Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 512.542

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГРУПП $G_2(q)$ ДЛЯ $2 < q \equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$ ПОРЯДКОВЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

П. Носратпур, М. Р. Дарафшех

Аннотация. Доказано, что простая группа $G_2(q)$, где $2 < q \equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$, распознаваема по множеству своих порядковых компонент. Другими словами, доказано, что если G — конечная группа и $OC(G) = OC(G_2(q))$, то $G \cong G_2(q)$.

Ключевые слова: граф простых чисел, порядковая компонента, конечная простая группа.

1. Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим символом $\pi(n)$ множество всех простых делителей натурального числа n. Граф простых чисел группы G — это граф $\Gamma(G)$ с множеством вершин, равным множеству $\pi(G)$ всех простых делителей $|G|$, и две различные вершины p и q соединены ребром, если в G имеется элемент порядка pq. Пусть $\pi_i = \pi_i(G)$, $1 \leq i \leq s(G)$, — порядковые компоненты $\Gamma(G)$. Для группы четного порядка полагаем $2 \in \pi_1(G)$. Тогда $|G|$ может быть представлен в виде произведения $m_1, m_2, \dots, m_{s(G)}$, где m_i — положительные целые числа такие, что $\pi(m_i) = \pi_i$. Эти числа m_i называются *порядковыми компонентами* G. Множество $OC(G) = \{m_1, m_2, \dots, m_{s(G)}\}$ называется *множеством порядковых компонент* G.

Определение 1.1. Для конечной группы G обозначим через $h(G)$ число классов изоморфных конечных групп S таких, что $OC(G) = OC(S)$; $h(G)$ называется *h-функцией группы* G. Группа G называется *k-распознаваемой множеством ее порядковых компонент*, если $h(G) = k$. Далее, если $h(G) = 1$, то говорят, что G *характеризуема* своими порядковыми компонентами. В этом случае G однозначно определяется множеством своих порядковых компонент.

Используя [1, 2], перечисляем порядковые компоненты для неабелевых простых групп P в следующих ниже таблицах. Эта информация используется в доказательстве основной теоремы. Обозначения для названий простых групп взяты из [3]. В [4–7] доказано, что спорадические группы и конечные группы $PSL_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2D_n(3)$, где $9 \leq n = 2^m + 1$ не простое, и группы ${}^2D_{p+1}(q)$, где $5 < p \neq 2^m - 1$, характеризуются порядковыми компонентами их графов простых чисел. Распознаваемость групп $L_{p+1}(2)$, ${}^2D_p(3)$, где $p \geq 5$ — простое число, отличное от $2^m + 1$, ${}^2D_n(2)$, где $n = 2^m + 1 \geq 5$, $D_{p+1}(2)$, $D_{p+1}(3)$ и $D_p(q)$, где $p \geq 5$ — простое число и $q = 2, 3$ или 5, доказаны в [8–12]. Также характеризуемость групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, ${}^2D_n(q)$, где $n = 2^m$, $PSL(p, q)$, $PSU(p, q)$, $PSL(p+1, q)$, $PSU(p+1, q)$, $PSL(3, q)$, где q — степень нечетного простого числа, групп $PSL(3, q)$ для $q = 2^n$ и групп $PSU(3, q)$ для $q > 5$ их порядковыми компонентами доказана в [13–22]. Кроме того, r-распознаваемость групп $B_n(q)$ и $C_n(q)$ для $n = 2^m \geq 4$ доказана в [23].

Таблица 1. Порядковые компоненты конечных простых групп P таких, что $s(P) = 2$

P	Ограничения на P	m_1	m_2
A_n	$6 < n = p, p+1, p+2$ одно из чисел n, $n-2$ не простое	$n!/2p$	p
$A_{p-1}(q)$	$(p,q) \neq (3,2),(3,4)$	$q^{p(p-1)/2}\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-1)$	$\frac{(q^p-1)}{((q-1)(p,q-1))}$
$A_p(q)$	$(q-1) \mid (p+1)$	$q^{p(p+1)/2}(q^{p+1}-1)\prod_{i=2}^{p-1}(q^i-1)$	$\frac{(q^p-1)}{(q-1)}$
${}^2A_{p-1}(q)$		$q^{p(p-1)/2}\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-(-1)^i)$	$\frac{(q^p+1)}{((q+1)(p,q+1))}$
${}^2A_p(q)$	$(q+1) \mid (p+1)$ $(p,q) \neq (3,3),(5,2)$	$q^{p(p+1)/2}(q^{p+1}-1)\prod_{i=2}^{p-1}(q^i-1)$	$\frac{(q^p+1)}{(q+1)}$
${}^2A_3(2)$		$2^6.3^4$	5
$B_n(q)$	$n = 2^m \geq 4$, q нечетно	$q^{n^2}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$	$\frac{(q^n+1)}{2}$
$B_p(3)$		$3^{p^2}(3^p+1)\prod_{i=1}^{p-1}(3^{2i}-1)$	$\frac{(3^p-1)}{2}$
$C_n(q)$	$n = 2^m \geq 2$, q нечетно	$q^{n^2}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$	$\frac{(q^n+1)}{(2,q-1)}$
$C_p(q)$	$q = 2,3$	$q^{p^2}(q^p+1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^{2i}-1)$	$\frac{(q^p-1)}{(2,q-1)}$
$D_p(q)$	$p \geq 5, q = 2,3,5$	$q^{p(p-1)}\prod_{i=1}^{p-1}(q^{2i}-1)$	$\frac{(q^p-1)}{(q-1)}$
$D_{p+1}(q)$	$q = 2,3$	$\frac{1}{(2,q-1)}q^{p(p+1)}(q^p+1)$ $(q^{p+1}-1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^{2i}-1)$	$\frac{(q^p-1)}{(2,q-1)}$
${}^2D_n(q)$	$n = 2^m \geq 4$	$q^{n(n-1)}\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$	$\frac{(q^n+1)}{(2,q+1)}$
${}^2D_n(2)$	$n = 2^m+1 \geq 5$	$2^{n(n-1)}(2^n+1)(2^{n-1}-1)$ $\prod_{i=1}^{n-2}(2^{2i}-1)$	$2^{n-1}+1$
${}^2D_p(3)$	$5 \leq p \neq 2^m+1$	$3^{p(p-1)}\prod_{i=1}^{p-1}(3^{2i}-1)$	$\frac{(3^p+1)}{4}$
${}^2D_n(3)$	$9 \leq 2^m+1 \neq p$	$\frac{1}{2}3^{n(n-1)}(3^n+1)(3^{n-1}-1)$ $\prod_{i=1}^{n-2}(3^{2i}-1)$	$\frac{(3^{n-1}+1)}{2}$
$G_2(q)$	$2 < q \equiv \epsilon (\mathrm{mod}\, 3), \epsilon = \pm 1$	$q^6(q^3-\epsilon)(q^2-1)(q+\epsilon)$	$q^2-\epsilon q+1$
${}^3D_4(q)$		$q^{12}(q^6-1)(q^2-1)(q^4+q^2+1)$	q^4-q^2+1
$F_4(q)$	q нечетно	$q^{24}(q^8-1)(q^6-1)^2(q^4-1)$	q^4-q^2+1
${}^2F_4(2)'$		$2^{11}.3^3.5^2$	13
$E_6(q)$		$q^{36}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)$ $(q^5-1)(q^3-1)(q^2-1)$	$\frac{(q^6+q^3+1)}{(3,q-1)}$

Следующая нерешенная проблема содержит все остальные случаи для доказательства того, что группы P со свойством $s(P) = 2$ характеризуются простыми компонентами.

