Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 515.12

ПОДНЯТИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРОВ В КАТЕГОРИИ КОМПАКТОВ НА КАТЕГОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

О. Р. Никифорчин, Д. Реповш

Аннотация. Доказано, что поднятия нормального функтора F в категории компактных хаусдорфовых пространств на категории (абелевых) компактных полугрупп (моноидов) определяются естественными преобразованиями $F(-) \times F(-) \to F(- \times -)$, удовлетворяющими условиям, которые соответствуют ассоциативности, коммутативности и существованию единицы. В частности, этим (не обязательно всем) требованиям удовлетворяют тензорные произведения для нормальных монад. Доказано, что степенной функтор в категории компактов является единственным среди нормальных функторов, допускающим естественное поднятие на категорию выпуклых компактов и их непрерывных аффинных отображений.

Ключевые слова: компактная полугруппа, компактный моноид, выпуклый компакт, нормальный функтор, поднятие.

Введение

Работа посвящена продолжениям непрерывных алгебраических операций с компактных хаусдорфовых пространств на образы этих пространств под действием функториальных топологических конструкций. В первую очередь речь идет о функтор-полугруппах, часто встречающихся в различных областях математики. Самыми известными (и, наверное, важнейшими) из них являются сверточные полугруппы — пространства $P(G)$ борелевских вероятностных мер на компактных топологических группах G, снабженные операцией свертки мер. Сверточные полугруппы — это главные объекты и инструменты гармонического анализа [1].

Хорошо известна также другая функтор-полугруппа — глобальная полугруппа (или гиперполугруппа) $\exp(G)$ над компактной топологической группой G (см. [2]). Это гиперпространство непустых замкнутых подмножеств в G, наделенное полугрупповой операцией $A \cdot B = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$.

Сверточные полугруппы и глобальные полугруппы представляют собой частные случаи топологических полугрупп, пространства которых являются результатами применения функтора F к компактной топологической группе (или даже полугруппе) G. А. Б. Телейко и М. М. Заричный отметили, что операции на этих полугруппах естественно определяются тензорными произведениями,

Поддержано грантами Словенского исследовательского агентства P1–0292–0101, J1–4144–0101, грантом 25.1/099 Государственного фонда фундаментальных исследований Украины и Программой научно-технического сотрудничества между Украиной и Словенией (проект M/95–2009).

связанными со структурой монады для функтора F [3, 4]. Это наблюдение привело к введению функтор-полугрупп. Упомянутые авторы доказали, что для функтора F в категории $\mathscr{C}omp$ компактных хаусдорфовых пространств, являющегося функториальной частью монады и принадлежащего к введенному Е. В. Щепиным [5] классу нормальных функторов, полугрупповая операция на каждой компактной топологической полугруппе X функториальным образом продолжается до непрерывной полугрупповой операции на пространстве $F(X)$. Таким образом они определили поднятие функтора $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$ до функтора $\overline{F} : \mathscr{C}\mathscr{S}\mathscr{G}r \to \mathscr{C}\mathscr{S}\mathscr{G}r$ в категории компактных топологических полугрупп.

Это, в частности, позволило в [2, 6] использовать общий подход для решения последовательности задач следующего вида: охарактеризовать топологические полугруппы, вкладываемые в функтор-полугруппы для слабо нормального функтора в категории компактов. Эти исследования закономерно привели к вопросу: существует ли способ построения поднятий функторов в категории компактов на категории (абелевых) компактных полугрупп (моноидов) в условиях, менее ограничительных, чем существование монады. В данной статье показано, что каждое такое поднятие определяется единственным естественным преобразованием, удовлетворяющим некоторым условиям. В частности, тензорное произведение является таким естественным преобразованием. В то же время построен пример естественного поднятия для нормального функтора, не определяемого тензорным произведением.

Другой основной результат этой работы является аналогом теоремы Заричного [7] о том, что из всех нормальных функторов естественные поднятия на категорию компактных топологических *групп* допускают только степенные функторы, т. е. операции возведения в конечную или счетную степень. Мы показываем, что для нормального функтора существует естественное поднятие на категорию выпуклых компактов и их непрерывных аффинных отображений тогда и только тогда, когда этот функтор степенной. Это означает, что для нормального функтора $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$, отличного от степенного, невозможно продолжить выпуклые структуры с каждого выпуклого компакта X на компакт FX так, чтобы отображения $Ff : FX \to FY$ были аффинными для всех аффинных $f : X \to Y$.

§ 1. Необходимые понятия и факты

В этой статье под *компактом* подразумевается не обязательно метризуемое компактное хаусдорфово топологическое пространство [8]. Относительно понятий *категории, морфизма, моно- и эпиморфизма, диаграммы, предела,* (*ковариантного*) *функтора, обратного спектра* см. [9, 10]. Обозначим через $\mathscr{C}omp$ [10] категорию, состоящую из компактов и их непрерывных отображений. Напомним, что моно- и эпиморфизмы в $\mathscr{C}omp$ суть соответственно инъективные и сюръективные отображения. Категория, объектами которой являются компактные полугруппы, а стрелками — их непрерывные гомоморфизмы, обозначена через $\mathscr{C}\mathscr{S}\mathscr{G}r$. Подобные обозначения $\mathscr{C}\mathscr{A}b\mathscr{S}\mathscr{G}r$, $\mathscr{C}\mathscr{M}on$ и $\mathscr{C}\mathscr{A}b\mathscr{M}on$ употребляются для категорий компактных абелевых полугрупп, компактных моноидов и компактных абелевых моноидов. Объектами категории выпуклых компактов $\mathscr{C}onv$ являются компакты, выпуклые комбинации на которых определены вложениями в качестве выпуклых множеств в локально выпуклые векторные топологические пространства. Морфизмы этой категории суть непрерывные аффинные, т. е. сохраняющие выпуклые комбинации, отображения.

Для забывающих функторов из $\mathscr{CSG}r$, $\mathscr{CA}\mathrm{b}\mathscr{SG}r$, $\mathscr{CM}on$, $\mathscr{CA}\mathrm{b}\mathscr{M}on$ и $\mathscr{C}onv$ в $\mathscr{C}omp$ употребляем общее обозначение U.

Для произвольного функтора $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$, компакта X, элемента $a \in FX$ и замкнутого подмножества $A \subset X$ полагаем $a \in FA$, если $a \in Fi(FA)$, где $i : A \hookrightarrow X$ — включение.

