{sp}(n+1)\}$ — касательное пространство к S^{4n+3} в точке v для фиксированного вектора $v \in S^{4n+3}$. При этом

$$Uv_0 = (u_1, u^T)^T, \quad v_0 = (1, 0, \dots, 0)^T, \tag{7}$$

где $u_1 \in \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{sp}(1)$, а u определяет элемент из $\mathfrak{p}_1$ по формуле (5).

В силу (7) соответствие $U \in \mathfrak{p} \to Uv_0$ определяет изоморфизм векторных пространств $\mathfrak{p}$ и $S^{4n+3}_{v_0}$, посредством которого мы их отождествляем. Нетрудно заметить, что

$$\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_1\times\mathfrak{p}_1} = 2(\cdot,\cdot)|_{\mathfrak{p}_1\times\mathfrak{p}_1}, \quad \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_2\times\mathfrak{p}_2} = (\cdot,\cdot)|_{\mathfrak{p}_1\times\mathfrak{p}_1}. \tag{8}$$

Вследствие этого и сказанного ранее риманова метрика $\mu_{t,s} (:= \mu_{\frac{1}{2},t,s})$ определяется $\mathrm{Ad}(Sp(n))$-инвариантным скалярным произведением

$$(\cdot,\cdot)_{t,s} := \frac{1}{2}\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_1\times\mathfrak{p}_1} + t\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_{2,1}\times\mathfrak{p}_{2,1}} + s\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_{2,2}\times\mathfrak{p}_{2,2}} \tag{9}$$

на $\mathfrak{p}$. Норму, индуцируемую римановой метрикой $\mu_{t,s}$ на каждом касательном пространстве S^{4n+3}_v, $v \in S^{4n+3}$ (соответственно каноническим скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ на любом пространстве $\mathbb{H}^m$), будем обозначать через $\|\cdot\|$ (соответственно через $|\cdot|$). Пусть $u_{1,1}$, $u_{1,2}$ обозначают компоненты вектора $u_1 \in \mathfrak{p}_2$ в прямой сумме $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_{2,1} \oplus \mathfrak{p}_{2,2}$. На основании формул (8) и (9) получаем, что

$$\|Uv_0\|^2 = t|u_{1,1}|^2 + s|u_{1,2}|^2 + |u|^2. \tag{10}$$

Теорема 1. *Риманово пространство* $((Sp(n+1)\times U(1))/(Sp(n)\times U(1)), \mu_{t,s})$ *нормально однородно тогда и только тогда, когда* $0 < s < t = \frac{1}{2}$, *и естественно редуктивно* [7] *тогда и только тогда, когда* $t = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Нам нужна некоторая вариация доказательств теоремы 3 из статьи В. Циллера [9] и теоремы 1 из [1] (см. также [10]).

Группу $Sp(n+1)\times U(1)$ и пространство $Sp(n+1)/Sp(n)$ обозначим через $\overline{G} = G \times K$ и G/H. Группа $\overline{G}$ действует слева на G/H, где элемент $(g,k) \in \overline{G}$ действует левым умножением на g и правым умножением на k^{-1}. Группа изотропии $\overline{H}$ этого действия изоморфна $H \times K$ с вложением $(h,k) \to (hk,k)$. Тогда $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_{2,1} \oplus \mathfrak{p}_{2,2} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$ вследствие (4) и разложения $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_{2,1} \oplus \mathfrak{p}_{2,2}$ и

$$\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \{(Y,Y) \in \mathfrak{p}_{2,2} \oplus \mathfrak{k} \mid Y \in \mathfrak{p}_{2,2} \cong \mathfrak{k}\}. \tag{11}$$

В качестве $\mathrm{Ad}(\overline{H})$-инвариантного дополнения к $\bar{\mathfrak{h}}$ выбирается

$$\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_{2,1} \oplus \bar{\mathfrak{p}}_2, \quad \text{где } \bar{\mathfrak{p}}_2 = \{(aX, bX) \in \mathfrak{p}_{2,2} \oplus \mathfrak{k} \mid X \in \mathfrak{p}_{2,2} \cong \mathfrak{k}\}. \tag{12}$$

Здесь $a > 0$ и $a - b = 1$; тогда изоморфизм между $\overline{G}/\overline{H}$ и G/H на уровне алгебр Ли переводит $\mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_{2,1}$ в себя тождественным отображением и $(aX, bX) \to aX - bX = X \in \mathfrak{p}_{2,2}$. На $\mathfrak{p}$ рассматривается скалярное произведение $2(\cdot,\cdot)_{t,s}$ (см. (9)).

Так как подгруппы G и K группы $\overline{G}$ взаимно коммутируют, G простая, а K одномерная, всякая $\mathrm{Ad}(\overline{G})$-инвариантная симметричная билинейная форма $\{\cdot,\cdot\}$ на $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{k}$ должна быть прямой суммой форм (на $\{\cdot,\cdot\}$-ортогональных слагаемых $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$), пропорциональных скалярным произведениям вида (3). Положим $a = 2s$, $b = 2s - 1$,

$$\{\cdot,\cdot\}_{2s} = \langle\cdot,\cdot\rangle \oplus -\frac{a}{b}\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle \oplus -\frac{2s}{2s-1}\langle\cdot,\cdot\rangle, \tag{13}$$

предполагая, что $s \neq \frac{1}{2}$. Ясно, что тогда билинейная форма (13) невырожденна, $\mathrm{Ad}(\overline{G})$-инвариантна,

$$\{\mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_{2,1}, \bar{\mathfrak{h}}\}_{2s} = 0, \quad \{\mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_{2,1}, \bar{\mathfrak{p}}_2\}_{2s} = 0$$

и вследствие (9)

$$2(\cdot,\cdot)_{t,s}|_{\mathfrak{p}_1\times\mathfrak{p}_1} = \{\cdot,\cdot\}_{2s}|_{\mathfrak{p}_1\times\mathfrak{p}_1}, \quad 2(\cdot,\cdot)_{t,s}|_{\mathfrak{p}_{2,1}\times\mathfrak{p}_{2,1}} = 2t\{\cdot,\cdot\}_{2s}|_{\mathfrak{p}_{2,1}\times\mathfrak{p}_{2,1}}. \tag{14}$$

Из формул (11)–(13) вытекает, что $\{\bar{\mathfrak{p}}_2, \bar{\mathfrak{h}}\}_{2s} = 0$. Таким образом, при $s \neq \frac{1}{2}$ получается $\{\cdot,\cdot\}_{2s}$-ортогональное разложение в прямую сумму

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_{2,1} \oplus \bar{\mathfrak{p}}_2 \oplus \bar{\mathfrak{h}}. \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{gathered}
[\bar{\mathfrak{h}}, \bar{\mathfrak{h}}] \subset \bar{\mathfrak{h}}, \quad [\bar{\mathfrak{h}}, \mathfrak{p}_1] \subset \mathfrak{p}_1, \quad [\bar{\mathfrak{h}}, \mathfrak{p}_{2,1}] \subset \mathfrak{p}_{2,1}, \quad [\bar{\mathfrak{h}}, \bar{\mathfrak{p}}_2] = 0, \\
[\bar{\mathfrak{p}}_2, \bar{\mathfrak{p}}_2] = 0, \quad [\bar{\mathfrak{p}}_2, \mathfrak{p}_1] \subset \mathfrak{p}_1, \quad [\bar{\mathfrak{p}}_2, \mathfrak{p}_{2,1}] \subset \mathfrak{p}_{2,1}, \quad [\mathfrak{p}_{2,1}, \mathfrak{p}_{2,1}] \subset \mathfrak{p}_{2,2}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Предположим теперь, что $(aX, bX), (aY, bY) \in \bar{\mathfrak{p}}_2$, где $X, Y \in \mathfrak{p}_{2,2}$. Тогда вследствие формулы (13)

$$\{(aX, bX), (aY, bY)\}_{2s} = (a^2 - ab)\langle X, Y\rangle = a\langle X, Y\rangle = 2s\langle X, Y\rangle = 2(X, Y)_{t,s}. \quad (17)$$