Продолжение таблицы 1

${}^2E_6(q)$	$q>2$	$q^{36}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^3+1)(q^2-1)$	$(q^6-q^3+1)/(3,q+1)$
M_{12}		$2^6.3^3.5$	11
J_2		$2^7.3^3.5^2$	7
Ru		$2^{14}.3^3.5^3.7.13$	29
He		$2^{10}.3^3.5^2.7^3$	17
McL		$2^7.3^6.5^3.7$	11
Co_1		$2^{21}.3^9.5^4.7^2.11.13$	23
Co_3		$2^{10}.3^7.5^3.7.11$	23
Fi_{22}		$2^{17}.3^9.5^2.7.11$	13
HN		$2^{14}.3^6.5^6.7.11$	19

Нерешенная проблема [24]. *Характеризуются ли группы $F_4(q)$ (q нечетно), $G_2(q)$ ($2<q\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,3)$) и $C_p(2)$ своими порядковыми компонентами?*

В данной работе мы рассматриваем простую группу $G_2(q)$, где $2<q\equiv-1(\mathrm{mod}\,3)$, и доказываем, что она характеризуется порядковыми компонентами.

В силу [1] граф простых чисел группы $G_2(q)$ для $2<q\equiv-1(\mathrm{mod}\,3)$ имеет две компоненты $m_1=q^6(q^3+1)(q^2-1)(q-1)=q^6(q+1)^2(q-1)^2(q^2-q+1)$ и $m_2=q^2+q+1$.

Основная теорема. *Если G — конечная группа такая, что $OC(G)=OC(G_2(q))$, где $2<q\equiv-1(\mathrm{mod}\,3)$, то $G\cong G_2(q)$.*

2. Предварительные сведения

Определение 2.1. Группа G называется 2-*фробениусовой*, если существует нормальный ряд $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$ группы G такой, что K и G/H — фробениусовы группы с ядрами H и K/H соответственно.

Следующие леммы взяты из [25, 26].

Лемма 2.1. (a) *Пусть G — Фробениусова группа четного порядка, где H и K — фробениусово дополнение и фробениусово ядро группы G соответственно. Тогда $s(G)=2$ и компоненты графа простых чисел группы G суть $\pi(H)$ и $\pi(K)$.*

(b) *Пусть G — 2-фробениусова группа четного порядка. Тогда $s(G)=2$ и G имеет нормальный ряд $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$ такой, что $|K/H|=m_2$, $|H||G/K|=m_1$, и $|G/K|\mid(|K/H|-1)$ и H — нильпотентная π_1-группа.*

Лемма 2.2. *Пусть G — конечная группа и $s(G)\geq 2$. Если $H\trianglelefteq G$ — π_i-группа, то* $\left(\prod\limits_{j=1,\,j\neq i}^{s(G)} m_j\right)\mid(|H|-1)$.

Строение конечных групп с несвязным графом простых чисел описывается следующей леммой.

Лемма 2.3. *Пусть G — конечная группа и $s(G)\geq 2$. Справедливо одно из следующих утверждений:*

(a) *G — фробениусова или 2-фробениусова группа;*

(b) *G имеет нормальный ряд $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$ такой, что H и G/K — π_1-группы и K/H — неабелева простая группа, где π_1 — компонента графа простых чисел, содержащая 2, H — нильпотентная группа и $|G/K|\mid|\mathrm{Out}(K/H)|$.*

Таблица 2. Порядковые компоненты конечных простых групп P таких, что $s(P) = 3$

P	Ограничения на P	m_1	m_2	m_3
A_n	$n > 6, n = p, p-2$ простые	$\frac{n!}{2n(n-2)}$	p	$p-2$
$A_1(q)$	$4 \mid (q+1)$	$q+1$	q	$(q-1)/2$
$A_1(q)$	$4 \mid (q-1)$	$q-1$	q	$(q+1)/2$
$A_1(q)$	$2 \mid q$	q	$q+1$	$q-1$
$A_2(2)$		8	3	7
$^2A_5(2)$		$2^{15}.3^6.5$	7	11
$^2D_p(3)$	$5 \leq p = 2^m + 1$	$2.3^{p(p-1)}(3^{p-1}-1) \prod_{i=1}^{p-2}(3^{2i}-1)$	$(3^{p-1}+1)/2$	$(3^p+1)/4$
$^2D_{p+1}(2)$	$n \geq 2, p = 2^n - 1$	$2^{p(p+1)}(2^p-1) \prod_{i=1}^{p-1}(2^{2i}-1)$	2^p+1	$2^{p+1}+1$
$G_2(q)$	$q \equiv 0 (\bmod 3)$	$q^6(q^2-1)^3$	q^2-q+1	q^2+q+1
$^2G_2(q)$	$q = 3^{2m+1} > 3$	$q^3(q^2-1)$	$q-\sqrt{3q}+1$	$q+\sqrt{3q}+1$
$F_4(q)$	q четно	$q^{24}(q^6-1)^2(q^4-1)^2$	q^4+1	q^4-q^2+1
$^2F_4(q)$	$q = 2^{2m+1} > 2$	$q^{12}(q^4-1)q^3+1)$	$q^2-\sqrt{2q^3}+ q-\sqrt{2q}+1$	$q^2+\sqrt{2q^3}+ q+\sqrt{2q}+1$
$E_7(2)$		$2^{36}.3^{11}.5^2.7^3.11.13$ 17.19.31.43	73	127
$E_7(3)$		$2^{23}.3^{63}.5^2.7^3.11^2.13^2$ 19.37.41.61.73.547	757	1093
M_{11}		$2^4.3^2$	5	11
M_{23}		$2^7.3^2.5.7$	11	23
M_{24}		$2^{10}.3^3.5.7$	11	23
J_3		$2^7.3^5.5$	17	19
HiS		$2^9.3^2.5^3$	7	11
Suz		$2^{13}.3^7.5^2.7$	11	13
Co_2		$2^{18}.3^6.5^3.7$	11	23
Fi_{23}		$2^{18}.3^{13}.5^2.7.11.13$	17	23
F_3		$2^{15}.3^{10}.5^3.7^2.13$	19	31
F_2		$2^{24}.3^{13}.5^6.7^2.$ 11.13.17.19.23	31	47

Кроме того, всякая компонента нечетного порядка группы G также является компонентой нечетного порядка в K/H.

Следующая лемма Жигмонди используется в доказательстве основной теоремы.