Функтор F в $\mathscr{C}omp$ называется *нормальным* [5], если выполнены следующие условия:

a) сохранение моно- и эпиморфизмов (соответствующий функтор называется *моно*- или *эпиморфным*);
b) сохранение прообразов (для каждого морфизма $f : X \to Y$ в $\mathscr{C}omp$, $a \in FX$, $Y_0 \subset Y$, $Ff(a) \in FY_0$, выполнено $a \in F(f^{-1}(Y_0)))$;
c) сохранение пересечений (если X_α, $\alpha \in \mathscr{A}$, — семейство замкнутых подпространств компакта X, то $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathscr{A}} F(X_\alpha) = F(\bigcap\limits_{\alpha\in\mathscr{A}} X_\alpha))$;
d) сохранение пределов обратных спектров (*непрерывность* функтора) [10];
e) сохранение пустого множества ($F\varnothing = \varnothing$);
f) сохранение одноточечных множеств (FX одноточечно, если таковым является X);
g) сохранение веса ($w(FX) = w(X)$ для каждого компакта X).

Для мономорфного (например, нормального) функтора $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$ и замкнутого подмножества A компакта X отождествляем гомеоморфные пространства FA и $Fi(FA) \subset FX$, где $i : A \hookrightarrow X$ — включение.

Для произвольного $a \in FX$ и сохраняющего пересечения функтора F множество $\operatorname{supp}_F a = \bigcap\{A \mid A \subset X — \text{замкнуто}, a \in FA\}$ — наименьшее из замкнутых подмножеств A в X, для которых $a \in FA$, и называется *носителем* элемента a. Если функтор F сохраняет моно- и эпиморфизмы, то сохранение им прообразов равносильно сохранению носителей: $\operatorname{supp}_F Ff(a) = f(\operatorname{supp}_F a)$ для каждого $a \in FX$ и непрерывного отображения компактов $f : X \to Y$.

Аксиомы нормального функтора не являются независимыми. В частности [11], для мономорфного и эпиморфного функтора в $\mathscr{C}omp$ из сохранения пересечений следует непрерывность.

§ 2. Основные результаты

Пусть $\mathscr{C}$ — одна из категорий $\mathscr{CSG}r$, $\mathscr{CA}\mathrm{b}\mathscr{SG}r$, $\mathscr{CM}on$ и $\mathscr{CA}\mathrm{b}\mathscr{M}on$. Функтор $\overline{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ называем *поднятием* на $\mathscr{C}$ функтора $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$, если диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "\overline{F}"] \arrow[d, "U"'] & \mathscr{C} \arrow[d, "U"] \\ \mathscr{C}omp \arrow[r, "F"'] & \mathscr{C}omp \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $U\overline{F} = FU$. Это значит, что для каждой компактной (абелевой) полугруппы (или моноида) $(X, \odot)$ на компакте FX определена непрерывная ассоциативная операция $\bar{\odot}$, превращающая FX в (абелеву) полугруппу (соответственно моноид), и $\overline{F}(X, \odot) = (FX, \bar{\odot})$. Более того, для каждого непрерывного гомоморфизма $f : (X, \odot) \to (Y, \odot)$, т. е. стрелки в соответствующей категории, отображение Ff также является гомоморфизмом $(FX, \bar{\odot}) \to (FY, \bar{\odot})$.

Для произвольного функтора $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$ легко построить по крайней мере два поднятия $\overline{F} : \mathscr{CSG}r \to \mathscr{CSG}r$, положив произведение $a \,\bar{\odot}\, b$ элементов $a, b \in FX$ всегда равным a (или b). Чтобы «отсечь» эти тривиальные случаи, наложим естественное дополнительное требование.

В последующем мы всегда предполагаем, что функтор F сохраняет мономорфизмы, прообразы, пересечения, пустое множество и одноточечные множества. Пусть $\eta X : X \to FX$ — отображение, которое сопоставляет каждой точке x компакта X единственный элемент $F\{x\} \subset FX$. Т. Банах показал, что ηX является топологическим вложением и компонентом единственного естественного преобразования $\eta : \mathbf{1}_{\mathscr{C}omp} \to F$ [10]. Поэтому рассматриваем X как подмножество FX. Если отображение ηX — морфизм $(X, \odot) \to (FX, \bar{\odot})$ в соответствующей категории, т. е. операция $\bar{\odot}$ на $\overline{F}X$ является продолжением операции $\bar{\odot}$ на X, а для моноидов единица X является также единицей FX, то поднятие $\overline{F}$ называем *естественным* [4].

Мы показываем, что каждое естественное поднятие нормального функтора F в $\mathscr{C}omp$ на упомянутые категории определяется единственным естественным преобразованием $t : F(-) \times F(-) \to F(- \times -)$, т. е. такой совокупностью непрерывных отображений $t(X,Y) : FX \times FY \to F(X,Y)$ для всех компактов X, Y, что для каждых непрерывных отображений компактов $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ и элементов $a \in FX$, $b \in FY$ выполнено равенство $t(X', Y')(Ff(a), Fg(b)) = F(f \times g)(t(X,Y)(a,b))$.

Ниже отображения $p : X \times Y \to Y \times X$, $\bar{p} : FX \times FY \to FY \times FX$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, $a \in FX$, $b \in FY$ определены как $p(x,y) = (y,x)$, $\bar{p}(a,b) = (b,a)$.

Рассмотрим следующие возможные свойства естественного преобразования t:

$$t(X \times Y, Z)(t(X,Y)(a,b), c) = t(X, Y \times Z)(a, t(Y,Z)(b,c)) \qquad (*)$$

для всех $a \in FX$, $b \in FY$, $c \in FZ$ («ассоциативный закон»);

$$F\,\mathrm{pr}_1 \circ t(X, \{y\})(a, \eta\{y\}(y)) = a, F\,\mathrm{pr}_2 \circ t(\{x\}, Y)(\eta\{x\}(x), b) = b \qquad (**)$$

для всех $a \in FX$, $b \in FY$, $x \in X$, $y \in Y$ («двусторонняя единица»);

$$Fp \circ t(X,Y)(a,b) = t(Y,X)(b,a) \qquad (***)$$

для всех $a \in FX$, $b \in FY$ («коммутативный закон»).

