Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 512.552.4

О МАТРИЧНЫХ ТИПАХ ПЕРВИЧНЫХ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Л. М. Самойлов

Аннотация. Получен ответ на вопрос, поставленный А. Р. Кемером: показано, что для данного числа k и всех достаточно больших p каждое первичное многообразие ассоциативных алгебр матричного типа k над полем характеристики $p > 0$ регулярно.

Ключевые слова: полиномиальное тождество, первичное многообразие, тождество со следом.

Все рассматриваемые в работе алгебры предполагаются ассоциативными.

В [1] А. Р. Кемером доказано, что над полем F характеристики $p > 0$ каждый нетривиальный T-идеал содержит все полилинейные тождества алгебры матриц некоторого порядка. Обозначим через P множество всех полилинейных полиномов свободной ассоциативной алгебры счетного ранга $F\langle X\rangle$ над полем F. Наименьшее число k со свойством $T[M_k] \cap P \subset \Gamma$ называется *матричным типом* T-идеала Γ, где $T[M_k]$ — идеал тождеств алгебры матриц порядка k над полем F. Вычисление матричного типа конкретного T-идеала является непростой задачей. Например, матричный тип алгебры Грассмана G счетного ранга равен p (это один из результатов [2]), но трудно явно предъявить полином $f \in T[M_{p-1}] \setminus T[G]$ при $p > 3$.

Понятие матричного типа оказалось содержательным прежде всего благодаря взаимосвязи с понятием *регулярности* первичных многообразий. Для определения регулярности кратко напомним определение γ-классического многообразия алгебр со следом (подробнее см. [1]).

Обозначим через $\widetilde{F}\langle X\rangle$ свободную ассоциативную алгебру со следом, порожденную счетным множеством X. Через $\widetilde{P}_m$ будем обозначать пространство всех полилинейных полиномов со следом от переменных $x_1, \dots, x_m$ с коэффициентами из поля F. Имеется изоморфизм пространств $\tilde{\lambda}_m : \widetilde{P}_m \to FS_{m+1}$, отождествляющий полилинейные полиномы со следом с элементами групповой алгебры FS_{m+1} симметрической группы S_{m+1}, действующей на множестве $\{0, 1, \dots, m\}$. Моному со следом $x_{i_1} \dots x_{i_a} \operatorname{Tr}(x_{j_1} \dots x_{j_b}) \dots \operatorname{Tr}(x_{k_1} \dots x_{k_c})$ сопоставляется перестановка $(0, i_1, \dots, i_a)(j_1, \dots, j_b) \dots (k_1, \dots, k_c)$, а далее отображение $\tilde{\lambda}_m$ продолжается по линейности.

Нетривиальный $\widetilde{T}$-идеал $\widetilde{\Gamma}$ алгебры $\widetilde{F}\langle X\rangle$ называется *γ-классическим*, если $\widetilde{\Gamma}$ содержит полином $\operatorname{Tr}(1) - \gamma$, $\gamma \in F$, и для каждого m множество $\tilde{\lambda}_m(\widetilde{\Gamma} \cap \widetilde{P}_m)$ является двусторонним идеалом алгебры F_{m+1}. В [3] показано, что в нулевой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10–01–00209–а, 12–01–33031–мол-а-вед).

характеристике всегда выполнено $\gamma \in \mathbb{Z}$, а в характеристике $p > 0$ выполнено $\gamma \in \mathbb{Z}_p$. T-идеал Γ называется *γ-классическим*, если $\Gamma = \widetilde{\Gamma} \cap F\langle X\rangle$ для некоторого γ-классического $\widetilde{T}$-идеала $\widetilde{\Gamma}$. Понятие γ-классического T-идеала фактически введено Ю. П. Размысловым в [4].