Лемма 2.4 [27]. *Пусть n и a — целые числа, большие 1. Существует простой делитель p числа $a^n - 1$ такой, что p не делит $a^i - 1$ для всех i, $1 \leq i < n$, кроме следующих случаев:*

(a) $n = 2, a = 2^k - 1$, *где* $k \geq 2$,

Таблица 3. Порядковые компоненты конечных простых групп P таких, что $s(P) > 3$

P	Огранич. на P	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
$A_2(4)$		2^6	3	5	7		
${}^2B_2(q)$	$q = 2^{2m+1} > 2$	q^2	$q-1$	$q-\sqrt{2q}+1$	$q+\sqrt{2q}+1$		
${}^2E_6(2)$		$2^{36}.3^9.5^2.7^2.11$	13	17	19		
$E_8(q)$	$q \equiv 2, 3(\bmod 5)$	$q^{120}(q^{20}-1)$ $(q^{18}-1)(q^{14}-1)$ $(q^{12}-1)(q^{10}-1)$ $(q^8-1)(q^4+1)$ (q^4+q^2+1)	$\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$	q^8-q^4+1		
M_{22}		$2^7.3^2$	5	7	11		
J_1		$2^3.3.5$	7	11	19		
$O'N$		$2^9.3^4.5.7^3$	11	19	31		
LyS		$2^8.3^7.5^6.7.11$	31	37	67		
Fi'_{24}		$2^{21}.3^{16}.5^2$ $7^3.11.13$	17	23	29		
F_1		$2^{46}.3^{20}.5^9.7^6$ $11^2.13^3.17.19$ $23.29.31.47$	41	59	71		
$E_8(q)$	$q \equiv 0,1,4(\bmod 5)$	$q^{120}(q^{18}-1)$ $(q^{14}-1)(q^{12}-1)^2$ $(q^{10}-1)^2(q^8-1)^2$ (q^4+q^2+1)	$\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$	q^8-q^4+1	$\frac{q^{10}+1}{q^2+1}$	
J_4		$2^{21}.3^3.5.7.11^3$	23	29	31	37	43

(b) $n = 6, a = 2$.

Простое число p из леммы 2.4 называется *простым числом Жигмонди для* $a^n - 1$.

3. Доказательство основной теоремы

Для доказательства теоремы используем лемму 2.3, но сначала докажем следующие леммы.

Лемма 3.1. *Пусть G — конечная группа такая, что $OC(G) = OC(G_2(q))$, где $2 < q \equiv -1(\bmod 3)$. Тогда G не является ни фробениусовой, ни 2-фробениусовой группой.*

Доказательство. Если G — фробениусова группа, то $G = HK$ имеет фробениусово дополнение H и фробениусово ядро K. По лемме 2.1(a) имеем $OC(G) = \{|H|, |K|\}$. Так как $|H| \mid (|K|-1)$, то $|H| < |K|$, и можем предполагать, что $|K| = m_1$ и $|H| = m_2$. Поскольку $q = 3k - 1 > 2$, по лемме 2.4 существует простое число Жигмонди $p > 3$ для $q^6 - 1$ (в силу определения простого числа Жигмонди для $a^n - 1$). Следовательно, $p \mid (q^3 + 1) = (q + 1)(q^2 - q + 1)$, и если $p \mid (q + 1)$, то $p \mid (q^2 - 1)$, что противоречит выбору p, откуда $p \mid (q^2 - q + 1)$. Поэтому $|G|_p \mid q^2-q+1$, откуда $|G|_p \leq q^2-q+1$. Имеем $|G| = m_1m_2$, $(m_1, m_2) = 1$

и $|K| = m_1$. Если $S_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$, то $S_p \in \mathrm{Syl}_p(K)$. Так как K — нильпотентная нормальная подгруппа в G, то $S_p \trianglelefteq G$, и по лемме 2.2 $m_2 \mid (|S_p| - 1)$. Но $m_2 = q^2+q+1$, что дает $|S_p|-1 \geq q^2+q+1$, откуда следует, что $|S_p| \geq q^2+q+2$; противоречие.

Если G — 2-фробениусова группа, то существует нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ для G такой, что H — нильпотентная π_1-группа, $|K/H| = m_2$ и $|G/K| \mid (|K/H|-1)$ и, следовательно, $|G/K| \mid q(q+1)$. Если p — простое число Жигмонди для $q^6 - 1$, то $p \mid q^2 - q + 1$. Поэтому $p \nmid |G/K|$, значит, по лемме 2.1(b) $p \mid |H|$. Если $S_p \in \mathrm{Syl}_p(H)$, то в силу нильпотентности H имеем $S_p \trianglelefteq G$ и потому по лемме 2.2 $m_2 \mid (|S_p| - 1)$. Значит, $|S_p| \geq q^2 + q + 1$; противоречие.

Лемма 3.2. *Пусть $M = G_2(q)$, где $2 < q \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$, и пусть $D(q) = q^2 + q + 1$.*

(a) *Если $p \in \pi(M)$, то $|S_p| \leq q^6$, где $S_p \in \mathrm{Syl}_p(M)$.*

(b) *Если $p \in \pi_1(M)$, $p^\alpha \mid |M|$ и $p^\alpha - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, D(q))$, то $p^\alpha = q^3$ или $p^\alpha = q^6$.*

Доказательство. (a) Имеем

$$|G_2(q)| = q^6(q+1)^2(q-1)^2(q^2-q+1)(q^2+q+1). \tag{1}$$

Простое вычисление показывает, что

$$\begin{gathered}(q+1, q-1) = (2, q-1), \quad (q-1, q^2+q+1) = (3, q-1),\\ (q-1, q^2-q+1) = 1, \quad (q+1, q^2-q+1) = (3, q+1),\\ (q+1, q^2+q+1) = 1, \quad (q^2+q+1, q^2-q+1) = 1,\end{gathered} \tag{2}$$

где $(,)$ обозначает наибольший общий делитель двух чисел. Если $p^\alpha \mid |M|$, то, рассматривая (1) и (2), получаем, что p^α делит q^6, $2^2.3(q+1)^2$, $2^2.3(q-1)^2$, $q^2 + q + 1$ или $q^2 - q + 1$. Отсюда сразу получаем (a).

(b) Если $p^\alpha - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, D(q))$, то $p^\alpha > D(q)$. Так как $q \geq 5$, получаем, что $p^\alpha > 31$. Рассмотрим следующие случаи.

(1) Если $p^\alpha \mid 3^2(q^2 - q + 1)$, то $p^\alpha \mid 3^3$ или $p^\alpha \mid q^2 - q + 1$. Если $p^\alpha \mid 3^3$, то $p^\alpha < 3^3$; противоречие. Если $p^\alpha \mid q^2 - q + 1$, то $p^\alpha < D(q)$; противоречие.

(2) Если $p^\alpha \mid 2^2.3.(q \pm 1)^2$, то $p^\alpha \mid 4(q \pm 1)^2$ или $p^\alpha \mid 3.(q \pm 1)^2$. Так как доказательства этих двух случаев полностью аналогичны, рассмотрим только один из них. Если $p^\alpha \mid 4(q+1)^2$, то $tp^\alpha = 4(q+1)^2$, т. е. $p^\alpha = 4(q+1)^2/t$, где t — натуральное число. Имеем также $p^\alpha - 1 = r.D(q)$, где r — натуральное число, и тогда $D(q) = \frac{4(q+1)^2 - t}{tr}$. Но так как $\frac{4(q+1)^2}{5} < D(q) = \frac{4(q+1)^2 - t}{tr} < \frac{4(q+1)^2}{tr}$, то $tr < 5$ и $(tr-4)q^2 + (tr-8)q + (tr+t-4) = 0$. Из этого уравнения выводим, что $q \mid (tr + t - 4)$. Теперь, используя, что $tr = 1, 2, 3, 4$, получаем противоречие.

(3) Если $p^\alpha \mid q^6$, то $q = p^n$, $n > 0$. Имеем $p^\alpha > D(q) > q^2$. Поэтому $q^2 \mid p^\alpha$. Имеем также $p^\alpha - 1 = r.D(q)$, тогда $p^\alpha = rq^2 + rq + r + 1$, а следовательно, $q^2 \mid (rq+r+1)$, откуда $r \geq q-1$. Из этого получаем, что $p^\alpha - 1 = r(q^2+q+1) \geq (q-1)(q^2+q+1) = q^3 - 1$. Поэтому $p^\alpha \geq q^3$, тем самым $p^\alpha = q^3.p^m$, $m \geq 0$. Тогда $p^\alpha = q^3$ или $r.D(q) = p^\alpha - 1 = p^m.q^3 - 1 = p^m.q^3 - p^m + p^m - 1 = p^m(q-1)D(q) + p^m - 1$, откуда следует, что $p^m - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, D(q))$. Тогда $p^m = q^3$ и $p^\alpha = q^6$.