По критерию Костанта [11, 12] однородное риманово пространство $(G/H, \mu)$ естественно редуктивно тогда и только тогда, когда существует $\mathrm{Ad}(H)$-инвариантное разложение в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$ такое, что на связной подгруппе Ли $G' \subset G$ с алгеброй Ли — идеалом $\mathfrak{g}' = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{g}$ — существует невырожденная биинвариантная симметричная форма $\{\cdot, \cdot\}$, ограничение которой на $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ совпадает со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, определяющим метрику μ, причем алгебра Ли $\mathfrak{h}'$ стабилизатора $H' = H \cap G'$ группы Ли G' ортогональна $\mathfrak{p}$ относительно $\{\cdot, \cdot\}$.

Проведенные рассуждения показывают, что форма, удовлетворяющая критерию Костанта, должна совпадать с формой $\{\cdot, \cdot\}_{2s}$. Вследствие формул (14), (17) пространство $((Sp(n+1) \times Sp(1))/(Sp(n) \times Sp(1)), 2\mu_{t,s})$ естественно редуктивно при $s \neq \frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда $t = \frac{1}{2}$. Формула (13) показывает, что форма $\{\cdot, \cdot\}_{2s}$ положительно определена при $0 < s < \frac{1}{2}$ и неопределенна при $s > \frac{1}{2}$. Поэтому пространство $((Sp(n+1) \times Sp(1))/(Sp(n) \times Sp(1)), 2\mu_{t,s})$ нормально однородно тогда и только тогда, когда $0 < s < t = \frac{1}{2}$. Очевидно, что все доказанные здесь утверждения справедливы и для однородного пространства $((Sp(n+1) \times Sp(1))/(Sp(n) \times Sp(1)), \mu_{t,s})$.

Если $s = \frac{1}{2}$, то $\bar{\mathfrak{p}}_2 = \mathfrak{p}_2$ и $\bar{p} = p$ вследствие формулы (12) и равенства $b = 2s - 1 = 0$, причем $(\{\cdot, \cdot\}_{2s})_{\bar{\mathfrak{p}} \times \bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$. Поэтому на основании (4) и (6) все рассуждения в силе и для случая $s = \frac{1}{2}$.

Предложение 1. *Пространство* $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$ *не слабо симметрично* (*см.* [13]) *относительно группы* $Sp(n+1) \times U(1)$.

Доказательство. По определению риманово многообразие (M, μ) *слабо симметрично* (относительно группы движений G), если для любых двух точек в M существует изометрия (из группы G), переставляющая эти точки. Ясно, что каждое слабо симметрическое риманово многообразие однородно. Несложное рассуждение (см., например, [14]) показывает, что связное однородное риманово многообразие $(M = G/H, \mu)$ слабо симметрично относительно группы Ли G тогда и только тогда, когда для каждого касательного вектора u к M в точке $x = H$ существует элемент $h \in H$ такой, что $dh(u) = -u$. Здесь dh — дифференциал отображения h. Стабилизатор $H := Sp(n) \times U(1)$ группы Ли $G := Sp(n+1) \times U(1)$ в точке $v_0 = (1, 0, \ldots, 0)^T \in S^{4n+3}$ связен и переводит в себя точку v_0 и одномерный слой-окружность S^1 расслоения Хопфа pr_1 (см. формулу (2)), содержащий точку v_0. Поэтому все элементы $h \in H$ фиксируют все точки в S^1. Следовательно, для ненулевого касательного вектора u к S^1 в точке v_0 не существует элемента $h \in H$ такого, что $dh(u) = -u$, и пространство $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$ не слабо симметрично относительно группы $Sp(n+1) \times U(1)$.

Замечание 1. Тем не менее все пространства $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$, $s \neq t$, слабо симметричны относительно полной (несвязной) группы Ли движений (см, например, [15] или [16]).

2. Геодезические векторы

Воспользуемся результатами, полученными в ходе доказательства теоремы 1. Если риманово пространство $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$ δ-однородно, то оно $Sp(n+1) \times$

$U(1)$-δ-однородно, так как $Sp(n+1)\times U(1)$ — наибольшая связная группа Ли изометрий пространства $(S^{4n+3},\mu_{t,s})$.

Как и раньше, группу Ли $Sp(n+1)\times U(1)$ будем обозначать через $\overline{G}=G\times K$. Из определения пространства $\bar{\mathfrak{p}}$ в (12) следует, что каждый его элемент имеет вид

$$X+Y+W=\begin{pmatrix} u_{1,1}+2su_{1,2} & -\bar{u}^T \\ u & 0_{nn}\end{pmatrix}+(2s-1)u_{1,2}, \qquad u_{1,1}\in\mathbb{R}j\oplus\mathbb{R}k,\quad u_{1,2}\in\mathbb{R}i,\ u\in\mathbb{H}^n, \tag{18}$$

где

$$X=\begin{pmatrix} 0 & -\bar{u}^T \\ u & 0_{nn}\end{pmatrix}\in\mathfrak{p}_1, \tag{19}$$

$$Y=\begin{pmatrix} u_{1,1} & 0_n^T \\ 0_n & 0_{nn}\end{pmatrix}\in\mathfrak{p}_{2,1}, \tag{20}$$

$$W=\begin{pmatrix} 2su_{1,2} & 0_n^T \\ 0_n & 0_{nn}\end{pmatrix}+(2s-1)u_{1,2}\in\bar{\mathfrak{p}}_2. \tag{21}$$

Аналогично каждый элемент алгебры Ли $\bar{\mathfrak{h}}$ имеет вид

$$Z=\begin{pmatrix} \alpha & 0_n^T \\ 0_n & U_{nn}\end{pmatrix}+\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}i,\ U_{nn}\in\mathfrak{sp}(n). \tag{22}$$

Выше нижние индексы указывают размер матрицы или вектор-столбца.

Будем обозначать через Uv значение в точке $v=(q_1,\dots,q_{n+1})^T\in S^{4n+3}$ киллингова векторного поля на $(S^{4n+3},2\mu_{t,s})$, определяемого произвольным элементом $U\in\bar{\mathfrak{g}}$. Нетрудно вычислить, что $(X+Y+W)v_0=(u_{1,1}+u_{1,2},u^T)^T$ для $v_0=\left(1,0_n^T\right)^T\in S^{4n+3}$. Формула (18) показывает, что $X+Y+W$ однозначно определяется этим условием.

Вследствие [3] интересующий нас вопрос эквивалентен следующему: для каких чисел t,s для каждого вектора $X+Y+W\in\bar{\mathfrak{p}}$ можно найти такой вектор $Z\in\bar{\mathfrak{h}}$, что элемент $U=X+Y+W+Z\in\bar{\mathfrak{g}}$ является δ-*вектором*, т. е. для всех точек $v\in S^{4n+3}$ выполняется неравенство

$$\|Uv_0\|^2\geq\|Uv\|^2, \tag{23}$$

где левая часть неравенства равна (10)?