Над полями характеристики 0 полный список $(n-k)$-классических $\widetilde{T}$-идеалов исчерпывается $\widetilde{T}$-идеалами $\widetilde{T}[M_{n,k}]$, где $M_{n,k}$ — матричная супералгебра, подалгебра алгебры $M_{n+k}(G)$, и все идеалы $\widetilde{T}[M_{n,k}]$ $\widetilde{T}$-первичны. Это показано Ю. П. Размысловым (см. [5]). Над полями положительной характеристики существует много других γ-классических $\widetilde{T}$-идеалов и они уже не обязаны быть $\widetilde{T}$-первичными.

Оказывается, что γ-классические T-идеалы в характеристике $p > 0$ — это не экзотические примеры вербально первичных идеалов, а достаточно общая ситуация. Напомним, что полином $f(x_1, \dots, x_m) \in F\langle X\rangle$ называется *киллером* $\widetilde{T}$-идеала $\widetilde{T}[M_k]$, если алгебра матриц M_k удовлетворяет тождеству со следом вида

$$f(x_1, \dots, x_m) \operatorname{Tr}(y) = g(x_1, \dots, x_m, y), \quad g \in F\langle X\rangle.$$

Рассмотрим вербально первичный T-идеал Γ, матричный тип которого равен k. Назовем Γ *регулярным* вербально первичным идеалом, если Γ *не* содержит хотя бы одного полилинейного киллера идеала $\widetilde{T}[M_k]$. Это понятие введено в [6]. А. Р. Кемер показал, что регулярный вербально первичный T-идеал Γ матричного типа k является k-классическим T-идеалом (см. [6]), следовательно, при изучении таких T-идеалов можно применять весь арсенал методов теории представлений симметрических групп над полями положительной характеристики. Такой подход к проблеме классификации вербально первичных многообразий — одной из центральных проблем PI-теории — предложен А. Р. Кемером в ряде работ [6–8, 2].

В [7] А. Р. Кемер сформулировал следующий вопрос: *верно ли, что для данного числа k и всех достаточно больших p каждое первичное многообразие матричного типа k над полем характеристики $p > 0$ регулярно?*

В настоящей работе в теореме 1 получен положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 1. *Для данного числа k и всех достаточно больших p каждое первичное многообразие матричного типа k над полем характеристики $p > 0$ регулярно.*

Перед доказательством теоремы приведем необходимые сведения. Несложно проверить, что алгебра M_n удовлетворяет тождеству

$$\sum_{i=1}^{n^2} \operatorname{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1})|_{x_i = ax_i} = n \operatorname{Tr}(a) \operatorname{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1}), \quad (1)$$

где $\operatorname{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1})$ — полилинейный полином Капелли, кососимметричный по переменным $x_1, \dots, x_{n^2}$. Впервые это тождество указано Ю. П. Размысловым. Тождество (1) означает, что при $n < p$ (точнее, при n, не кратном p) полином Cap_{n^2} является киллером для $\widetilde{T}$-идеала $\widetilde{T}[M_n]$.

В [9] доказана следующая теорема, представляющая собой ослабленную версию конечной базируемости T-идеала $T[M_n]$.

Теорема 2. *Для $n < p$ существует конечно порожденный T-идеал $\Gamma_n \subseteq T[M_n]$, удовлетворяющий свойству: если $f(z_1, \dots, z_k) \in M_n$, то*

$$f(z_1, \dots, z_k) \cdot \mathrm{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1}) \in \Gamma_n.$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится явный вид порождающей системы идеала Γ_n, который легко получить, обратившись к доказательству теоремы 2.