Продолжим доказательство основной теоремы. По лемме 2.3(b) существует нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ для G такой, что K/H — неабелева простая группа, H и G/K — π_1-группы и H — нильпотентная группа. Кроме того,

$|G/K| \mid |\operatorname{Out}(K/H)|$, и каждая нечетная компонента G является одной из нечетных компонент K/H и $s(K/H) \geq 2$.

Так как $P = K/H$ — неабелева простая группа с несвязным графом простых чисел, в силу классификации конечных простых групп имеем одну из возможностей для P из табл. 1–3.

Случай 1: P изоморфна ${}^2A_3(2)$, ${}^2F_4(2)'$, $A_2(2)$, $A_2(4)$, ${}^2A_5(2)$, $E_7(2)$, $E_7(3)$, ${}^2E_6(2)$ или одной из 26 спорадических групп из табл. 1–3.

Компонента нечетного порядка группы G равна $m_2 = q^2 + q + 1$ и должна быть равна одной из компонент нечетного порядка перечисленных выше групп. Анализ табл. 1–3 показывает, что наибольший нечетный порядок компонент указанных выше групп равен 1093. Поэтому $q^2 + q + 1 \leq 1093$, откуда $q \leq 32$. Стало быть, имеем следующие возможности для q: $q = 5, 8, 11, 17, 23, 29, 32$ (отметим, что $q \equiv -1 (\operatorname{mod} 3)$). Если $q = 11, 17, 23, 29, 32$, то $m_2 = 123, 307, 553, 871$, 1057 соответственно. Однако никакая группа из табл. 1–3 не имеет таких нечетных компонент. Поэтому $q = 5$, 8. Для $q = 5$, 8 имеем $m_2 = 31, 73$ соответственно. Тем самым получаем следующие возможности для P. Если $q = 5$, то $m_2 = 31$ соответствует тому, что P изоморфна F_3, F_2, $O'N$ или J_4, и если $q = 8$, то $m_2 = 73$ соответствует $P \cong E_7(2)$. Но во всех случаях видно, что $|P| \nmid |G|$. Поэтому указанные возможности исключены.

Случай 2: $P \cong A_n$, где $n = p, p+1, p+2$, n или $n-2$ простое и $n = p, p-2$ оба простые, где $p \geq 6$ — простое число.

В силу табл. 1, 2 компоненты нечетного порядка группы A_n суть p и $p-2$, откуда $q^2 + q + 1 = p$ или $p - 2$. Значит, $p \geq q^2 + q + 1 \geq 31$. Поэтому

$$q^2 + q + 1 = p \Rightarrow p - 2 = q^2 + q - 1 \Rightarrow q^2 + q - 1 \mid |G|,$$

$$q^2 + q + 1 = p - 2 \Rightarrow p = q^2 + q + 3 \Rightarrow q^2 + q + 3 \mid |G|.$$

Оба случая невозможны.

Случай 3: $P \cong E_6(q')$. Из табл. 1 имеем $\frac{q'^6 + q'^3 + 1}{(3, q'-1)} = q^2 + q + 1$. Если $(3, q' - 1) = 1$, то

$$q'^6 + q'^3 + 1 = q^2 + q + 1 \Rightarrow q'^3(q'^3 + 1) = q(q+1) \Rightarrow q'^3 = q \Rightarrow q'^{36} = q^{12} > q^6.$$

Поэтому у группы P имеется силовская подгруппа порядка больше q^6, что невозможно по лемме 3.2(a). Однако если $(3, q' - 1) = 3$, то $\frac{q'^6 + q'^3 + 1}{3} = q^2 + q + 1 \Rightarrow q'^9 - 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} D(q)) \Rightarrow q'^9 \equiv 1 (\operatorname{mod} D(q))$. Значит, по лемме 3.2(b) имеем $q'^9 = q^3$ или $q'^9 = q^6$. Поэтому $q'^{36} = q^{12} > q^6$ или $q'^{36} = q^{24} > q^6$. Тогда в обоих случаях P имеет силовскую подгруппу порядка больше q^6, что невозможно по лемме 3.2(a).

Случай 4: $P \cong {}^2E_6(q')$, $q' > 2$. Из табл. 1 имеем $\frac{q'^6 - q'^3 + 1}{(3, q'+1)} = q^2 + q + 1$. Если $(3, q' + 1) = 1$, то

$$q'^6 - q'^3 + 1 = q^2 + q + 1 \Rightarrow q'^3(q'^3 - 1) = q(q+1).$$

Поэтому $q'^3 = q$ или $q'^3 = q + 1$. Если $q'^3 = q$, то

$$q'^3 - 1 = q - 1 \Rightarrow q'^3(q'^3 - 1) = q(q-1) < q(q+1);$$

противоречие. Поэтому $q'^3 = q + 1$, тогда $|P| > |G|$; противоречие.

Если $(3, q'+1) = 3$, то $\frac{q'^6 - q'^3 + 1}{3} = q^2 + q + 1$, откуда $q'^7 > q^2 + q + 1 > q^2$ и потому $q'^{35} > q^{10} > q^6$. Следовательно, $q'^{36} > q^6$, что невозможно по лемме 3.2(a).

Случай 5: $P \cong G_2(q'), q' \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$. Из табл. 2 имеем

$$q'^2 - q' + 1 = q^2 + q + 1 \Rightarrow q'(q'-1) = q(q+1).$$

Так как $q \neq q'$, а тогда $q' = q + 1 > q$, получаем, что $|P| > |G|$; противоречие, или

$$q'^2 + q' + 1 = q^2 + q + 1 \Rightarrow q'(q'+1) = q(q+1), q' \neq q \Rightarrow q' = q + 1$$
$$\Rightarrow q'(q'+1) = q(q+2) > q(q+1);$$

противоречие.

Случай 6: $P \cong G_2(q')$, $2 < q' \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Согласно табл. 1 если $\epsilon = 1$, то

$$q'^2 - q' + 1 = q^2 + q + 1 \Rightarrow q'(q'-1) = q(q+1), q' \neq q \Rightarrow q' = q + 1 \Rightarrow q' = 3k;$$

противоречие. Если $\epsilon = -1$, то $q'^2 + q' + 1 = q^2 + q + 1$, откуда следует, что $q = q'$. Поэтому $P \cong G_2(q)$. Так как $|P| \mid |G|$ и $|P| = |G_2(q)| = |G|$, то $P \cong G$. Отсюда получаем, что $G \cong G_2(q)$. Это единственная возможность доказать, что G изоморфна $G_2(q)$, и это подтверждает основной результат статьи.

Случай 7: $P \cong B_p(3)$. Из табл. 1 имеем $q^2 + q + 1 = \frac{3^p - 1}{2}$. Тогда $3^p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, D(q))$ и потому по лемме 3.2(b) 3^p равно q^3 или q^6. В обоих случаях $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$; противоречие.