Эти свойства удобно представлять в виде коммутативных диаграмм:

$$\begin{tikzcd} FX \times FY \times FZ \arrow[r, "t(X,Y)\times \mathbf{1}_{FZ}"] \arrow[d, "\mathbf{1}_{FX}\times t(Y,Z)"'] & F(X \times Y) \times FZ \arrow[d, "t(X\times Y,Z)"'] \\ FX \times F(Y \times Z) \arrow[r, "t(X,Y\times Z)"'] & F(X \times Y \times Z) \end{tikzcd}, \qquad (*)$$

$$\begin{tikzcd} FX \times F\{y\} \arrow[r, "t(X,\{y\})"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & F(X \times \{y\}) \arrow[d, "F\,\mathrm{pr}_1"] \\ & FX \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F\{x\} \times FY \arrow[r, "t(\{x\},Y)"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & F(\{x\} \times Y) \arrow[d, "F\,\mathrm{pr}_2"] \\ & FY \end{tikzcd}, \qquad (**)$$

$$\begin{tikzcd} FX \times FY \arrow[r, "t(X,Y)"] \arrow[d, "\bar{p}"'] & F(X \times Y) \arrow[d, "Fp"] \\ FY \times FX \arrow[r, "t(Y,X)"'] & F(Y \times X) \end{tikzcd}. \qquad (***)$$

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{C}$ — одна из категорий $\mathscr{CSG}r$, $\mathscr{CM}on$, $\mathscr{CA}b\mathscr{SG}r$ и $\mathscr{CA}b\mathscr{M}on$. Для каждого естественного поднятия $\overline{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ функтора $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$, сохраняющего мономорфизмы, прообразы, пересечения, пустое и одноточечные множества, существует единственное естественное преобразование $t(-,-) : F(-) \times F(-) \to F(- \times -)$ такое, что операция $\bar{\odot}$ на $\overline{F}X$ для каждой компактной полугруппы $(X, \odot)$ определена по формуле $a \mathbin{\bar{\odot}} b = F\odot \circ t(X,X)(a,b)$. Это естественное преобразование удовлетворяет: $(*)$ при $\mathscr{C} = \mathscr{CSG}r$, $(*)$, $(**)$ при $\mathscr{C} = \mathscr{CM}on$, $(*)$, $(***)$ при $\mathscr{C} = \mathscr{CA}b\mathscr{SG}r$ и $(*)$, $(**)$, $(***)$ при $\mathscr{C} = \mathscr{CA}b\mathscr{M}on$. Обратно, каждое естественное преобразование $t(-,-) : F(-) \times F(-) \to F(- \times -)$, обладающее соответствующими свойствами, определяет естественное поднятие F на $\mathscr{C}$ по указанной формуле.*

Итак, проблема существования естественных поднятий функтора F в категории компактов, сохраняющего мономорфизмы, пересечения, прообразы, пустое и одноточечные множества, сводится к вопросу о существовании естественных преобразований с определенными свойствами. Более того, можно заметить, что существование «хороших» естественных преобразований *достаточно* для существования естественных поднятий функтора, сохраняющего мономорфизмы, пустое и одноточечные множества, но не обязательно пересечения и прообразы.

Ответ на этот вопрос положителен, если речь идет о поднятии на $\mathscr{CSG}r$ или $\mathscr{CM}on$ функтора $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$, являющегося функториальной частью монады. Метод построения поднятия (и достаточное условие существования естественного преобразования, удовлетворяющего условия теоремы 1) предложен А. Б. Телейко в [4].

Тройка $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$ называется *монадой* [9] в категории $\mathscr{C}$, если F — функтор в $\mathscr{C}$, $\eta : \mathbf{1}_{\mathscr{C}} \to F$ и $\mu : F^2 \equiv FF \to F$ — естественные преобразования, и диаграммы

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\eta F"] \arrow[d, "F\eta"'] \arrow[dr, "\mathbf{1}_F"] & F^2 \arrow[d, "\mu"] \\ F^2 \arrow[r, "\mu"] & F \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} F^3 \arrow[r, "\mu F"] \arrow[d, "F\mu"'] & F^2 \arrow[d, "\mu"] \\ F^2 \arrow[r, "\mu"] & F \end{tikzcd}$$

коммутативны. В этом случае F называется *функториальной частью*, η — *единицей*, а μ — *умножением* монады $\mathbb{F}$.

Напомним, что для функтора $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$, сохраняющего мономорфизмы, пересечения, прообразы, пустое и одноточечные множества, существует единственное естественное преобразование $\eta : \mathbf{1}_{\mathscr{C}omp} \to F$. Тензорные произведения [3] $\otimes, \tilde{\otimes} : FX \times FY \to F(X \times Y)$ для компактов X, Y и монады $\mathbb{F}$ определяются следующим образом. Для $x \in X$ (соответственно $y \in Y$) определим вложение $i_x : Y \to X \times Y$ ($\tilde{i}_y : X \to X \times Y$) формулой $i_x(y) = (x,y)$ (соответственно $\tilde{i}_y(x) = (x,y)$). Соответствия $x \mapsto i_x$ и $y \mapsto \tilde{i}_y$ являются непрерывными отображениями $X \to C(Y, X \times Y)$ и $Y \to C(X, X \times Y)$ в пространства непрерывных отображений с компактно-открытой топологией. Поскольку F сохраняет пересечения, отображения $C(Y, X \times Y) \to C(FY, F(X \times Y))$ и $C(X, X \times Y) \to C(FX, F(X \times Y))$, индуцированные F, непрерывны [11]. Поэтому отображения $j : X \times FY \to F(X \times Y)$ и $\tilde{j} : FX \times Y \to F(X \times Y)$, определенные формулами $j(x,b) = Fi_x(b)$ и $\tilde{j}(a,y) = F\tilde{i}_y(a)$, $a \in FX$, $b \in FY$, также непрерывны. Положим $j_b(x) = j(x,b)$ и $\tilde{j}_a(y) = j(a,y)$ и определим *тензорные произведения* $a \otimes b$ и $a \mathbin{\tilde{\otimes}} b$ формулами $a \otimes b = \mu(X \times Y) \circ Fj_b(a)$, $a \mathbin{\tilde{\otimes}} b = \mu(X \times Y) \circ F\tilde{j}_a(b)$.

Оба тензорных произведения непрерывны, естественны по обоим аргументам в следующем смысле: для каждых $a \in FX$, $b \in FY$ и непрерывных отображений $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ выполнено равенство $(Ff(a)) \otimes (Fg(b)) = F(f \times g)(a \otimes b)$, $(Ff(a)) \tilde{\otimes} (Fg(b)) = F(f \times g)(a \tilde{\otimes} b)$, и удовлетворяют ассоциативному закону: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$, $(a \tilde{\otimes} b) \tilde{\otimes} c = a \tilde{\otimes} (b \tilde{\otimes} c)$ для каждых $a \in FX$, $b \in FY$, $c \in FZ$, что позволяет писать просто $a \otimes b \otimes c$ и т. п. Легко проверить, что $F\,\mathrm{pr}_1(a \otimes b) = F\,\mathrm{pr}_1(a \tilde{\otimes} b) = a$, $F\,\mathrm{pr}_2(a \otimes b) = F\,\mathrm{pr}_2(a \tilde{\otimes} b) = b$ при $a \in FX$, $b \in FY$.