Пусть $g = g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots)$ — произвольный полином, полилинейный и кососимметричный по переменным $x_1, \dots, x_{n^2}$, зависящий, быть может, от других переменных. Если полином g не зависит от переменной z, то положим

$$\sigma_z g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots) = \sum_{i=1}^{n^2} g(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1})|_{x_i = z x_i}.$$

Заметим, что $\sigma_z g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots)$ снова представляет собой полином, полилинейный и кососимметричный по переменным $x_1, \dots, x_{n^2}$, поэтому та же самая конструкция применима к $\sigma_z g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots)$ и можно определить полином $\sigma_{z_1} \dots \sigma_{z_s} g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots)$. Для произвольных непустых мономов $u_1, \dots, u_s$ положим

$$\sigma_{u_1} \dots \sigma_{u_s} g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots) = (\sigma_{z_1} \dots \sigma_{z_s} g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots))_{z_1 \to u_1, \dots, z_s \to u_s},$$

где полином g не зависит от $z_1, \dots, z_s$ (мономы u_i могут зависеть от $z_1, \dots, z_s$).

Алгебра M_n удовлетворяет тривиальным тождествам $\mathrm{Tr}(z)\,\mathrm{Tr}(w) = \mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{Tr}(z)$ и $\mathrm{Tr}(zw) = \mathrm{Tr}(wz)$. Из этих тождеств и (1) вытекает, что M_n удовлетворяет следующим двум обычным тождествам:

$$\sigma_z \sigma_w \,\mathrm{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots) = \sigma_w \sigma_z \,\mathrm{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots), \tag{2}$$

$$\sigma_{zw} \,\mathrm{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots) = \sigma_{wz} \,\mathrm{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots). \tag{3}$$

Идеал Γ_n порождается тождествами (2), (3) и еще тремя полиномами, которые определяются далее.

Рассмотрим тождество Кэли — Гамильтона $\chi_n(x_1, \dots, x_n) = 0$, которое представляет собой полную линеаризацию характеристического многочлена общей матрицы порядка n. Полином $\mathrm{Tr}(z_0 \chi_n(z_1, \dots, z_n))$ однозначно представляется в виде линейной комбинации мономов со следом вида $\mathrm{Tr}(m_1) \dots \mathrm{Tr}(m_s)$, где все слова $m_1, \dots, m_s$ не равны пустому слову. Через $t_n(z_0, z_1, \dots, z_n)$ обозначим полином $\mathrm{Tr}(z_0 \chi_n(z_1, \dots, z_n))$, записанный в таком виде.

Рассмотрим три полинома со следом: $\chi_n(z_1, \dots, z_n) z_{n+1} \cdot \mathrm{Cap}_{n^2}(\dots)$, $\chi_n(z_1, \dots, z_n) \cdot \mathrm{Cap}_{n^2}(\dots)$ и $t_n(z_0, z_1, \dots, z_n) \cdot \mathrm{Cap}_{n^2}(\dots)$. Заменим в каждом из этих трех полиномов со следом все выражения, имеющие вид

$$\mathrm{Tr}(v_1) \dots \mathrm{Tr}(v_t) \,\mathrm{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1}),$$

обычными полиномами

$$\frac{1}{n^t} \sigma_{v_1} \dots \sigma_{v_t} \,\mathrm{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1}).$$

Важно отметить, что рассматриваемые замены определены корректно только по модулю T-идеалов, содержащих полиномы (2) и (3). Именно с этой целью в Γ_n включены два тождества (2) и (3), являющиеся аналогом тривиальных тождеств $\mathrm{Tr}(zw) = \mathrm{Tr}(wz)$ и $\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{Tr}(z) = \mathrm{Tr}(z)\,\mathrm{Tr}(w)$ и обеспечивающие корректность конструкции замены следов $\mathrm{Tr}(v)$ операторами $\frac{1}{n}\sigma_v$. Полученные три обычных полинома вместе с полиномами (2) и (3) порождают идеал Γ_n. Обозначим эти полиномы через $f_1, \dots, f_5$.