Случай 8: $P \cong C_p(q'), q' = 2, 3$. Если $q' = 3$, то из табл. 1 имеем $\frac{3^p - 1}{2} = q^2 + q + 1$ и потому $3^p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, D(q))$. Тем самым по лемме 3.2(b) 3^p равно q^3 или q^6. В обоих случаях получаем, что $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$; противоречие.

Если $q' = 2$, то из табл. 1 имеем $2^p - 1 = q^2 + q + 1$ и потому $2^p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, D(q))$. Тем самым по лемме 3.2(b) 2^p равно q^3 или q^6; в обоих случаях $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$. Имеем также

$$2^p - 1 = q^2 + q + 1 \Rightarrow q(q+1) = 2(2^{p-1} - 1) \Rightarrow 4 \nmid q \Rightarrow q = 2;$$

противоречие.

Случай 9: $P \cong D_p(q')$, $p \geq 5$, $q' = 2, 3$ и 5. Из табл. 1 имеем $q^2 + q + 1 = \frac{q'^p - 1}{q - 1}$, поэтому $q'^p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, D(q))$. Тогда по лемме 3.2(b) q'^p равно q^3 или q^6. Так как $p \geq 5$, то $p(p-1) \geq 20$. Стало быть, $q'^{p(p-1)} > q^6$, что невозможно по лемме 3.2(a).

Случай 10: $P \cong D_{p+1}(q'), q' = 2, 3$. Из табл. 1 для $q' = 2$ имеем $q^2 + q + 1 = 2^p - 1$, поэтому $2^p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, D(q))$. Тогда по лемме 3.2(b) 2^p равно q^3 или q^6, значит, $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$. Имеем также $q^2 + q + 1 = 2^p - 1$, тогда $q(q+1) = 2(2^{p-1} - 1)$. Поэтому $4 \nmid q$, откуда $q = 2$; противоречие. Если $q' = 3$, то $q^2 + q + 1 = \frac{3^p - 1}{2}$ и потому $3^p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, D(q))$. Тогда в силу леммы 3.2(b) получаем, что 3^p равно q^3 или q^6, значит, $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$; противоречие.

Случай 11: $P \cong F_4(q')$. В силу табл. 1, 2 компоненты нечетного порядка группы $F_4(q')$ равны $q'^4 - q'^2 + 1$ и $q'^4 + 1$. Если $q'^4 - q'^2 + 1 = q^2 + q + 1$, то $q'^2(q'^2 - 1) = q(q+1)$ и потому $q = q'^2$ или $q = q'^2 - 1$. Если $q = q'^2$, то $q(q+1) = q'^2(q'^2 + 1) > q'^2(q'^2 - 1)$; противоречие. Если $q = q'^2 - 1$, то $|P| > |G|$; противоречие. Если $q^2 + q + 1 = q'^4 + 1$, то $q(q+1) = q'^4$, что невозможно.

Случай 12: $P \cong {}^2G_2(q')$, $q' = 3^{2m+1} > 3$. Из табл. 2 имеем $q^2+q+1 = q' \pm \sqrt{3q'}+1 = 3^{2m+1} \pm \sqrt{3^{2(m+1)}}+1$, откуда $q(q+1) = 3^{m+1}(3^m \pm 1)$. Поэтому $q = 3^{m+1}$ или $q = 3^m \pm 1$.

Если $q = 3^{m+1}$, то $q \equiv 0 (\operatorname{mod} 3)$; противоречие.

Если $q = 3^m \pm 1$, то из $q = 3^m+1$ получаем, что $q(q+1) = (3^m+1)(3^m+2)$, значит, $(3^m+1)(3^m+2) = 3^m(3^m+1)$. Поэтому $3^{m+1} = 3^m+2$, что невозможно, и из $q = 3^m-1$ вытекает, что $q(q+1) = (3^m-1)3^m$; тогда $3^m(3^m-1) = 3^{m+1}(3^m-1)$. Поэтому $3^m = 3^{m+1}$, что невозможно.

Случай 13: $P \cong E_8(q')$. В силу табл. 3 компоненты нечетного порядка группы $E_8(q')$ имеют вид ${q'}^8 - {q'}^4 + 1$, $\frac{{q'}^{10} \pm {q'}^5+1}{{q'}^2 \pm q'+1}$ и $\frac{{q'}^{10}+1}{{q'}^2+1}$.

Если $q^2+q+1 = {q'}^8 - {q'}^4+1$, то $q(q+1) = {q'}^4({q'}^4-1)$. Поэтому $q = {q'}^4$ или ${q'}^4-1$. Если $q = {q'}^4$, то $q(q+1) = {q'}^4({q'}^4+1) > {q'}^4({q'}^4-1)$; противоречие. Если $q = {q'}^4-1$, то $|P| > |G|$; противоречие.

Если $q^2+q+1 = \frac{{q'}^{10}+{q'}^5+1}{{q'}^2+q'+1}$, то ${q'}^{15} \equiv 1(\operatorname{mod} D(q))$. По лемме 3.2(b) ${q'}^{15} = q^3$ или ${q'}^{15} = q^6$. Тогда ${q'}^5 = q$ или ${q'}^5 = q^2$. Для двух случаев имеем ${q'}^{120} > q^6$, что невозможно по лемме 3.2(a).

Если $q^2+q+1 = \frac{{q'}^{10}-{q'}^5+1}{{q'}^2-q'+1}$, то ${q'}^{30} \equiv 1(\operatorname{mod} D(q))$. В силу леммы 3.2(b) имеем ${q'}^{30} = q^3$ или ${q'}^{30} = q^6$; значит, ${q'}^{10} = q$ или ${q'}^5 = q$. Для двух случаев имеем ${q'}^{120} > q^6$, что невозможно по лемме 3.2(a).

Если $q^2+q+1 = \frac{{q'}^{10}+1}{{q'}^2+1}$, то ${q'}^{20} \equiv 1(\operatorname{mod} D(q))$. По лемме 3.2(b) ${q'}^{20}$ равно q^3 или q^6. Для двух случаев имеем ${q'}^{120} > q^6$, что невозможно по лемме 3.2(a).

Случай 14: $P \cong {}^2D_n(2)$, $n = 2^m+1 \geq 5$. В силу табл. 1 $q^2+q+1 = 2^{n-1}+1$ и, следовательно, $q(q+1) = 2^{n-1}$; противоречие.

Случай 15: P изоморфна ${}^2A_{p-1}(q')$ или ${}^2A_p(q')$. В силу табл. 1 q^2+q+1 равно $\frac{{q'}^p+1}{q'+1}$ или $\frac{{q'}^p+1}{(q'+1)(p,q'+1)}$. Тогда ${q'}^{2p} \equiv 1(\operatorname{mod} D(q))$, поэтому из леммы 3.2(b) заключаем, что ${q'}^{2p}$ равно q^3 или q^6.

Имеем

$$
{q'}^{2p} = q^6 \Rightarrow {q'}^p = q^3 \Rightarrow q^2+q+1 = \frac{{q'}^p+1}{(q'+1)(p,q'+1)} = \frac{q^3+1}{(q'+1)(p,q'+1)}
$$
$$
= \frac{(q+1)(q^2-q+1)}{(q'+1)(p,q'+1)} \Rightarrow (q^2+q+1) \mid (q+1) \text{ или } (q^2+q+1) \mid (q^2-q+1).
$$

Оба эти утверждения противоречивы.