Как доказано в [4], оба естественных преобразования $\otimes, \tilde{\otimes} : F(-) \times F(-) \to F(- \times -)$ удовлетворяют $(*)$ и $(***)$ и поэтому определяют поднятия функтора $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$, сохраняющего мономорфизмы, пустое и одноточечное множества и являющегося функториальной частью монады, на $\mathscr{C}\mathscr{S}\mathscr{G}r$ и $\mathscr{C}\mathscr{M}on$. Для компактной полугруппы (моноида) $(S, \odot)$ эти поднятия задаются формулами $a \mathbin{\bar{\odot}} b = F\odot(a \otimes b)$ и $a \mathbin{\bar{\odot}} b = F\odot(a \tilde{\otimes} b)$ для $a, b \in FS$.

Оба тензорных произведения совпадают, т. е. $a \otimes b = a \tilde{\otimes} b$ для каждых $a, b \in FX$, если и только если $(**)$ выполнено для любого из $\otimes$ и $\tilde{\otimes}$. В этом случае называем тензорное произведение *симметричным*. Симметричность тензорного произведения является необходимым и достаточным условием для того, чтобы оно определяло (в описанном выше смысле) поднятия функтора F на категории компактных абелевых полугрупп и компактных абелевых моноидов.

Несмотря на то, что тензорные произведения совпадают для монады гиперпространства, монады вероятностных мер и степенной монады [10] (и поэтому соответствующие функторы $\exp$, P, $(-)^\alpha$ поднимаются на $\mathscr{C}\mathscr{A}b\mathscr{S}\mathscr{G}r$ и $\mathscr{C}\mathscr{A}b\mathscr{M}on$), в общем случае они могут отличаться, например, для монады гиперпространств включения и монады суперрасширения, что доказано в [4]. Напомним, что функторы гиперпространств включения и суперрасширения не являются нормальными. К сожалению, тензорное умножение не всегда симметрично даже для монад с нормальной функториальной частью. Т. М. Радул [12] определил нормальный аналог $\widetilde{\mathbb{G}}$ монады гиперпространств включения. Для компакта X пространство $\widetilde{G}X$ состоит из всех семейств $\mathscr{F} \in \exp^2 X$, для которых из $\mathscr{F} \ni A \subset B \subset \bigcup \mathscr{F}$, $B \in \exp F$ следует $B \in \mathscr{F}$. Если $\mathscr{F}_1 \in \widetilde{G}X$, $\mathscr{F}_2 \in \widetilde{G}Y$, $F_1 = \bigcup \mathscr{F}_1$, $F_2 = \bigcup \mathscr{F}_2$, то тензорные произведения для $\widetilde{\mathbb{G}}$ определены формулами:

$$\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 = \{F \subset F_1 \times F_2 \mid \exists A \in \mathscr{F}_1 \ \forall x \in A \ \mathrm{pr}_2(F \cap \{x\} \times Y) \in \mathscr{F}_2\},$$

$$\mathscr{F}_1 \tilde{\otimes} \mathscr{F}_2 = \{F \subset F_1 \times F_2 \mid \exists B \in \mathscr{F}_2 \ \forall x \in B \ \mathrm{pr}_1(F \cap X \times \{y\}) \in \mathscr{F}_1\}.$$

Положив $X = Y = \{a, b\}$, $\mathscr{F}_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $\mathscr{F}_2 = \{\{a, b\}\}$, легко показать, что $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 \neq \mathscr{F}_1 \tilde{\otimes} \mathscr{F}_2$. Более того, формула

$$t(X, Y)(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2) = \{F \in \exp(F_1 \times F_2) \mid \exists A \in \mathscr{F}_1 \ \exists B \in \mathscr{F}_2 \ F \supset A \times B\}$$

задает естественное преобразование $t(-,-) : \widetilde{G}(-) \times \widetilde{G}(-) \to \widetilde{G}(- \times -)$, отличающееся как от $\otimes$, так и от $\tilde{\otimes}$ и удовлетворяющее $(*)$, $(**)$ и $(***)$, поэтому определяющее поднятия $\widetilde{G}$ не только на $\mathscr{C}\mathscr{S}\mathscr{G}r$ и $\mathscr{C}\mathscr{M}on$, но и на $\mathscr{C}\mathscr{A}b\mathscr{S}\mathscr{G}r$ и $\mathscr{C}\mathscr{A}b\mathscr{M}on$.

Аналогично предыдущему *поднятием функтора $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$ на $\mathscr{C}onv$* называем такой функтор $\overline{F} : \mathscr{C}onv \to \mathscr{C}onv$, что $U\overline{F} = FU$ для забывающего функтора $U : \mathscr{C}onv \to \mathscr{C}omp$. Если функтор F сохраняет мономорфизмы, прообразы, пересечения, пустое множество и одноточечные множества и $\eta : \mathbf{1}_{\mathscr{C}omp} \to F$ — соответствующее единственное естественное преобразование, то $\overline{F}$ называем *естественным*, если для каждого выпуклого компакта X компонента $\eta X : X \to FX$ является аффинным вложением.

М. М. Заричным доказано [7], что для нормального функтора естественное поднятие на категорию компактных топологических групп существует, если и только если этот функтор степенной, т. е. функтор $(-)^\tau$, где τ — не более чем счетный кардинал. Мы доказываем аналогичный результат для категории выпуклых компактов.

Теорема 2. *Для нормального функтора $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$ естественное поднятие на $\mathscr{C}onv$ существует тогда и только тогда, когда этот функтор степенной.*

Анализ приведенного ниже доказательства теоремы 2 показывает существенность тождества $(1-\lambda)x + \lambda x = x$, выполненного в любом выпуклом компакте. Именно это свойство оказывается главным препятствием для существования естественных продолжений. Отказ от него приводит к введенному и изученному в [13, 14] классу *полувыпуклых компактов* — пространств, в которых точки можно «соединять отрезками», но «отрезок», начало которого совпадает с концом, не обязательно состоит из одной точки. Применение к классу полувыпуклых компактов (включающему все выпуклые компакты), а также их аффинных (т. е. сохраняющих полувыпуклую комбинацию) непрерывных отображений, нормальных и слабо нормальных функторов exp, G, P, M и др. снова дает полувыпуклые компакты и аффинные непрерывные отображения. Формально говоря, эти функторы поднимаются с категории компактов $\mathscr{C}omp$ на категорию полувыпуклых компактов $\mathscr{SC}onv$. Эти поднятия будут рассмотрены в нашей следующей работе.