Подсчитаем $\|Uv\|^2$ для произвольных элементов $U\in\bar{\mathfrak{g}}$ и $v\in S^{4n+3}$. Сначала предположим, что $s=t>0$. Каждый вектор, касательный к слою $\mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{pr}(v))=\{vq\mid q\in Sp(1)\}$ в точке v, имеет вид vu, $u\in\mathfrak{sp}(1)=\Im(\mathbb{H})$. Для каждого чисто мнимого кватерниона $u=u_{1,1}+u_{1,2}\in\Im(\mathbb{H})$ скалярное произведение векторов vu и Uv в пространстве $(\mathbb{H}^{n+1},(\cdot,\cdot))$ равно

$$\Re(\overline{vu}^TUv)=\Re(\bar{u}\cdot\bar{v}^TUv)=\Re(-u(\bar{v}^TUv)).$$

Кроме того, $\bar{v}^TUv$ — чисто мнимый кватернион, так как матричная часть элемента U содержится в $\mathfrak{sp}(n+1)$, а действие его нематричной части на v сводится к умножению справа на кватернион из $\mathbb{R}i$. Тогда $|\bar{v}^TUv|^2$ — квадрат евклидовой нормы ортогональной проекции касательного вектора $Uv\in S_v^{4n+3}$ на касательное пространство к слою проекции pr в точке v. По теореме Пифагора $\|Uv\|^2=|Uv|^2+(t-1)|\bar{v}^TUv|^2$. Предположим теперь, что $s\neq t$. Снова применяя теорему Пифагора, видим, что к правой части последнего равенства нужно добавить $(s-t)|(\bar{v}^TUv,i)|^2$.

Учитывая все сказанное выше, получаем, что неравенство (23) приобретает вид

$$t|u_{1,1}|^2 + s|u_{1,2}|^2 + |u_2|^2 \geq |Uv|^2 + (t-1)|\bar{v}^T Uv|^2 + (s-t)|(\bar{v}^T Uv, i)|^2. \qquad (24)$$

Всякий δ-вектор $U \in \bar{\mathfrak{g}}$ является и *геодезическим вектором*, т. е. орбита точки v_0 относительно 1-параметрической подгруппы в $\overline{G}$ с касательным вектором $U \in \bar{\mathfrak{g}}$ есть геодезическая в $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$ с касательным вектором Uv_0 [3].

Предложение 2. *Элемент $U = X+Y+W+Z \in \bar{g}$ является геодезическим вектором для $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$[X,Z] = (2t-1)[X,Y], \quad [Z,Y] = -\frac{2t-1}{2t}[W,Y]. \qquad (25)$$

Для каждого вектора $X+Y+W \in \bar{p}$ существует элемент $Z \in \bar{h}$, удовлетворяющий условиям (25). *Следовательно, риманово многообразие $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$ геодезически орбитально* [6].

Доказательство. Предположим, что $s \neq \frac{1}{2}$. Тогда $\mathrm{Ad}(Sp(n+1)\times U(1))$-инвариантная билинейная форма (13) корректно определена и невырожденна, но является неопределенной при $s > \frac{1}{2}$. Напомним, что разложение (15) $\{\cdot,\cdot\}_{2s}$-ортогонально и удовлетворяет соотношениям (16).

Вследствие [6, 3] элемент $U = X+Y+W+Z \in \bar{g}$ является геодезическим вектором для $(S^{4n+3}, 2\mu_{t,s})$ тогда и только тогда, когда для каждого $V \in \bar{g}$ соблюдается равенство $2(X+Y+W, [V, X+Y+W+Z]_{\bar{p}})_{t,s} = 0$ (см. (9)). В силу формул (14), (17) и $\{\cdot,\cdot\}_{2s}$-ортогональности разложения (15)

$$\begin{aligned} 0 &= 2(X+Y+W, [V, X+Y+W+Z]_{\bar{p}})_{t,s} \\ &= \{X, [V, X+Y+W+Z]\}_{2s} + 2t\{Y, [V, X+Y+W+Z]\}_{2s} + \{W, [V, X+Y+W+Z]\}_{2s} \\ &= \{[X+Y+W+Z, X], V\}_{2s} + 2t\{[X+Y+W+Z, Y], V\}_{2s} + \{[X+Y+W+Z, W], V\}_{2s} \\ &= \{(2t-1)[X,Y] + [Z,X] + (2t-1)[W,Y] + 2t[Z,Y], V\}_{2s}. \end{aligned}$$

Сумма первых двух слагаемых и сумма последних двух слагаемых в левом сомножителе скалярного произведения лежат во взаимно $\{\cdot,\cdot\}_{2s}$-ортогональных пространствах $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_{2,1}$. Вследствие произвольности $V \in \bar{g}$ получаем два равенства в (25).

Покажем, что всегда можно найти вектор $Z \in \bar{h}$, удовлетворяющий равенствам (25), и найдем все такие векторы. Используя формулы (19)–(22), находим

$$[X,Y] = \begin{pmatrix} 0 & u_{1,1}\bar{u}^T \\ uu_{1,1} & 0_{nn} \end{pmatrix}, \quad [X,Z] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\bar{u}^T - \bar{u}^T U_{nn} \\ u\alpha - U_{nn}u & 0_{nn} \end{pmatrix},$$

$$[Z,Y] = \begin{pmatrix} [\alpha, u_{1,1}] & 0_n^T \\ 0_n & 0_{nn} \end{pmatrix}, \quad [W,Y] = \begin{pmatrix} 2s[u_{1,2}, u_{1,1}] & 0_n^T \\ 0_n & 0_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вследствие этих вычислений и формул (25), (18), (22)

$$\alpha = -\frac{s(2t-1)}{t}u_{1,2}, \quad U_{nn}u = u(\alpha - (2t-1)u_{1,1}) = -(2t-1)u\left(\frac{s}{t}u_{1,2} + u_{1,1}\right). \qquad (26)$$

Остается убедиться, что можно найти матрицу $U_{nn} \in \mathfrak{sp}(n)$, удовлетворяющую второму равенству в (26), и найти все такие матрицы.

Если $u = 0$, можно взять любую матрицу $U_{nn} \in \mathfrak{sp}(n)$. Предположим, что $u \neq 0$, и рассмотрим сначала случай, когда $u = (u_2, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{H}^n$, где $0 < u_2 \in \mathbb{R}$. Легко видно, что в этом случае все нужные матрицы имеют вид

$$U_{nn} = \begin{pmatrix} -(2t-1)\big(\frac{s}{t}u_{1,2} + u_{1,1}\big) & 0_{n-1}^T \\ 0_{n-1} & U_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где $U_{(n-1)(n-1)}$ — произвольная матрица из $\mathfrak{sp}(n-1)$. С учетом формул (26), опуская детали вычислений, получаем, что

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} + \frac{s}{t}u_{1,2} & -u_2 & 0_{n-1}^T \\ u_2 & -(2t-1)\big(u_{1,1} + \frac{s}{t}u_{1,2}\big) & 0_{n-1}^T \\ 0_{n-1} & 0_{n-1} & U_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} + \left(\frac{s}{t} - 1\right)u_{1,2}. \tag{28}$$

Пусть $u \in \mathbb{H}^n$, $|u| > 0$. Группа $Sp(n)$ действует транзитивно на каждой сфере в $(\mathbb{H}^n, (\cdot,\cdot))$ с центром в нуле. Поэтому существует элемент $g \in Sp(n)$ такой, что $g(|u|, 0, \dots, 0)^T = u$. Тогда все нужные матрицы имеют вид $U'_{nn} = \mathrm{Ad}(g)(U_{nn})$, где U_{nn} из (27). Применяя последний абзац доказательства теоремы 1, видим, что предложение 2 и полученные формулы верны и в случае $s = \frac{1}{2}$.