Далее,

$$
{q'}^{2p} = q^3 \Rightarrow q^2+q+1 = \frac{{q'}^p+1}{(q'+1)(p,q'+1)} = \frac{{q'}^{2p}-1}{({q'}^p-1)(q'+1)(p,q'+1)}
$$
$$
= \frac{q^3-1}{({q'}^p-1)(q'+1)(p,q'+1)} \frac{(q-1)(q^2+q+1)}{({q'}^p-1)(q'+1)(p,q'+1)}
$$
$$
\Rightarrow \frac{(q-1)}{({q'}^p-1)(q'+1)(p,q'+1)} = 1 \Rightarrow (q-1) = ({q'}^p-1)(q'+1)(p,q'+1) > q-1;
$$

противоречие.

Случай 16: $P \cong A_p(q')$, где $(q'-1) \mid (p+1)$. Из табл. 1 имеем $q^2+q+1 = \frac{{q'}^p-1}{q'-1}$. Следовательно, ${q'}^p \equiv 1(\operatorname{mod} D(q))$. Поэтому по лемме 3.2(b) ${q'}^p$ равно q^3 или q^6.

Если $q'^p = q^6$, то $q'^{p(p+1)/2} > q^6$, что невозможно по лемме 3.2(a).

Если $q'^p = q^3$ и $p > 3$, то $q'^{p(p+1)/2} > q^6$, что невозможно по лемме 3.2(a). Если $P \cong A_3(q)$, то $|P| > |G|$; противоречие.

Случай 17: $P \cong {}^2D_p(3)$, где $5 \le p$. В силу табл. 1, 2 компоненты нечетного порядка группы ${}^2D_p(3)$ суть $\frac{3^p+1}{4}$ и $\frac{3^{p-1}+1}{2}$. Если $q^2+q+1 = \frac{3^p+1}{4}$, то $3^{2p} \equiv 1(\operatorname{mod} D(q))$, поэтому по лемме 3.2(b) 3^{2p} равно q^3 или q^6. Тогда $q \equiv 0(\operatorname{mod} 3)$; противоречие. Если $q^2+q+1 = \frac{3^{p-1}+1}{2}$, то $3^{2p-2} \equiv 1(\operatorname{mod} D(q))$, и по лемме 3.2(b) имеем $3^{2p-2} = q^3$ или q^6. Поэтому $q \equiv 0(\operatorname{mod} 3)$; противоречие.

Случай 18: $P \cong {}^2D_n(3)$, где $5 \le p \ne 2^m+1$. Из табл. 1 имеем $q^2+q+1 = \frac{3^{n-1}+1}{2}$. Получаем, что $3^{2n-2} \equiv 1(\operatorname{mod} D(q))$. Тогда по лемме 3.2(b) 3^{2n-2} равно q^3 или q^6, поэтому $q \equiv 0(\operatorname{mod} 3)$; противоречие.

Случай 19: $P \cong {}^3D_4(q')$. Из табл. 1 имеем $q^2+q+1 = q'^4 - q'^2 + 1$; тогда $q(q+1) = q'^2(q'^2-1)$. Значит, $q = q'^2$ или $q = q'^2 - 1$. Если $q = q'^2$, то $q(q+1) = q'^2(q'^2+1) > q'^2(q'^2-1)$; противоречие. Если $q = q'^2 - 1$, то $q'^2 = q+1$, откуда $|P| > |G|$; противоречие.

Случай 20: $P \cong {}^2B_2(q')$, где $q' = 2^{2m+1} > 2$. В силу табл. 3 компоненты нечетного порядка группы ${}^2B_2(q')$ суть $q'-1$, $q' - \sqrt{2q'}+1$ и $q'+\sqrt{2q'}+1$. Если $q^2+q+1 = q'-1$, то $q' \equiv 1(\operatorname{mod} D(q))$. Значит, по лемме 3.2(b) $q' = q^3$ или $q' = q^6$. Если $q' = q^6$, то $q'^2 = q^{12} > q^6$, что невозможно по лемме 3.2(a). Если $q' = q^3$, то $|P| > |G|$; противоречие.

Если $q^2+q+1 = q' \pm \sqrt{2q'}+1$, то $q(q+1) = 2^{m+1}(2^m \pm 1)$. Поэтому $2^{m+1} \mid q$ или $2^{m+1} \mid (q+1)$. Если $2^{m+1} \mid q$, то $q = 2^{m+1}$ и потому $q(q+1) = 2^{m+1}(2^{m+1}+1) > 2^{m+1}(2^m-1)$; противоречие. Если $2^{m+1} \mid (q+1)$, то $q+1 = 2^{m+1} = 3k$, что невозможно.

Случай 21: $P \cong {}^2F_4(q')$, где $q' = 2^{2m+1} > 2$. Согласно табл. 2 компоненты нечетного порядка группы ${}^2F_4(q')$ суть $q' \pm \sqrt{2q'^3} + q' \pm \sqrt{2q'}+1$. Тогда $q^2+q+1 = q' \pm \sqrt{2q'^3} + q' \pm \sqrt{2q'}+1$, значит, $q(q+1) = 2^{m+1}(2^{3m+1} \pm 2^{2m+1} + 2^m \pm 1)$. Из этого уравнения получаем, что $2^{m+1} \mid q$ или $2^{m+1} \mid (q+1)$. Если $2^{m+1} \mid q$, то $q = 2^{m+1}$, откуда $2^{m+1}(2^{m+1}+1) = 2^{m+1}(2^{3m+1} \pm 2^{2m+1} + 2^m \pm 1)$, что невозможно. Аналогично случаю, рассмотренному выше, выводим, что $2^{m+1} \mid (q+1)$ также невозможно.

Случай 22: $P \cong {}^2D_n(q')$, $n = 2^m \ge 4$; $P \cong C_n(q')$, $n = 2^m \ge 4$ или $P \cong B_n(q')$, $n = 2^m \ge 4$, q' нечетно. В упомянутых выше случаях компоненты нечетного порядка суть $\frac{q'^n+1}{(2,q'+1)}$, $\frac{q'^n+1}{(2,q'-1)}$ или $\frac{q'^n+1}{2}$ соответственно. Так как q' нечетно, во всех этих случаях компонентой нечетного порядка во всех этих группах является $\frac{q'^n+1}{2}$. Если $q^2+q+1 = \frac{q'^n+1}{2}$, то $q^2+q+1 = \frac{q'^n+1}{2} < q'^n$, $n \ge 4$, значит, $(q^2+q+1)^3 < q'^{n(n-1)}$, откуда $q'^{n(n-1)} > q^6$; противоречие.

Случай 23: $P \cong {}^2D_n(q')$, $n = 2^m \ge 4$ и q' четно. В силу табл. 1 компонента нечетного порядка группы ${}^2D_n(q')$ есть $q'^n + 1$. Поэтому $q^2+q+1 = q'^n+1$ и $q(q+1) = q'^n$, что невозможно.

Случай 24: $P \cong C_2(q')$, q' нечетно. В силу табл. 1 компонента нечетного порядка группы $C_2(q')$ есть $\frac{q'^2+1}{2}$. Поэтому $q^2+q+1 = \frac{q'^2+1}{2}$ и $q'^2 = 2q^2+2q+1$. Отсюда $|C_2(q')| = q'^4(q'^2-1)^2(q'^2+1)/2 = 4q^2(q+1)^2(q^2+q+1)(2q^2+2q+1)^2$. Так как $|P| \mid |G|$, то $(2q^2+2q+1) \mid q^6(q-1)^2(q+1)^2(q^2-q+1)$. Поскольку

$$(2q^2+2q+1, q-1) = (5, q-1), \quad (2q^2+2q+1, q^2-q+1) = 1, \quad (2q^2+2q+1, q+1) = 1, \tag{3}$$

имеем $(2q^2+2q+1) \mid 5^2$, что невозможно.