§ 3. Доказательства

Каждая из категорий $\mathscr{CSG}r$, $\mathscr{CM}on$, $\mathscr{CA}b\mathscr{SG}r$ и $\mathscr{CA}b\mathscr{M}on$ требует отдельного рассмотрения, хотя схема доказательства сохраняется для всех случаев. Ниже F — функтор $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$, сохраняющий мономорфизмы, прообразы, пересечения, пустое и одноточечные множества, $\overline{F}$ — его естественное поднятие, $\overline{F}(X, \odot) = (FX, \bar{\odot})$.

Лемма 1. *Для естественного поднятия $\overline{F}$ на $\mathscr{CSG}r$ функтора F и элементов $a, b \in FX$ выполнено включение* $\operatorname{supp}_F(a \mathbin{\bar{\odot}} b) \subset \operatorname{supp}_F a \odot \operatorname{supp}_F b = \{x \odot y \mid x \in \operatorname{supp}_F a,\ y \in \operatorname{supp}_F b\}$.

Доказательство. Определим ассоциативную бинарную операцию $\odot$ на множестве $\{0,1,2,3\}$ следующим образом: $0 \odot 1 = 2$, и при $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 1$ пусть $\alpha \odot \beta = 3$. Положив $X' \subset X \times \{0,1,2,3\}$, $X' = \operatorname{supp}_F a \times \{0\} \sqcup \operatorname{supp}_F b \times \{1\} \sqcup (\operatorname{supp}_F a \odot \operatorname{supp}_F b) \times \{2\} \sqcup X \times \{3\}$ и определив $\odot$ на X' по формуле $(x, \alpha) \odot (y, \beta) = (x \odot y, \alpha \odot \beta)$, превратим X' с топологией суммы в компактную полугруппу, причем проекции $\operatorname{pr}_1 : X' \to X$ и $\operatorname{pr}_2 : X' \to \{0,1,2,3\}$ оказываются непрерывными гомоморфизмами полугрупп. Пусть $a' = Fi_0(a)$, $b' = Fi_1(b)$, где вложения $i_0, i_1 : X \hookrightarrow X'$ определены так: $i_0(x) = (x, 0)$, $i_1(x) = (x, 1)$. Тогда $\operatorname{pr}_1 \circ i_0 = \operatorname{pr}_1 \circ i_1 = \mathbf{1}_X$, из чего следует $F\operatorname{pr}_1(a') = a$, $F\operatorname{pr}_1(b') = b$. Очевидно, что $F\operatorname{pr}_2(a') = \eta\{0,1,2,3\}(0)$, $F\operatorname{pr}_2(b') = \eta\{0,1,2,3\}(1)$, поэтому

$$\begin{aligned} F\operatorname{pr}_2(a' \mathbin{\bar{\odot}} b') = F\operatorname{pr}_2(a') \mathbin{\bar{\odot}} F\operatorname{pr}_2(b') &= \eta\{0,1,2,3\}(0) \mathbin{\bar{\odot}} \eta\{0,1,2,3\}(1) \\ &= \eta\{0,1,2,3\}(0 \odot 1) = \eta\{0,1,2,3\}(2) \in F\{2\}. \end{aligned}$$

Из сохранения прообразов следует $a' \bar{\odot} b' \in F(\mathrm{pr}_2{}^{-1}(2)) = (\mathrm{supp}_F\, a \odot \mathrm{supp}_F\, b) \times \{2\}$. Отсюда

$$a \bar{\odot} b = F\,\mathrm{pr}_1(a') \bar{\odot} F\,\mathrm{pr}_1(b') = F\,\mathrm{pr}_1(a' \bar{\odot} b') \in F(\mathrm{pr}_1((\mathrm{supp}_F\, a \odot \mathrm{supp}_F\, b) \times \{2\}) = F(\mathrm{supp}_F\, a \odot \mathrm{supp}_F\, b).$$

Доказательство теоремы 1 для $\mathscr{C} = \mathscr{CSG}r$. Допустим, что естественное поднятие $\overline{F}$ на $\mathscr{CSG}r$ функтора F существует. Для компактов X, Y обозначим через $s(X,Y)$ топологическую сумму $X \sqcup Y \sqcup (X \times Y) \sqcup \{*\}$ с операцией $\odot$, определенной так: $a \odot b = (x,y)$, если $a = x \in X$, $b = y \in Y$, иначе $a \odot b = *$. Тогда $(s(X,Y),\odot)$ — компактная полугруппа и для непрерывных отображений компактов $f : X \to X'$ и $g : Y \to Y'$ отображение $s(f,g) : s(X,Y) \to s(X',Y')$, равное $s(f,g)(x) = f(x)$ при $x \in X$, $s(f,g)(y) = g(y)$ при $y \in Y$, $s(f,g)(x,y) = (f(x),g(y))$ при $(x,y) \in X \times Y$ и $s(f,g)(*) = *$, является непрерывным гомоморфизмом. Рассмотрим $X, Y, X \times Y \subset s(X,Y)$ и обозначим через $i_X : X \hookrightarrow s(X,Y)$, $i_Y : Y \hookrightarrow s(X,Y)$, $i_{X\times Y} : X \times Y \hookrightarrow s(X,Y)$ соответствующие включения. Тогда $FX, FY, F(X \times Y) \subset Fs(X,Y)$. Согласно последней лемме для произвольных $a \in FX \subset \overline{F}s(X,Y)$, $b \in FY \subset \overline{F}s(X,Y)$ выполнено $a \bar{\odot} b \in F(X \times Y) \subset \overline{F}s(X,Y)$. Обозначим через $t(X,Y) : FX \times FY \to F(X \times Y)$ соответствие $(a,b) \mapsto a \bar{\odot} b$ (т. е. $(a,b) \mapsto i_{X\times Y}{}^{-1}(Fi_X(a) \bar{\odot} Fi_Y(b)))$. Поскольку $\overline{F}s(f,g)$ также является гомоморфизмом для любых $f : X \to X'$ и $g : Y \to Y'$, получаем, что

$$t(X',Y')(Ff(a),Fg(b)) = F(f \times g)(t(X,Y)(a,b))$$

для произвольных $a \in FX$, $b \in FY$, т. е. $t(-,-)$ — естественное преобразование функторов $F(-) \times F(-) \to F(- \times -)$.