Доказательство теоремы 1. Тождество (1) показывает, что при $k < p$ полином Cap_{k^2} является киллером для алгебры матриц порядка k над полем характеристики p. Поэтому теорема будет доказана, если мы установим, что при фиксированном k и при всех достаточно больших p идеал $T[M_{k-1}]$ будет нильпотентным по модулю $\{\mathrm{Cap}_{k^2}\}^T$. В самом деле, если U — произвольный нерегулярный вербально первичный T-идеал матричного типа k, то по определению нерегулярности $\{\mathrm{Cap}_{k^2}\}^T \subseteq U$. Поэтому для некоторого l будет иметь место включение $(T[M_{k-1}])^l \subseteq U$ и в силу вербальной первичности T-идеала U также будет выполнено $T[M_{k-1}] \subseteq U$, что противоречит определению матричного типа.

Нильпотентность идеала $T[M_{k-1}]$ по модулю $\{\mathrm{Cap}_{k^2}\}^T$ будем доказывать индукцией по k. База индукции $k = 1$ представляется очевидной. Предположим, что идеал $T[M_{k-1}]$ нильпотентен по модулю $\{\mathrm{Cap}_{k^2}\}^T$ при всех $p > p_1$, и докажем, что найдется такое число $p_2 > p_1$, для которого идеал $T[M_k]$ нильпотентен по модулю $\{\mathrm{Cap}_{(k+1)^2}\}^T$ при всех $p > p_2$.

По теореме 2 найдется T-идеал $\Gamma_k \subset T[M_k]$, порожденный полиномами $f_1, \dots, f_5$, для которого выполнено включение $T[M_k] \cdot \mathrm{Cap}_{k^2} \subset \Gamma_k$. Отсюда следует, что

$$T[M_k] \cdot \{\mathrm{Cap}_{k^2}\}^T \subset \Gamma_k. \tag{4}$$

Пять полиномов $f_1, \dots, f_5$, которые порождают T-идеал Γ_k и имеют коэффициенты в простом подполе $\mathbb{Z}_p$, удовлетворяют свойству: найдутся полиномы $g_i \in \mathbb{Z}\langle X\rangle \cap T[M_n(\mathbb{Q})]$, для которых $f_i = \psi(g_i)$, где эпиморфизм $\psi : \mathbb{Z}\langle X\rangle \to \mathbb{Z}_p\langle X\rangle$ индуцирован естественным эпиморфизмом $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$. Нестрого говоря, в качестве полиномов g_i надо взять «те же самые» полиномы f_i, но только надо считать, что их коэффициенты лежат в $\mathbb{Z}$, а не в $\mathbb{Z}_p$. Это вытекает из явного вида полиномов f_i, который указан после формулировки теоремы 2.

Из классификации первичных многообразий над полями нулевой характеристики (см. [10]) легко следует, что пересечение всех вербально-первичных T-идеалов, содержащих полином $\mathrm{Cap}_{(k+1)^2}$, совпадает с $T[M_k]$. Поэтому по теореме А. Р. Кемера о нильпотентности (см. [10]) T-идеал $T[M_k(\mathbb{Q})]$ нильпотентен по модулю $\{\mathrm{Cap}_{(k+1)^2}\}^T$. В частности, T-идеал $\{g_1, \dots, g_5\}^T$ нильпотентен по модулю $\{\mathrm{Cap}_{(k+1)^2}\}^T$, скажем, степени r. Это означает, что $g_{i_1} \dots g_{i_r} \in \{\mathrm{Cap}_{(k+1)^2}\}^T$ для всех индексов $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, 5\}$. Но тогда, применив отображение ψ к этому *конечному* числу включений (а при больших p это можно сделать), получаем, что при всех достаточно больших p выполнено $f_{i_1} \dots f_{i_r} \in \{\mathrm{Cap}_{(k+1)^2}\}^T$, т. е. идеал Γ_k нильпотентен по модулю $\{\mathrm{Cap}_{(k+1)^2}\}^T$. Отсюда и из (4) вытекает, что при всех достаточно больших p выполняется включение

$$T[M_k] \cdot \{\mathrm{Cap}_{k^2}\}^T \cdot \ldots \cdot T[M_k] \cdot \{\mathrm{Cap}_{k^2}\}^T \subset \{\mathrm{Cap}_{(k+1)^2}\}^T. \tag{5}$$