Случай 25: $P \cong A_1(q')$, где q' — степень 2. В силу табл. 2 компоненты нечетного порядка группы $A_1(q')$ суть $q'+1$ и $q'-1$. Поэтому если $q^2+q+1 = q'+1$, то $q(q+1) = q'$, что невозможно. Если $q^2+q+1 = q'-1$, то $q' \equiv 1(\bmod D(q))$. Следовательно, по лемме 3.2(b) имеем $q' = q^3$ или $q' = q^6$. Если $q' = q^3$, то $q^2+q+1 = q'-1 = q^3-1 = (q-1)(q^2+q+1)$, значит, $(q-1) = 1$, что невозможно, потому что $q \geq 5$. Аналогично вышеизложенному можно показать, что $q' \neq q^6$. Поэтому $P \ncong A_1(q')$, где q' — степень 2.

Случай 26: $P \cong A_1(q')$, q' не является степенью 2. В силу табл. 2 компоненты нечетного порядка группы $A_1(q')$ суть q', $(q'+1)/2$ и $(q'-1)/2$. Поэтому если $q^2+q+1 = q'$, то $|A_1(q')| = q'(q'+1)(q'-1)/2 = (q^2+q+1)(q^2+q+2)q(q+1)/2$. Так как $|P| \mid |G|$, получаем $\frac{(q^2+q+2)}{2} \mid q^6(q-1)^2(q+1)^2(q^2-q+1)$. Простое вычисление показывает, что

$$\begin{gathered}(q^2+q+2, q+1) = (2, q+1), \quad (q^2+q+2, q-1) = (4, q-1), \\ (q^2+q+2, q^2-q+1) = (7, q^2+5).\end{gathered} \tag{4}$$

Поэтому $(q^2+q+2)/2 \mid 2^6.7$, откуда $(q^2+q+2)/2 = 2^4.7$. Следовательно, для этого уравнения имеем $q = 10$, что невозможно $(q = 3k-1)$. Имеем также $(q^2+q+2)/2 \mid 2^6$. Отсюда $q^2+q+2 = 2^5$, значит, $q(q+1) = 6.5$. Поэтому $q = 5$ и $q' = 31$. Таким образом, $P \cong A_1(31)$. Согласно [3] $|\operatorname{Out}(P)| = 2$, и по лемме 2.3(b) имеем $|G/K| \mid |\operatorname{Out}(P)|$. Полагая $|G/K| = t$, получаем $t = 1$ или $t = 2$ и $t|H||P| = |G|$, откуда $t|H|(2^5.3.5.31) = 2^6.3^3.5^6.7.31$. Поэтому $|H| = 2.3^2.5^5.7/t$, где $t = 1$ или $t = 2$. Пусть $S \in \operatorname{Syl}_7(H)$. Тогда $|S| = 7$. Так как H нильпотентна, $S \trianglelefteq G$ и лемма 2.2 влечет, что $m_2 \mid |S|-1$, т. е. $31 \mid 7-1$, что невозможно.

Если $4 \mid q'+1$, то $q^2+q+1 = q'-1/2$, и тогда $q' = 2q^2+2q+3$. Отсюда $|A_1(q')| = 2(q^2+q+1)(q^2+q+2)(2q^2+2q+3)$. Так как $|P| \mid |G|$, то $(q^2+q+2) \mid q^6(q-1)^2(q+1)^2(q^2-q+1)$. В силу (4) $(q^2+q+2) \mid 2^6.7$, откуда $(q^2+q+2) = 2^5.7$. Из этого уравнения имеем $q = 10$, что невозможно $(q = 3k-1)$. Также имеем $(q^2+q+2) \mid 2^6$. Отсюда $q^2+q+2 = 2^5$, значит, $q(q+1) = 6.5$. Поэтому $q = 5$ и $q' = 63 = 3^2.7$, что невозможно, так как q' — степень простого числа.

Если $4 \mid q'-1$, то $q^2+q+1 = q'+1/2$, и тогда $q' = 2q^2+2q+1$. Отсюда $|A_1(q')| = 2q(q+1)(q^2+q+1)(2q^2+2q+1)$. Так как $|P| \mid |G|$, то $(2q^2+2q+1) \mid q^6(q-1)^2(q+1)^2(q^2-q+1)$. Поэтому в силу (3) имеем $2q^2+2q+1 \mid 5^2$. Тогда $2q^2+2q+1 = 25$, откуда $2q(q+1) = 24$, что дает $q = 3$ (противоречие) или $2q^2+2q+1 = 5$. Из последнего вытекает, что $2q(q+1) = 4$, откуда $q = 1$; противоречие.

Случай 27: $P \cong {}^2D_{p+1}(2)$, где $n \geq 2$ и $p = 2^n-1$. В силу табл. 2 компоненты нечетного порядка группы ${}^2D_{p+1}(2)$ суть 2^p+1 и $2^{p+1}+1$. Если $q^2+q+1 = 2^p+1$, то $q(q+1) = 2^p$, что невозможно. Если $q^2+q+1 = 2^{p+1}+1$, то $q(q+1) = 2^{p+1}$, что невозможно.

Случай 28: $P \cong A_{p-1}(q'), (p, q') \neq (3,2), (3,4)$. В силу табл. 1 $q^2+q+1 = \frac{q'^p-1}{(p,q'-1)(q'-1)}$. Тогда $q'^p \equiv 1(\bmod D(q))$. Поэтому из леммы 3.2(b) получаем, что q'^p равно q^3 или q^6. Если $q'^p = q^6$ и $p \geq 5$, то $q'^{\frac{p(p-1)}{2}} > q^6$, что невозможно по лемме 3.2(a). Если $q'^p = q^3$ и $p \geq 5$, то $q'^{\frac{p(p-1)}{2}} > q^6$, что невозможно по лемме 3.2(a).

Для ${q'}^5 = q^3$ имеем $q^2 + q + 1 = \frac{q^3-1}{q-1} = \frac{{q'}^5-1}{(q'-1)(5,q'-1)}$, и тогда $q - 1 = (q' - 1)(5, q' - 1)$. Рассмотрим два случая. Если $(5, q' - 1) = 1$, то $q - 1 = q' - 1$, поэтому $q = q'$; противоречие. Если $(5, q' - 1) = 5$, то $q = 5q' - 4$. Так как $q = 3k - 1$, то $5q' = 3k + 3 = 3(k + 1)$. Отсюда $3 \mid q'$; противоречие.