Это естественное преобразование имеет свойство, вытекающее из ассоциативности умножения в полугруппе. Рассмотрим топологическую сумму

$$s(X,Y,Z) = X \sqcup Y \sqcup Z \sqcup (X \times Y) \sqcup (Y \times Z) \sqcup (X \times Y \times Z) \sqcup \{*\}.$$

Превратим $s(X,Y,Z)$ в компактную полугруппу, положив для $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$

$$x \odot y = (x,y), \quad y \odot z = (y,z), \quad x \odot (y,z) = (x,y,z), \quad (x,y) \odot z = (x,y,z)$$

и $a \odot b = *$ во всех прочих случаях. Очевидные включения[1)] $i_1 : s(X \times Y, Z) \hookrightarrow s(X,Y,Z)$, $i_2 : s(X, Y \times Z) \hookrightarrow s(X,Y,Z)$ являются непрерывными гомоморфизмами полугрупп. Следовательно, $\overline{F}i_1$, $\overline{F}i_2$ — также гомоморфизмы, поэтому для любых $A \in F(X \times Y) \subset \overline{F}s(X,Y,Z)$, $A \in FZ \subset \overline{F}s(X,Y,Z)$ выполнено $A \bar{\odot} c = t(X \times Y, Z)(A,c)$ и для любых $a \in FX \subset \overline{F}s(X,Y,Z)$, $C \in F(Y \times Z) \subset \overline{F}s(X,Y,Z)$ соответственно $a \bar{\odot} C = t(X, Y \times Z)(a,C)$. Выберем произвольные $a \in FX$, $b \in FY$, $c \in FZ$ и согласно ассоциативному закону $(a \bar{\odot} b) \bar{\odot} c = a \bar{\odot} (b \bar{\odot} c)$ получим

$$t(X \times Y, Z)(t(X,Y)(a,b),c) = t(X, Y \times Z)(a, t(Y,Z)(b,c)),$$

т. е. приходим к $(*)$.

Покажем, как определить операцию $\bar{\odot}$ на $\overline{F}X$ по естественному преобразованию $t(-,-)$ для компактной полугруппы $(X,\odot)$. Полугруппа $s(X,X)$ имеет

[1)] Отождествляем $X \times Y \times Z$, $(X \times Y) \times Z$ и $X \times (Y \times Z)$.

вид $X \sqcup X' \sqcup (X\times X) \sqcup \{*\}$, где X' — «еще одна копия» компакта X. Обозначим через $s(X)$ топологическую сумму $X \sqcup X' \sqcup X \times X \sqcup X''$, где X' и X'' — две копии пространства X. Пусть $i_X, i_{X'} : X \hookrightarrow s(X)$ и $i_{X\times X} : X\times X \hookrightarrow s(X)$ — соответствующие вложения. Определим отображение $p : S(X) \to X$ формулами $p(x) = x$, $p((x, y)) = x \odot y$ для всех $x, y \in X$, т. е. q умножает элементы каждой пары и склеивает три экземпляра пространства X в один. Зададим операцию $\odot$ на $s(X)$ так: $x \odot y = (x, y)$ для $x \in X$, $y \in X'$, а во всех прочих случаях $a \odot b = p(a) \odot p(b) \in X''$. Очевидно, что $(s(X), \odot)$ — компактная полугруппа, а $q : S(X) \to X$ — гомоморфизм полугрупп, поэтому $\overline{F}q : \overline{F}s(X) \to \overline{F}s(X, X)$ и $\overline{F}p : \overline{F}s(X) \to \overline{F}X$ также гомеоморфизм.

Для каждых $a, b \in FX$ положим $a' = Fi_X(a)$, $b' = Fi_{X'}(b)$, тогда $a \mathbin{\bar\odot} b = \overline{F}p(a') \mathbin{\bar\odot} \overline{F}p(b') = \overline{F}p(a' \mathbin{\bar\odot} b')$. Согласно лемме 1 из $\operatorname{supp}_F a' \subset X$, $\operatorname{supp}_F b' \subset X'$ следует включение $\operatorname{supp}_F(a' \odot b') \subset X \times X$. Пространство $F(X \sqcup X' \sqcup X \times X)$ можно рассматривать как подпространство одновременно $s(X)$ и $s(X, X)$, соответственно можно считать, что $a', b', a' \mathbin{\bar\odot} b' \in s(X, X)$.

Отображение $q : s(X) \to s(X, X)$, тождественное на $X \sqcup X' \sqcup X\times X$ и равное $*$ на X'', как и $\overline{F}q : \overline{F}s(X) \to \overline{F}s(X, X)$, является гомоморфизмом. Последнее отображение сохраняет элементы $F(X \sqcup X' \sqcup X \times X)$, поэтому в $s(X)$, как и в $s(X, X)$, получим $a' \mathbin{\bar\odot} b' = Fi_{X\times X} \circ t(X, X)(a, b)$. Следовательно,

$$a \mathbin{\bar\odot} b = Fp \circ Fi_{X\times X} \circ t(X, X)(a, b) = F(p \circ i_{X\times X}) \circ t(X, X)(a, b).$$

Принимая во внимание, что на $X\times X \subset s(X)$ отображение p совпадает с умножением $\odot : X \times X \to X$, показываем, что в $\overline{F}X$ операция определяется равенством $a \mathbin{\bar\odot} b = F\odot \circ t(X, X)(a, b)$.

Выше описано, как, исходя из поднятия, построить естественное преобразование, удовлетворяющее $(*)$, и как естественное преобразование определяет непрерывную бинарную операцию на FX для компактной полугруппы $(X, \odot)$. Покажем, что эта операция ассоциативна. Пусть $a, b, c \in FX$. Тогда

$$\begin{aligned}(a \mathbin{\bar\odot} b) \mathbin{\bar\odot} c &= F\odot \circ t(X, X)(F\odot \circ t(X, X)(a, b), c)\\ &= F\odot \circ t(X, X)(F\odot \circ t(X, X)(a, b), F\mathbf{1}_X c)\\ &= F\odot \circ F(\odot \times \mathbf{1}_X) \circ t(X \times X, X)(t(X, X)(a, b), c)\\ &= F(\odot \circ (\odot \times \mathbf{1}_X)) \circ t(X \times X, X)(t(X, X)(a, b), c)\\ &= F\odot_3 \circ t(X \times X, X)(t(X, X)(a, b), c),\end{aligned}$$

где $\odot_3 : X\times X\times X \to X$ — умножение трех сомножителей: $\odot_3(x, y, z) = x\odot y\odot z$. Аналогично

$$(a \mathbin{\bar\odot} b) \mathbin{\bar\odot} c = F\odot_3 \circ t(X, X \times X)(a, t(X, X)(b, c)).$$

Тогда согласно $(*)$ получим $(a \mathbin{\bar\odot} b) \mathbin{\bar\odot} c = a \mathbin{\bar\odot} (b \mathbin{\bar\odot} c)$.