Ясно, что предложение 2 справедливо и для риманова пространства $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$; все формулы для геодезического вектора $X + Y + W + Z$ для заданного элемента $X + Y + W \in \bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ сохраняются.

Замечание. Ю. Г. Никоноров доказал последнее утверждение предложения 2 другим способом (в еще не опубликованной статье).

3. Априорные ограничения

Предложение 3. *Если сфера $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$, где $s \neq t$, δ-однородна, то $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ и $0 < s < t$.*

Доказательство. Доказательство начнем со случая $n = 1$. Тогда форма (28) геодезического вектора редуцируется к виду

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} + \frac{s}{t}u_{1,2} & -u_2 \\ u_2 & -(2t-1)\big(u_{1,1} + \frac{s}{t}u_{1,2}\big) \end{pmatrix} + \left(\frac{s}{t} - 1\right)u_{1,2}, \tag{29}$$

где $u_2 \geq 0$. Для точки $v = (q_1, q_2)^T \in S^7$ получаем

$$U\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \big(u_{1,1} + \frac{s}{t}u_{1,2}\big)q_1 - u_2q_2 + \big(1 - \frac{s}{t}\big)q_1u_{1,2} \\ u_2q_1 - (2t-1)\big(u_{1,1} + \frac{s}{t}u_{1,2}\big)q_2 + \big(1 - \frac{s}{t}\big)q_2u_{1,2} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}^T U v = \overline{q_1}\bigg[&\left(u_{1,1} + \frac{s}{t}u_{1,2}\right)q_1 - u_2q_2 + \left(1 - \frac{s}{t}\right)q_1u_{1,2}\bigg] \\ &+ \overline{q_2}\bigg[u_2q_1 - (2t-1)\left(u_{1,1} + \frac{s}{t}u_{1,2}\right)q_2 + \left(1 - \frac{s}{t}\right)q_2u_{1,2}\bigg]. \end{aligned} \tag{31}$$

Нам нужно исследовать неравенство (24).

Пусть $u_{1,1} = j$, $u_{1,2} = 0$, $u_2 = 0$, $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + k)$, $q_2 = 0$. Тогда

$$Uv = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i + j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}^T U v = \frac{1}{2}(1 - k)(i + j) = \frac{1}{2}(i + j - j + i) = i.$$

Неравенство (24) приобретает вид $t \geq 1 + (t-1) \cdot 1 + (s-t) \cdot 1 = s \Longleftrightarrow s \leq t$. С учетом условия $s \neq t$ выводим, что $0 < s < t$. Это доказательство предложил Ю. Г. Никоноров.

Положим

$$u_{1,1} = j,\ u_{1,2} = i,\ u_2 = \frac{s}{\sigma},\ q_1 = \frac{\sigma i}{\sqrt{1+\sigma^2}},\ q_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}, \quad \text{где } \sigma \in \mathbb{R},\ \sigma > 0.$$

Опуская некоторые детали вычислений, получаем

$$Uv = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} \begin{pmatrix} -\frac{s}{\sigma} - \sigma - \sigma k \\ (1-s)i - (2t-1)j \end{pmatrix},$$

$$|Uv|^2 = \frac{1}{1+\sigma^2}\left[\left(\frac{s}{\sigma} + \sigma\right)^2 + \sigma^2 + (1-s)^2 + (2t-1)^2\right] = 2 + \frac{s^2}{\sigma^2} + \frac{4t(t-1)}{1+\sigma^2},$$

$$\bar{v}^T Uv = \frac{1}{1+\sigma^2}[-\sigma^2 j + (s+\sigma^2)i + (1-s)i - (2t-1)j] = i - \frac{2t-1+\sigma^2}{1+\sigma^2} j,$$
$$(\bar{v}^T Uv, i) = 1.$$

Неравенство (25) приобретает вид

$$t + s + \frac{s^2}{\sigma^2} \geq 2 + \frac{s^2}{\sigma^2} + \frac{4t(t-1)}{1+\sigma^2} + (t-1)\left[1 + \frac{(2t-1+\sigma^2)^2}{(1+\sigma^2)^2}\right] + (s-t) \cdot 1.$$

После перенесения левой части в правую получим неравенство

$$0 \geq (t-1)\left[-1 + \frac{4t}{1+\sigma^2} + \frac{(2t-1+\sigma^2)^2}{(1+\sigma^2)^2}\right] = \frac{4(t-1)}{1+\sigma^2}\left[\frac{t^2 + \sigma^2(2t-1)}{1+\sigma^2}\right].$$

Следовательно, при всех $\sigma > 0$ должно выполняться неравенство

$$(t-1)\left[\frac{t^2 + \sigma^2(2t-1)}{1+\sigma^2}\right] \leq 0.$$

Переходя к пределу при $\sigma \to +\infty$, получаем соотношения $(t-1)(2t-1) \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Рассмотрим теперь общий случай $n \geq 2$. Возьмем касательный вектор к S^{4n+3} вида $(u_{1,1} + u_{1,2}, u_2, 0, \dots, 0)^T$ в точке v_0. Из формулы (28) видим, что для любого геодезического вектора $U = X + Y + W + Z \in \bar{\mathfrak{g}}$, где $X + Y + W$ из формулы (18) определяется вектором $(u_{1,1} + u_{1,2}, u_2, 0, \dots, 0)^T$, последние $n-1$ элементов первых двух строк и первых двух столбцов $((n+1) \times (n+1))$-матрицы, входящей в запись вектора U, равны нулю. При этом входящая в нее (2×2)-матрица в левом верхнем углу, как и элемент из $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(1)$ вне всей матрицы, входящий в запись вектора U, имеют тот же вид, что и в случае $n = 1$. Вследствие этого при тех же выборах точек вида $(q_1, q_2, 0, \dots, 0)^T$ в $S^7 \subset S^{4n+3}$ и элементов $u_{1,1}, u_{1,2}, u_2$, что и выше, неравенство (25) дает требуемые неравенства $0 < s < t$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, если риманова сфера $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$ δ-однородна.

4. Сфера $(S^7, \mu_{t,s})$ при $0 < s < t$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$

Начнем вычисления со случая $n = 1$.

Известно, что множество δ-векторов для однородного риманова многообразия с полной связной транзитивной группой Ли движений в данной точке инвариантно относительно линейной группы изотропии в этой точке [3]. Группы $\mathrm{Ad}(U(1))$, $Sp(1) \subset \overline{H}$ действуют транзитивно на каждом множестве векторов данной длины относительно скалярного произведения (3) соответственно в $\mathfrak{p}_{2,1}$ и $\mathbb{H}$. Поэтому достаточно выяснить, выполняется ли при $n = 1$, $0 < s < t$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ неравенство (25) при произвольных заданных

$$u_{1,1} = lj, \quad l \geq 0; \quad u_{1,2} = mi, \quad m \in \mathbb{R}; \quad u_2 \geq 0; \quad v = (q_1, q_2)^T \in S^7 \tag{32}$$

для соответствующего геодезического вектора U.