По предположению индукции T-идеал $T[M_{k-1}]$ нильпотентен по модулю $\{\mathrm{Cap}_{k^2}\}^T$. В частности, $T[M_k]$ нильпотентен по модулю $\{\mathrm{Cap}_{k^2}\}^T$. Обозначим эту степень нильпотентности через l. Тогда из (5) следует, что

$$T[M_k] \cdot (T[M_k])^l \cdot \ldots \cdot T[M_k] \cdot (T[M_k])^l \subset \{\mathrm{Cap}_{(k+1)^2}\}^T,$$

т. е. $T[M_k]$ нильпотентен по модулю $\{\mathrm{Cap}_{(k+1)^2}\}^T$, что доказывает шаг индукции. Теорема 1 доказана.

Отметим в качестве замечания, что в текущий момент времени неизвестно ни одного примера нерегулярных первичных многообразий, матричный тип которых не делился бы на p. Поэтому можно выдвинуть гипотезу, что любое первичное многообразие матричного типа $< p$ регулярно.

Вместе с тем при $k < p$ идеал $T[M_k]$ (и даже идеал $\{T[M_k] \cap P\}^T$) не обязан быть нильпотентным по модулю $\{\mathrm{Cap}_{k^2}\}^T$. В самом деле, известно, что алгебра Грассмана над полем характеристики $p > 0$ удовлетворяет тождеству $\mathrm{Cap}_{p+1} = 0$. Положим $k = [\sqrt{p+1}] + 1$, тогда алгебра G удовлетворяет тождеству $\mathrm{Cap}_{k^2} = 0$. Следовательно, при больших p идеал $\{T[M_k] \cap P\}^T$ не нильпотентен по модулю $\{\mathrm{Cap}_{k^2}\}^T$, так как иначе ввиду вербальной первичности T-идеала $T[G]$ было бы выполнено включение $T[M_k] \cap P \subset T[G]$, откуда по упоминавшейся выше теореме А. Р. Кемера о матричном типе алгебры Грассмана должно выполняться неравенство $[\sqrt{p+1}] + 1 = k \geqslant p$. При больших p это неверно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kemer A. R.* Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p // Int. J. Algebra Comput. 1997. V. 5, N 2. P. 189–197.

2. *Kemer A.* On some problem in PI-theory in characteristic p connected with dividing by p // Proc. Third Intern. Algebra Conf., June 16–July 1, 2002, Chang Jung Christian University, Tainan, Taiwan. Dordrecht: Springer-Verl. – Kluwer Publ., 2003. P. 53–66.

3. *Самойлов Л. М.* О γ-классических многообразиях // Фунд. и прикл. математика. 2002. Т. 8, № 3. С. 887–910.

4. *Размыслов Ю. П.* Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37, № 3. С. 723–756.

5. *Размыслов Ю. П.* Тождества алгебр и их представлений. М.: Наука, 1989.

6. *Kemer A.* Remarks on the prime varieties // Israel J. Math. 1996. V. 96, N 2. P. 341–356.

7. *Kemer A.* On the multilinear components of the regular prime varieties // Methods in ring theory: Proc. Trento conf. New York: Marcel Dekker, 1998. P. 171–183. (Lect. Notes Pure Appl. Math.; V. 198).

8. *Kemer A.* Multilinear components of the prime subvarieties of the variety $\mathrm{Var}(M_2(F))$ // Algebr. Represent. Theory. 2001. V. 4, N 1. P. 87–104.

9. *Самойлов Л. М.* О нильиндексе радикала относительно свободной ассоциативной алгебры // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 4. С. 583–592.

10. *Кемер А. Р.* Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 5. С. 1042–1059.

Статья поступила 29 августа 2012 г.

Самойлов Леонид Михайлович
Ульяновский гос. университет,
факультет математики и информационных технологий,
ул Л. Толстого, 42, Ульяновск 432970
samoilov_l@rambler.ru