Если $f : (X, \odot) \to (X', \odot)$ — гомоморфизм компактных полугрупп и $a, b \in \overline{F}X$, то

$$\begin{aligned}\overline{F}f(a \mathbin{\bar\odot} b) &= Ff \circ F\odot \circ t(X, X)(a, b) = F\odot \circ F(f \times f) \circ t(X, X)(a, b)\\ = F\odot\circ t(X', X')\circ F(f\times f)(a, b) &= F\odot\circ t(X, X)(Ff(a), Ff(b)) = \overline{F}f(a)\mathbin{\bar\odot}\overline{F}f(b).\end{aligned}$$

Следовательно, $\overline{F}f$ также является гомоморфизмом, и $\overline{F}$ — поднятие F с $\mathscr{C}omp$ на $\mathscr{C}\mathscr{S}\mathscr{G}r$. Покажем, что оно является естественным гомоморфизмом. Пусть

$x, y \in X$, $a = \eta X(x)$, $b = \eta X(y)$. Поскольку $t(-,-)$ — естественное преобразование, следующая диаграмма коммутативна ($i_x : \{x\} \hookrightarrow X$, $i_y : \{y\} \hookrightarrow X$ — включения):

$$\begin{tikzcd} F\{x\} \times F\{y\} \arrow[r, "Fi_x \times Fi_y"] \arrow[d, "t(\{x\},\{y\})"'] & FX \times FX \arrow[d, "t(X,X)"] \\ F(\{x\} \times \{y\}) \arrow[r, "F(i_x \times i_y)"'] & F(X \times X)\ . \end{tikzcd}$$

Отсюда $t(X,X)(a,b) \in F(\{x\}\times\{y\})$, поэтому $a \bar{\odot} b = F\odot \circ t(X,X)(a,b) \in F\{x \odot y\}$, следовательно, $a \bar{\odot} b = \eta X(x \odot y)$. Непосредственно проверяется, что поднятие, построенное по данному естественному преобразованию t, определяет в точности исходное естественное преобразование t.

Лемма 2. *Для естественного поднятия $\overline{F}$ функтора F в $\mathscr{C}omp$ на $\mathscr{CM}on$ и элементов $a, b \in FX$ выполнено включение*

$$\operatorname{supp}_F(a \bar{\odot} b) \subset \operatorname{supp}_F a \odot \operatorname{supp}_F b = \{x \odot y \mid x \in \operatorname{supp}_F a,\ y \in \operatorname{supp}_F b\}.$$

Доказательство. Определим ассоциативную операцию $\odot$ на $\{0,1,2,3,e\}$ следующим образом: $0 \odot 1 = 2$, $\alpha \odot e = e \odot \alpha = \alpha$, если $\alpha \in \{0,1,2,3,e\}$, и $\alpha \odot \beta = 3$ во всех других случаях. Положим $X' = \operatorname{supp}_F a \times \{0\} \sqcup \operatorname{supp}_F b \times \{1\} \sqcup (\operatorname{supp}_F a \odot \operatorname{supp}_F b) \times \{2\} \sqcup X \times \{3\} \sqcup \{e\}$ и определим $\odot$ на X' равенствами

$$(x,\alpha) \odot (y,\beta) = (x \odot y, \alpha \odot \beta), \quad (x,\alpha) \odot e = e \odot (x,\alpha) = (x,\alpha), \quad e \odot e = e.$$

Тогда X' с топологией суммы является компактным моноидом, а отображения $p_1 : X' \to X$, $p_2 : X' \to \{0,1,2,3,e\}$, совпадающие с проекциями соответственно pr_1 и pr_2 для элементов $X \times \{0,1,2,3\}$ и удовлетворяющие равенствам $p_1(e) = e_X$ (единица моноида X), $p_2(e) = e$, являются гомоморфизмами моноидов. Дальнейшие рассуждения повторяют соответствующую часть доказательства леммы 1.

Доказательство теоремы 1 для $\mathscr{C} = \mathscr{CM}on$. Предположим, что $\overline{F}$ — естественное поднятие. Для компактов X, Y обозначим через $m(X,Y)$ топологическую сумму $X \sqcup Y \sqcup (X \times Y) \sqcup \{*, e\}$ и через $i_X : X \hookrightarrow m(X,Y)$, $i_Y : Y \hookrightarrow m(X,Y)$, $i_{X\times Y} : X \times Y \hookrightarrow m(X,Y)$ — соответствующие включения. Определим операцию $\odot$ так: $a \odot e = e \odot a = a$ для каждых $a \in m(X,Y)$, $x \odot y = (x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$, и $a \odot b = *$ при $a, b \neq e$ либо $a \notin X$ или $b \notin Y$. Для $a \in FX \subset Fm(X,Y)$, $b \in FY \subset Fm(X,Y)$ обозначим через $t(X,Y)(a,b)$ элемент $a \bar{\odot} b \in F(X \times Y) \subset Fm(X,Y)$. Аналогично предыдущему случаю доказываем, что $t(-,-) : F(-) \times F(-) \to F(- \times -)$ является естественным преобразованием, определяющим операцию $\bar{\odot}$ на $\overline{F}X$, где $(X, \odot)$ — компактный моноид, по формуле $a \bar{\odot} b = F\odot \circ t(X,X)(a,b)$. Из ассоциативности операции в моноиде следует выполнение условия $(*)$ для $t(-,-)$. Существование единицы в $\overline{F}X$ накладывает дополнительные ограничения на $t(-,-)$. Если e_X — единица моноида $(X, \odot)$, то включение $\{e_X\} \hookrightarrow X$ является гомоморфизмом, как и $\overline{F}\{e_X\} \hookrightarrow \overline{F}X$. Поэтому единица $\overline{F}X$ содержится в $F\{e_X\}$ и равна $\eta X(e_X)$.