Вследствие формул (30) и (31) для точки $v = (q_1, q_2)^T \in S^7$ получаем

$$U \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigl(lj + \frac{s}{t}mi\bigr)q_1 - u_2 q_2 + \bigl(1 - \frac{s}{t}\bigr)q_1 mi \\ u_2 q_1 - (2t-1)\bigl(lj + \frac{s}{t}mi\bigr)q_2 + \bigl(1 - \frac{s}{t}\bigr)q_2 mi \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}^T U v = \overline{q_1}\biggl[\biggl(lj + \frac{s}{t}mi\biggr)q_1 - u_2 q_2 + \biggl(1 - \frac{s}{t}\biggr)q_1 mi\biggr] \\ + \overline{q_2}\biggl[u_2 q_1 - (2t-1)\biggl(lj + \frac{s}{t}mi\biggr)q_2 + \biggl(1 - \frac{s}{t}\biggr)q_2 mi\biggr]. \end{aligned} \tag{34}$$

Достаточно проверить, что неравенство (25) выполняется в случае $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$; тогда по непрерывности оно будет выполняться и при $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$.

Введем обозначения

$$q_1 = \frac{|q_1|}{|q_2|} q q_2, \ q \in \mathbb{H}, \ |q| = 1; \quad w = \frac{q_2}{|q_2|}.$$

Отсюда и из (34) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{v}^T U v = |q_1|^2 \overline{w} \cdot \bar{q}\biggl(lj + \frac{s}{t}mi\biggr)q \cdot w - (2t-1)|q_2|^2 \overline{w}\biggl(lj + \frac{s}{t}mi\biggr)w \\ + 2u_2|q_1||q_2|\Im(\overline{w}qw) + \biggl(1 - \frac{s}{t}\biggr)mi. \end{aligned} \tag{35}$$

Вследствие (33)

$$\begin{aligned} |Uv|^2 &= |q_1|^2\biggl(l^2 + \frac{s^2}{t^2}m^2\biggr) + |u_2|^2|q_2|^2 + |q_1|^2\biggl(\frac{t-s}{t}\biggr)^2 m^2 \\ &+ |u_2|^2|q_1|^2 + (2t-1)^2|q_2|^2\biggl(l^2 + \frac{s^2}{t^2}m^2\biggr) + |q_2|^2\biggl(\frac{t-s}{t}\biggr)^2 m^2 \\ &- 2u_2|q_1||q_2|\biggl(lj + \frac{s}{t}mi, \bar{q}\biggr) + 2\biggl(\frac{t-s}{t}\biggr)|q_1|^2 m\biggl(\bar{q}\biggl(lj + \frac{s}{t}mi\biggr)q, wi\overline{w}\biggr) \\ &- 2u_2|q_1||q_2|\biggl(\frac{t-s}{t}\biggr)m(\bar{q}, wi\overline{w}) - 2u_2(2t-1)|q_1||q_2|\biggl(lj + \frac{s}{t}mi, q\biggr) \\ &+ 2u_2|q_1||q_2|\biggl(\frac{t-s}{t}\biggr)m(q, wi\overline{w}) - 2(2t-1)\biggl(\frac{t-s}{t}\biggr)|q_2|^2 m\biggl(lj + \frac{s}{t}mi, wi\overline{w}\biggr) \\ &= \biggl(l^2 + \frac{s^2}{t^2}m^2\biggr) + 4t(t-1)|q_2|^2\biggl(l^2 + \frac{s^2}{t^2}m^2\biggr) + |u_2|^2 + \biggl(\frac{t-s}{t}\biggr)^2 m^2 \\ &+ 4u_2(1-t)|q_1||q_2|\biggl(lj + \frac{s}{t}mi, q\biggr) + 2\biggl(\frac{t-s}{t}\biggr)|q_1|^2 m\biggl(\bar{q}\biggl(lj + \frac{s}{t}mi\biggr)q, wi\overline{w}\biggr) \end{aligned}$$

$$+ 4u_2|q_1||q_2|\left(\frac{t-s}{t}\right)m(\Im(q), wi\overline{w}) - 2(2t-1)\left(\frac{t-s}{t}\right)|q_2|^2 m\left(lj + \frac{s}{t}mi, wi\overline{w}\right).$$

На основании формулы (35) получаем

$$|\bar{v}^T U v|^2 = |q_1|^4\left(l^2 + \frac{s^2}{t^2}m^2\right) + (2t-1)^2|q_2|^4\left(l^2 + \frac{s^2}{t^2}m^2\right) + \left(\frac{t-s}{t}\right)^2 m^2$$
$$+ 4|u_2|^2|q_1|^2|q_2|^2|\Im(q)|^2 - 2(2t-1)|q_1|^2|q_2|^2\left(\bar{q}\left(lj + \frac{s}{t}mi\right)q, lj + \frac{s}{t}mi\right)$$
$$+ 4u_2|q_1|^3|q_2|\left(lj + \frac{s}{t}mi, q\right) + 2|q_1|^2\left(\frac{t-s}{t}\right)m\left(\bar{q}\left(lj + \frac{s}{t}mi\right)q, wi\overline{w}\right)$$
$$- 4u_2(2t-1)|q_1||q_2|^3\left(lj + \frac{s}{t}mi, q\right)$$
$$- 2(2t-1)\left(\frac{t-s}{t}\right)|q_2|^2 m\left(lj + \frac{s}{t}mi, wi\overline{w}\right) + 4u_2|q_1||q_2|\left(\frac{t-s}{t}\right)m(\Im(q), wi\overline{w})$$
$$= \left(l^2 + \frac{s^2}{t^2}m^2\right) - 2|q_1|^2|q_2|^2\left(l^2 + \frac{s^2}{t^2}m^2\right)$$
$$+ 4t(t-1)|q_2|^4\left(l^2 + \frac{s^2}{t^2}m^2\right) + \left(\frac{t-s}{t}\right)^2 m^2$$
$$+ 4|u_2|^2|q_1|^2|q_2|^2|\Im(q)|^2 - 2(2t-1)|q_1|^2|q_2|^2\left(\bar{q}\left(lj + \frac{s}{t}mi\right)q, lj + \frac{s}{t}mi\right)$$
$$+ 4u_2|q_1||q_2|\left(lj + \frac{s}{t}mi, q\right) - 8u_2 t|q_1||q_2|^3\left(lj + \frac{s}{t}mi, q\right)$$
$$+ 2|q_1|^2\left(\frac{t-s}{t}\right)m\left(\bar{q}\left(lj + \frac{s}{t}mi\right)q, wi\overline{w}\right)$$
$$- 2(2t-1)\left(\frac{t-s}{t}\right)|q_2|^2 m\left(lj + \frac{s}{t}mi, wi\overline{w}\right) + 4u_2|q_1||q_2|\left(\frac{t-s}{t}\right)m(\Im(q), wi\overline{w}).$$