Пусть $p = 3$. Если ${q'}^3 = q^6$, то $q' = q^2$. Отсюда следует, что $|P| > |G|$; противоречие. Если ${q'}^3 = q^3$, то $q = q'$ и $P \cong A_2(q)$. Из табл. 1 имеем $q^2+q+1 = \frac{q^3-1}{(q-1)(3,q-1)}$, откуда $(3, q - 1) = 1$. Пусть $q = r^f$, где r — простое число. Так как $3 \nmid q$, то $3 \nmid r$ и $r \equiv -1 (\bmod 3)$. Поэтому $r^2 \equiv 1 (\bmod 3)$. Покажем, что f нечетно. Предположим, что f четно. Тогда $f = 2\alpha$ для некоторого натурального α, откуда следует, что $q = r^f = r^{2\alpha} \equiv 1^\alpha = 1 (\bmod 3)$. Значит, $q \equiv 1 (\bmod 3)$; противоречие. Следовательно, $(f, 2) = 1$. Согласно [3] имеем $|\operatorname{Out}(P)| = 2f$, а по лемме 2.3(b) получаем, что $|G/K| \mid |\operatorname{Out}(P)|$. Положим $|G/K| = t$ и получим, что $t|H||P| = |G|$ и $t \mid 2f$. Поскольку доказали, что $(f, 2) = 1$, то $(t, 2) = 1$ или $t = 2$. Используя табл. 1 и подставляя порядки P и G в равенство $t|H||P| = |G|$, получим

$$t|H|q^3(q-1)^2(q+1)(q^2+q+1) = q^6(q-1)^2(q+1)^2(q^2+q+1)(q^2-q+1)$$
$$\Rightarrow t|H| = q^3(q+1)(q^2-q+1).$$

Так как $q = 3k - 1$, имеем $q + 1 = 3k$ и $q^2 - q + 1$ нечетно. Если $t = 2$, q четно и $S \in \operatorname{Syl}_2(H)$, то $q + 1$ нечетно. Поэтому $t|S| = q^3$ или $|S| = q^3/2$. Но H нильпотентна, значит, $S \trianglelefteq G$. Из леммы 2.2 следует, что $m_2 \mid |S| - 1$, т. е. $q^2 + q + 1 \mid q^3/2 - 1$, что невозможно. Если q нечетно, то $q + 1$ четно и $t|S| = (q + 1)_2$. Поэтому $|S| = (q + 1)_2/2$. Так как H нильпотентна, то $S \trianglelefteq G$ и из леммы 2.2 следует, что $m_2 \mid |S| - 1$, т. е. $q^2 + q + 1 \mid (q + 1)_2/2 - 1$, что невозможно.

Если $t = 1$, то $|H| = q^3(q + 1)(q^2 - q + 1)$. Имеем $(q + 1, q^2 - q + 1) = 3$, и потому если $S \in \operatorname{Syl}_3(H)$, то $|S| = 3(q + 1)_3$. Так как H нильпотентна, то $S \trianglelefteq G$ и из леммы 2.2 следует, что $m_2 \mid |S| - 1$, т. е. $q^2 + q + 1 \mid 3(q + 1)_3 - 1$, что невозможно.

Так как мы рассмотрели все простые группы из табл. 1–3, основная теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
2. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
3. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
4. *Chen G. Y.* A new characterization of $PSL_2(q)$ // Southeast Asian Bull. Math. 1998. V. 22, N 3. P. 257–263.
5. *Chen G. Y.* Characterization of ${}^3D_4(q)$ // Southeast Asian Bull. Math. 2001. V. 25. P. 389–401.
6. *Chen G. Y., Shi H.* ${}^2D_n(3)$ ($9 \leq n = 2^m + 1$ not a prime) can be characterized by its order components // J. Appl. Math. Comput. 2005. V. 19, N 1–2. P. 353–362.
7. *Shi H., Chen G. Y.* ${}^2D_{p+1}(2)$ ($5 \leq p \neq 2^m - 1$) can be characterized by its order components // Kumamoto J. Math. 2005. V. 18. P. 1–8.
8. *Darafsheh M. R., Mahmiani A.* A quantitative characterization of the linear groups $L_{p+1}(2)$ // Kumamoto J. Math. 2007. V. 20. P. 33–50.
9. *Darafsheh M. R.* Characterizability of the group ${}^2D_p(3)$ by its order components, where $p \geq 5$ is a prime number not of the form $2^m + 1$ // Acta Math. Sin. (Engl. Ser). 2008. V. 24, N 7. P. 1117–1126.

10. *Darafsheh M. R., Mahmiani A.* A characterization of the group ${}^2D_n(2)$, where $n = 2^m+1 \geq 5$ // J. Appl. Math. Comput. 2009. V. 31, N 1–2. P. 447–457.

11. *Darafsheh M. R.* Characterization of the groups $D_{p+1}(2)$ and $D_{p+1}(3)$ using order components // J. Korean Math. Soc. 2010. V. 47, N 2. P. 311–329.

12. *Darafsheh M. R., Khademi M.* Characterization of the groups $D_p(q)$ by order components, where $p \geq 5$ is a prime and $q = 2, 3$ or 5 // South East Asian Bull. Math. (accepted).

13. *Iranmanesh A., Alavi S. H., Khosravi B.* A characterization of $PSL(3, q)$, where q is an odd prime power // J. Pure Appl. Algebra. 2002. V. 170, N 2–3. P. 243–254.

14. *Iranmanesh A., Alavi S. H., Khosravi B.* A characterization of $PSL(3, q)$ for $q = 2^n$ // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 2002. V. 18, N 3. P. 463–472.

15. *Iranmanesh A., Khosravi B., Alavi S. H.* A characterization of $PSU(3, q)$ for $q > 5$ // South Asian Bull. Math. 2002. V. 26, N 2. P. 33–44.

16. *Behrooz Khosravi, Bahnam Khosravi.* A characterization of $E_6(q)$ // Algebras, Groups Geom. 2002. V. 19. P. 225–243.

17. *Behrooz Khosravi, Bahnam Khosravi.* A characterization of ${}^2E_6(q)$ // Kumamoto J. Math. 2003. V. 16. P. 1–11.

18. *Khosravi A., Khosravi B.* A characterization of ${}^2D_n(q)$, where $n = 2^m$ // Int. J. Math. Game Theory Algebra. 2003. V. 13. P. 253–265.

19. *Khosravi A., Khosravi B.* A new characterization of $PSL(p, q)$ // Comm. Alg. 2004. V. 32. P. 2325–2339.

20. *Bahman Khosravi, Behnam Khosravi, Khosravi B.* A new characterization of $PSU(p, q)$ // Acta Math. Hungar. 2005. V. 107, N 3. P. 235–252.

21. *Behrooz Khosravi, Bahman Khosravi, Behnam Khosravi.* Characterizability of $PSL(p+1, q)$ by its order components // Houston J. Math. 2006. V. 32, N 3. P. 683–700.

22. *Khosravi A., Khosravi B.* Characterizability of $PSU(p + 1, q)$ by its order components // Rocky Mount. J. Math. 2006. V. 36, N 5. P. 1555–1575.

23. *Khosravi A., Khosravi B.* r-Recognizability of $B_n(q)$ and $C_n(q)$, where $n = 2^m \geq 4$ // J. Pure Appl. Algebra. 2005. V. 199. P. 149–165.

24. *Khademi M.* Characterizability of finite simple groups by their order components: a summary of results // Int. J. Algebra. 2010. V. 4, N 9. P. 413–420.

25. *Chen G. Y.* A new characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1996. V. 3, N 1. P. 49–58.

26. *Chen G. Y.* On Frobenius and 2-Frobenius group // J. Southwest China Normal Univ. 1995. (in Chinese). V. 20, N 5. P. 485–487.

27. *Zsigmondy K.* Zür Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.

Статья поступила 9 ноября 2011 г.

Parivas Nosratpour (Носратпур Паривас)
Department of Mathematics, Science and Research Branch,
Islamic Azad University, Tehran, Iran
`p.nosratpour@ilam-iau.ac.ir`

Mohammad Reza Darafsheh (Дарафшех Мохаммед Реза)
School of Mathematics, Statistics and Computer Science,
College of Science, University of Tehran, Tehran, Iran
`darafsheh@ut.ac.ir`