В рассматриваемом случае левая часть неравенства (25) равна $tl^2+sm^2+u_2^2$. При перенесении ее в правую часть и приведении подобных неравенство (25) с учетом полученных выше выражений приобретает вид

$$0 \geq m^2 s\left(\frac{s-t}{t}\right) + 4t^2(t-1)|q_2|^4\left(l^2 + \frac{s^2}{t^2}m^2\right)$$
$$+ 4t(t-1)|q_1|^2|q_2|^2\left(l^2 + \frac{s^2}{t^2}m^2\right) - 2(t-1)|q_1|^2|q_2|^2\left(l^2 + \frac{s^2}{t^2}m^2\right)$$
$$+ \frac{(t-s)^2}{t}m^2 + 4|u_2|^2(t-1)|q_1|^2|q_2|^2|\Im(q)|^2$$
$$+2|q_1|^2(t-s)m\left(\bar{q}\left(lj+\frac{s}{t}mi\right)q, wi\overline{w}\right) - 2(t-1)(2t-1)|q_1|^2|q_2|^2\left(\bar{q}\left(lj+\frac{s}{t}mi\right)q, wi\overline{w}\right)$$
$$+ 4u_2|q_1||q_2|(t-s)m(\Im(q), wi\overline{w}) - 2(2t-1)(t-s)|q_2|^2 m\left(lj + \frac{s}{t}mi, wi\overline{w}\right)$$
$$- 8t(t-1)|q_1||q_2|^3\left(lj + \frac{s}{t}mi, q\right) + (s-t)|(\bar{v}^T U v, i)|^2$$
$$= (s-t)\left[\left(\frac{2s}{t} - 1\right)m^2 + |(\bar{v}^T U v, i)|^2\right] - 2(s-t)m$$

$$\times\left[|q_1|^2\left(\bar q\left(lj+\frac{s}{t}mi\right)q, wi\overline{w}\right)+2u_2|q_1||q_2|(\Im(q), wi\overline{w})\right.$$
$$\left.-(2t-1)|q_2|^2\left(lj+\frac{s}{t}mi, wi\overline{w}\right)\right]+4t(t-1)|q_1|^2|q_2|^2\left(l^2+\frac{s^2}{t^2}m^2\right)$$
$$+4t^2(t-1)|q_2|^4\left(l^2+\frac{s^2}{t^2}m^2\right)-2(t-1)|q_1|^2|q_2|^2\left(l^2+\frac{s^2}{t^2}m^2\right)$$
$$+4|u_2|^2(t-1)|q_1|^2|q_2|^2|\Im(q)|^2-2(t-1)(2t-1)|q_1|^2|q_2|^2\left(\bar q\left(lj+\frac{s}{t}mi\right)q, lj+\frac{s}{t}mi\right)$$
$$-8u_2t(t-1)|q_1||q_2|^3\left(lj+\frac{s}{t}mi, q\right)=(s-t)\left[\left(\frac{2s}{t}-1\right)m^2+|(\bar v^TUv, i)|^2\right]-2(s-t)m$$
$$\times\left[|q_1|^2\left(\overline{w}\cdot\bar q\left(lj+\frac{s}{t}mi\right)qw, i\right)+2u_2|q_1||q_2|(\Im(\overline{w}qw), i)\right.$$
$$\left.-(2t-1)|q_2|^2\left(\overline{w}\left(lj+\frac{s}{t}mi\right)w, i\right)\right](t-1)4|q_2|^2\left[t^2|q_2|^2\left(l^2+\frac{s^2}{t^2}m^2\right)+u_2^2|q_1|^2|\Im(q)|^2\right.$$
$$\left.-2tu_2|q_1||q_2|\left(lj+\frac{s}{t}mi, q\right)\right]+(t-1)2(2t-1)|q_1|^2|q_2|^2\left[\left(l^2+\frac{s^2}{t^2}m^2\right)\right.$$
$$\left.-\left(\bar q\left(lj+\frac{s}{t}mi\right)q, lj+\frac{s}{t}mi\right)\right]=(s-t)[(\bar v^TUv, i)-m]^2$$
$$+(t-1)4|q_2|^2\left|t|q_2|\left(lj+\frac{s}{t}mi\right)-u_2|q_1|\Im(q)\right|^2$$
$$+(t-1)2(2t-1)|q_1|^2|q_2|^2\left[\left(l^2+\frac{s^2}{t^2}m^2\right)-\left(\bar q\left(lj+\frac{s}{t}mi\right)q, lj+\frac{s}{t}mi\right)\right].$$

Выражение в последней квадратной скобке неотрицательно, так как вследствие неравенства Коши — Буняковского — Шварца

$$\left|\left(\bar q\left(lj+\frac{s}{t}mi\right)q, lj+\frac{s}{t}mi\right)\right|\le\left(l^2+\frac{s^2}{t^2}m^2\right).$$

Следовательно, требуемое неравенство выполняется, если $s\le t$ и $\frac{1}{2}\le t\le 1$.

Из доказанных ранее утверждений следует

Теорема 2. *Однородное риманово многообразие $(S^7,\mu_{t,s})$, где $s\ne t$, δ-однородно тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}\le t\le 1$ и $0<s<t$.*

5. Общий случай

Переходим к рассмотрению общего случая $n\ge 2$. Определим вложение $\mathrm{emb}: S^7\to S^{4n+3}$ как композицию вложений $S^7\subset\mathbb{H}^2$ и $\mathbb{H}^2\subset\mathbb{H}^{n+1}$. Последнее вложение осуществляется по обычной формуле $(q_1,q_2)^T\to(q_1,q_2,0,\dots,0)^T$. Инвариантные римановы метрики $\mu_{t,s}$ на S^7 и S^{4n+3} будем обозначать одинаково.

Вложению emb соответствуют вложения подгруппы Ли $\mathrm{Emb}\times\mathrm{Id}: Sp(2)\times U(1)\to Sp(n+1)\times U(1)$ и подалгебры Ли $\mathfrak{Emb}\oplus\mathfrak{Id}:\mathfrak{sp}(2)\oplus\mathfrak{u}(1)\to\mathfrak{sp}(n+1)\oplus\mathfrak{u}(1)$. Вложение Emb сопоставляет (2×2)-матрице A блочно-диагональную матрицу с блоком A в левом верхнем углу и единичной матрицей размера $[(n-1)\times(n-1)]$ в качестве дополнительного блока; а вложение $\mathfrak{Emb}$ — (2×2)-матрице W блочно-диагональную матрицу с блоком W в левом верхнем углу и с нулевой

$[(n-1)\times(n-1)]$-матрицей в дополнительном блоке; Id и $\mathfrak{Id}$ обозначают тождественные отображения. Элементы групп (соответственно алгебр Ли) будем отождествлять с их образами при этих вложениях.

Лемма 1. *Если элемент $U\in\mathfrak{sp}(2)\oplus\mathfrak{u}(1)\subset\mathfrak{sp}(n+1)\oplus\mathfrak{u}(1)$ является δ-вектором для пространства $(Sp(2)\times U(1)/(Sp(1)\times U(1)),\mu_{t,s})$, где $0<s\le t$ и $\frac{1}{2}\le t\le 1$, то он является и δ-вектором для пространства $(Sp(n+1)\times U(1)/(Sp(n)\times U(1)),\mu_{t,s})$.*

Доказательство. Для любых $V\in S^{4n+3}$ и $U\in\mathfrak{sp}(2)\oplus\mathfrak{u}(1)$ справедлива формула

$$\|UV\|^2=|UV_1|^2+t|UV_2|^2+s|UV_3|^3,$$

где UV_3, UV_2, UV_1 — ортогональные проекции вектора UV на векторное подпространство всех векторов вида Vu, $u\in\mathbb{R}i$ соответственно, на его ортогональное дополнение в подпространстве всех векторов вида $Vu, u\in\Im(\mathbb{H})$, и на ортогональное дополнение в $\mathbb{H}^{n+1}$ к последнему подпространству (для стандартного скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ в $\mathbb{H}^{n+1}$ и его нормы $|\cdot|$).

Каждый такой вектор V можно представить в виде

$$V=s_1v+s_2w,\quad \text{где } v\in S^7,\ w\in S^{4(n-1)-1}\subset(\mathbb{H}^2)^{\perp},\ s_1,s_2\ge 0,\ s_1^2+s_2^2=1.$$

Вследствие формулы (29) δ-вектор U имеет вид $W+\left(\frac{s}{t}-1\right)u_{1,2}\in\mathfrak{sp}(2)\oplus\mathfrak{u}(1)$. Тогда

$$UV=U(s_1v+s_2w)=s_1Uv+s_2Uw=s_1Uv+s_2\left(\frac{t-s}{t}\right)wu_{1,2}\in\mathbb{H}^2\oplus\mathbb{H}^{n-1}.$$

Так как U — δ-вектор для $(Sp(2)\times U(1)/Sp(1)\times U(1),\mu_{t,s})$ и $0<s\le t$, в силу сказанного и формулы (10)

$$\|UV\|^2=s_1^2\|Uv\|^2+s_2^2\left(\frac{t-s}{t}\right)^2 s|u_{1,2}|^2\le s_1^2\|Uv_0\|^2+s_2^2\|Uv_0\|^2=\|Uv_0\|^2.$$

Следовательно, U является δ-вектором для $(Sp(n+1)\times U(1)/(Sp(n)\times U(1),\mu_{t,s})$.

Лемма 2. *Для любых векторов $(u_1,u_2,\dots,u_{n+1})^T\in S^{4n+3}_{v_0}$ и $(u_1,\tilde u_2)^T\in S^7_{v_0}$ с условием $|(u_2,\dots,u_{n+1})^T|=|\tilde u_2|$ существует некоторый элемент g из подгруппы $Sp(n)$ стабилизатора $Sp(n)\times U(1)\subset Sp(n+1)\times U(1)$ (точки v_0 в $Sp(n+1)\times U(1)$) такой, что $g(u_1,u_2,\dots,u_{n+1})^T=(u_1,\tilde u_2)^T$.*

Доказательство. Лемма следует из известного факта, что $Sp(n)$ действует транзитивно на каждой сфере $S^{4n-1}(r)$, $r\ge 0$, в $\mathbb{H}^n$ с центром в нуле.

Теорема 3. *Однородное риманово многообразие $(S^{4n+3},\mu_{t,s})$, где $s\ne t$, δ-однородно тогда и только тогда, когда $0<s<t$ и $\frac{1}{2}\le t\le 1$. При этом оно $Sp(n+1)\times U(1)$-нормально однородно тогда и только тогда, когда $0<s<t=\frac{1}{2}$, и не является нормальным однородным для произвольной связной транзитивной группы Ли движений во всех остальных случаях.*

Доказательство. Необходимость для первого утверждения доказана в предложении 3.

Пусть $u=(u_1=u_{1,1}+u_{1,2},\dots,u_{n+1})^T$ — произвольный касательный вектор к S^{4n+3} в точке v_0. По лемме 2 существует элемент $g\in Sp(n)\subset Sp(n)\times U(1)\subset Sp(n+1)\times U(1)$ такой, что $gu=(u_1,\tilde u_2)^T\in S^7_{v_0}$. Вследствие теоремы 2 существует δ-вектор $U\in\mathfrak{sp}(2)\oplus\mathfrak{u}(1)$ такой, что $Uv_0=(u_1,\tilde u_2)^T$. На основании леммы 1 вектор $U \in \mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{u}(1) \subset \mathfrak{sp}(n+1) \oplus \mathfrak{u}(1)$ является δ-вектором и на $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$. Тогда вектор

$$U' := g^{-1}Ug = \mathrm{Ad}(g^{-1})(U) \in \mathfrak{sp}(n+1) \oplus \mathfrak{u}(1)$$

является δ-вектором на $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$, причем $U'v_0 = u$. Следовательно, пространство $(S^{4n+3} = Sp(n+1) \times U(1)/(Sp(n) \times U(1)), \mu_{t,s})$ обобщенно $Sp(n+1) \times U(1)$-нормально однородно, а следовательно, и δ-однородно при $0 < s < t$ и $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Второе утверждение следует из теоремы 1 и того, что $Sp(n+1) \times U(1)$ — наибольшая связная группа Ли движений риманова многообразия $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$ при $s \neq t$ [7].

6. Неодносвязные δ-однородные римановы многообразия

Далее будет нужно следующее предложение, доказанное в [1].

Предложение 4. *Пусть $p : (M, \mu) \to (N, \nu)$ — риманова субмерсия, являющаяся однородным расслоением относительно некоторой группы Ли G изометрий пространства (M, μ), и пространство (M, μ) G-δ-однородно. Тогда и (N, ν) G-δ-однородно.*

Теорема 4. *Пусть $\Gamma = \mathbb{Z}_k$ — циклическая подгруппа порядка $k > 1$ в $U(1) \subset Sp(n+1) \times U(1)$ и $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})/\Gamma$, где $s \neq t$, — пространство орбит для правого действия* (1) *группы $\Gamma \subset U(1) \subset Sp(1)$ (линзовое пространство). Тогда*

1. *Существует проекция $\widetilde{\mathrm{pr}_1} : S^{4n+3}/\Gamma \to \mathbb{C}P^{2n+1}$ (см.* (2)*), являющаяся однородным римановым расслоением (и тем самым римановой субмерсией) относительно группы изометрий $Sp(n+1) \times U(1)$ для римановых метрик: $\mu_{t,s,\Gamma}$, индуцированной метрикой $\mu_{t,s}$, и ν_t, с вполне геодезическими слоями, изометричными окружности длины $\frac{2\pi\sqrt{s}}{k}$.*

2. *Пространство $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})/\Gamma$ $Sp(n+1) \times U(1)$-δ-однородно тогда и только тогда, когда $0 < s < t$ и $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, но не нормально однородно относительно произвольной транзитивной группы Ли своих движений при $0 < s < t$ и $\frac{1}{2} < t \leq 1$.*

3. *Пространство $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})/\Gamma$ при $s \neq t$ не слабо симметрично относительно наибольшей связной группы Ли изометрий $Sp(n+1) \times U(1) = \overline{G}$, естественно редуктивно относительно $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда $t = \frac{1}{2}$, и $\overline{G}$-нормально однородно тогда и только тогда, когда $0 < s < t = \frac{1}{2}$.*

Доказательство. Далее учитывается, что $U(1)$ действует справа на $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$ изометриями, $\mathbb{Z}_k$ коммутирует с группой $Sp(n+1) \times U(1)$. Поэтому полной связной транзитивной группой изометрий при всех $s \neq t$ для пространств $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})/\mathbb{Z}_k$ является группа $Sp(n+1) \times U(1)$ (с ядром неэффективности $\mathbb{Z}_k$).

1. Очевидно.

2. Следует из утверждения 1, предложения 4, теоремы 3 и того, что при римановом накрытии подъем киллингова векторного поля на базе является киллинговым векторным полем на накрывающем пространстве.

3. Ссылки те же, что в доказательстве утверждения 2, но с заменой теоремы 3 предложением 1 и теоремой 1.

7. Секционные кривизны римановых многообразий $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$

Как сказано во введении, все δ-однородные римановы многообразия имеют неотрицательную секционную кривизну. В [1] на основе работ Д. Е. Вольпера [17] и Вердиани — Циллера [18] установлена положительность секционных кривизн и указаны точные значения δ-защемленностей обобщенных нормальных однородных римановых многообразий (S^{4n+3}, μ_t). В [18] найдены необходимые и достаточные условия положительности секционных кривизн для всех однородных римановых многообразий $(S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n), \mu_{t_1,t_2,t_3})$, определяемых положительными параметрами t_1, t_2, t_3. Эти пространства характеризуются условиями:

а) в ортогональных дополнениях к слоям-сферам S^3 расслоения pr из введения значения метрического тензора μ_{t_1,t_2,t_3} совпадают со значениями тензоров $\mu_{t,s}$ и μ_t;

б) каждый слой (S^3, μ_{t_1,t_2,t_2}) изометричен группе Ли $Sp(1) \cong SU(2)$ с левоинвариантной римановой метрикой, допускающей ортогональный левоинвариантный базис векторных полей с квадратами длин t_1, t_2, t_3 и ортонормированный относительно некоторой левоинвариантной римановой метрики с постоянной секционной кривизной 1.

Ясно, что

$$\mu_t = \mu_{t,t,t}, \quad \mu_{t,s} = \mu_{t,t,s}. \tag{36}$$

С помощью [18] удается доказать положительность секционных кривизн для всех δ-однородных сфер $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$. Тогда вследствие однородности (или компактности) каждое такое пространство имеет положительную δ-защемленность. К сожалению, насколько известно автору, имеющиеся в литературе результаты не позволяют указать их значения.

В теореме B из [18] доказан следующий критерий.

Теорема 5. *Однородное риманово многообразие $(S^{4n+3}, \mu_{t_1,t_2,t_3})$ имеет положительную секционную кривизну тогда и только тогда, когда для всех циклических перестановок (i,j,k) индексов $(1,2,3)$*

$$V_i > 0, \quad H_i > 0, \quad 3|t_jt_k - t_j - t_k + t_i| < t_jt_k + \sqrt{H_iV_i},$$

где $V_i = \big(t_j^2 + t_k^2 - 3t_i^2 + 2t_it_j + 2t_it_k - 2t_jt_k\big)/t_i$, $H_i = 4 - 3t_i$.

Предложение 5. *Каждая δ-однородная сфера $(S^{4n+3}, \mu_{t,s})$, где $s \neq t$, имеет положительную секционную кривизну.*

Доказательство. Вычисления на основе второй формулы в (36) и теоремы 5 дают

$$H_1 = H_2 = 4 - 3t, \quad H_3 = 4 - 3s,$$

$$V_2 = V_1 = (t^2 + s^2 - 3t^2 + 2t^2 + 2ts - 2ts)/t = \frac{s^2}{t},$$

$$V_3 = (t^2 + t^2 - 3s^2 + 2ts + 2ts - 2t^2)/s = 4t - 3s.$$

Вследствие теоремы 3 имеем $0 < s < t \leq 1$. Тогда все H_i и V_i, $i = 1,2,3$, положительны.

Проверим три остальных условия из теоремы 5. Первое и второе из них совпадают и дают соотношения

$$3|ts - t - s + t| = 3s|t-1| = 3s(1-t) < ts + \sqrt{(4-3t)s^2/t},$$

что эквивалентно неравенству

$$3(1-t) < t + \sqrt{\left(\frac{4}{t} - 3\right)}.$$

Правая часть этого неравенства больше $t + 1$ или равна этому выражению, только когда $t = 1$, но тогда левая часть неравенства равна нулю и неравенство выполняется. Остается проверить неравенство $3(1-t) \leq t+1$, когда $t < 1$. Очевидно, что оно эквивалентно неравенству $\frac{1}{2} \leq t$, которое выполняется вследствие теоремы 3.

Последнее условие дает неравенство

$$3|t^2 - t - t + s| = 3[t(1-t) + (t-s)] < t^2 + \sqrt{(4-3s)(4t-3s)},$$

эквивалентное неравенству

$$(4t-3s) + 2t(1-2t) < \sqrt{(4-3s)(4t-3s)}$$

или

$$(4t-3s) - \sqrt{(4-3s)(4t-3s)} < 2t(2t-1).$$

Правая часть этого неравенства неотрицательна, а левая неположительна и равна нулю, только если $t = 1$, но тогда правая часть положительна и неравенство выполняется. Таким образом, все неравенства верны при условиях на t, s из теоремы 3.

Ясно, что утверждение предложения 5 распространяется на все неодносвязные δ-однородные пространства из предыдущего раздела.

Заключение

На основании предложения 5 и результатов статей [3, 4, 1] все известные неразложимые в прямое метрическое произведение обобщенные нормальные однородные, но не нормальные однородные, римановы многообразия компактны и имеют положительную секционную кривизну и, следовательно, положительную δ-защемленность. Неизвестно, всегда ли это верно.

В этой статье и статье [1] найдены неразложимые в прямое метрическое произведение обобщенные нормальные однородные, но не нормальные однородные, в том числе неодносвязные, римановы многообразия нулевой эйлеровой характеристики. Это дает положительный ответ на вопрос 1 из [4].

Отметим, что в [1] впервые построены (компактные односвязные) обобщенные нормальные однородные, естественно редуктивные, слабо симметричные, но тем не менее не нормальные однородные римановы многообразия. Заметим, что каждое из этих трех условий, как и условие нормальной однородности, влечет геодезическую орбитальность пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берестовский В. Н.* Обобщенные нормальные однородные сферы // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 4. С. 742–761.
2. *Berestovskii V. N., Plaut C.* Homogeneous spaces of curvature bounded below // J. Geom. Anal. 1999. V. 9, N 2. P. 203–219.
3. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* On δ-homogeneous Riemannian manifolds // Differ. Geom. Appl. 2008. V. 26, N 5. P. 514–535.

4. *Berestovskii V. N., Nikitenko E. V., Nikonorov Yu. G.* Classification of generalized normal homogeneous Riemannian manifolds of positive Euler characteristic // Differ. Geom. Appl. 2011. V. 29, N 4. P. 533–546.

5. *Berger M.* Les varietes riemanniennes homogenes normales a courbure strictement positive // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., Ser. 3. 1961. V. 15, N 3. P. 179–246.

6. *Kowalski O., Vanhecke L.* Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. B. 1991. V. 5, N 1. P. 189–246.

7. *Ziller W.* Homogeneous Einstein metrics on spheres and projective spaces // Math. Ann. 1982. V. 259. P. 351–358.

8. *Nomizu K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. J. Math. 1954. V. 76, N 1. P. 33–65.

9. *Ziller W.* The Jacobi equation on naturally reductive compact Riemannian homogeneous spaces // Comment. Math. Helv. 1977. V. 52. P. 573–590.

10. *Grove K., Ziller W.* Cohomogeneity one manifolds with positive Ricci curvature // Inv. Math. 2002. V. 149. P. 619–646.

11. *Kostant B.* On differential geometry and homogeneous spaces. I, II // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1956. V. 42. P. 258–261; 354–357.

12. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т. 1, 2.

13. *Selberg A.* Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces, with applications to Dirichlet series // J. Indian Math. Soc. 1956. V. 20. P. 47–87.

14. *Ziller W.* Weakly symmetric spaces // Topics in geometry: in memory of Joseph D'Atri. Boston: Birkhäuser, 1996. P. 355–368. (Prog. Nonlinear Differ. Equations; V. 20).

15. *Якимова О. С.* Слабо симметрические римановы многообразия с редуктивной группой изометрий // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 4. С. 143–160.

16. *Wolf J. A.* Harmonic analysis on commutative spaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007.

17. *Вольпер Д. Е.* Секционные кривизны диагонального семейства $Sp(n+1)$-инвариантных метрик на $(4n+3)$-мерных сферах // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 6. С. 1230–1242.

18. *Verdiani L., Ziller W.* Positively curved homogeneous metrics on spheres // Math. Z. 2009. Bd 261, Hefte 3. S. 473–488.

Статья поступила 20 сентября 2012 г.

Берестовский Валерий Николаевич
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
`berestov@ofim.oscsbras.ru`