Для произвольного компакта X превратим $X'' = X \sqcup \{y\}$ в компактный моноид, определив бинарную операцию $\odot$ равенствами: $x \odot y = y \odot x = x$ для каждых $x \in X$, $x_1 \odot x_2 = x_1$, $x_1, x_2 \in X$, и $y \odot y = y$, т. е. объявив y единицей. Тогда для $a \in FX \subset \overline{F}X''$, $b = \eta X''(y) \in F\{y\} \subset \overline{F}X''$ получим

$a = a \mathbin{\bar{\odot}} b = F\odot \circ t(X'', X'')(a, b)$. Поскольку t — естественное преобразование, имеем

$$t(X'', X'')(a, b) \in t(X, \{y\})(FX \times F\{y\}) \subset F(X \times \{y\}).$$

Операция $\odot$ действует на $X \times \{y\}$ как проекция $\mathrm{pr}_1 : X \times \{y\} \cong X$, поэтому $a = F\,\mathrm{pr}_1 \circ t(X, \{y\})(a, \eta\{y\}(y))$ и $F\,\mathrm{pr}_1 \circ t(X, \{y\}) = \mathrm{pr}_1$. Аналогично показываем, что для одноточечного компакта $\{x\}$ и произвольного компакта Yвыполнено $F\,\mathrm{pr}_2 \circ t(\{x\}, Y) = \mathrm{pr}_2$. Итак, истинно $(**)$.

Остальные рассуждения являются легкой модификацией доказательства для $\mathscr{C} = \mathscr{C}\mathscr{S}\mathscr{G}r$.

Лемма 3. *Для естественного поднятия $\overline{F}$ на $\mathscr{C}\mathscr{A}b\mathscr{S}\mathscr{G}r$ функтора F и элементов $a, b \in FX$ выполнено включение*

$$\mathrm{supp}_F(a \mathbin{\bar{\odot}} b) \subset \mathrm{supp}_F\, a \odot \mathrm{supp}_F\, b = \{x \odot y \mid x \in \mathrm{supp}_F\, a,\ y \in \mathrm{supp}_F\, b\}.$$

Доказательство. Рассмотрим абелеву полугруппу $\{0, 1, 2, 3\}$ с операцией $\odot$, определенной так: $0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 2$, и $\alpha \odot \beta = 3$ во всех прочих случаях. Положим

$$X' \subset X \times \{0, 1, 2, 3\},$$

$$X' = \mathrm{supp}_F\, a \times \{0\} \sqcup \mathrm{supp}_F\, b \times \{1\} \sqcup (\mathrm{supp}_F\, a \odot \mathrm{supp}_F\, b) \times \{2\} \sqcup X \times \{3\}$$

и определим $\odot$ на X' с помощью формулы $(x, \alpha) \odot (y, \beta) = (x \odot y, \alpha \odot \beta)$. Тогда X' с топологией суммы является компактной абелевой полугруппой и проекции $\mathrm{pr}_1 : X' \to X$ и $\mathrm{pr}_2 : X' \to \{0, 1, 2, 3\}$ являются непрерывными гомоморфизмами. Остальная часть доказательства дословно повторяет доказательство предыдущей аналогичной леммы.

Доказательство теоремы 1 для $\mathscr{C} = \mathscr{C}\mathscr{A}b\mathscr{S}\mathscr{G}r$. Пусть $\overline{F}$ — естественное поднятие. Для компактов X, Y обозначим через $s(X, Y)$ топологическую сумму $X \sqcup Y \sqcup (X \times Y) \sqcup \{*\}$ с операцией $\odot$, определенной как $a \odot b = b \odot a = (x, y)$ при $a = x \in X$, $b = y \in Y$, и $a \odot b = *$ в остальных случаях. Обозначим через $i_X : X \hookrightarrow s(X, Y)$, $i_Y : Y \hookrightarrow s(X, Y)$ $i_{X \times Y} : X \times Y \hookrightarrow s(X, Y)$ соответствующие вложения и положим $t(X, Y)(a, b)$ равным единственному элементу $F(X, Y)$, для которого $Fi_{X \times Y}(t(X, Y)(a, b)) = Fi_X(a) \mathbin{\bar{\odot}} Fi_Y(b)$, $a \in FX$, $b \in FY$. Очевидно, что $t(-, -)$ является естественным преобразованием $F(-) \times F(-) \to F(- \times -)$.

Для доказательства $(*)$ для t рассмотрим топологическую сумму

$$s(X, Y, Z) = X \sqcup Y \sqcup Z \sqcup (X \times Y) \sqcup (Y \times Z) \sqcup (X \times Z) \sqcup (X \times Y \times Z) \sqcup \{*\}$$

и определим операцию так: для произвольных $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ пусть

$$x \odot y = y \odot x = (x, y), \quad y \odot z = z \odot y = (y, z),$$

$$x \odot (y, z) = (y, z) \odot x = y \odot (x, z) = (x, z) \odot y = z \odot (x, y) = (x, y) \odot z = (x, y, z),$$

и во всех прочих случаях $a \odot b = *$. Вложения $s(X \times Y, Z) \hookrightarrow s(X, Y, Z)$, $s(X, Y \times Z) \hookrightarrow s(X, Y, Z)$ также являются гомоморфизмами. Оставшаяся часть доказательства стандартна в этой статье.

Опускаем также несложное доказательство выполнения «коммутативного закона» $(***)$.

Если естественное преобразование $t(-, -)$ известно, то восстановим операцию $\odot$ на $\overline{F}X$ для произвольной компактной абелевой полугруппы $(X, \odot)$. Абелева полугруппа $s(X, X)$ имеет вид $X \sqcup X' \sqcup X \times X \sqcup \{*\}$, где X' — копия компакта X. Как и в случае категории компактных полугрупп, обозначим через $s(X)$ топологическую сумму $X \sqcup X' \sqcup X \times X \sqcup X''$, где X' и X'' — две копии пространства X. Вложения $i_X, i_{X'} : X \hookrightarrow s(X)$ и $i_{X\times X} : X \times X \hookrightarrow s(X)$, а также отображения $p : s(X) \to X$, $q : s(X) \to s(X,Y)$ определяются так же, как и в рассуждениях для случая $\mathscr{C} = \mathscr{C}\mathscr{S}\mathscr{G}r$. Единственное отличие наблюдается в определении операции $\odot$ на $s(X)$, а именно: $x \odot y = y \odot x = (x,y)$ для $x \in X$, $y \in X'$, а во всех прочих случаях $a \odot b = p(a) \odot p(b) \in X''$. Очевидно, что $(s(X), \odot)$ — компактная абелева полугруппа, а q, p — гомоморфизмы полугрупп. Остальная часть доказательства того, что в $\overline{F}X$ операция определяется равенством $a \mathbin{\bar{\odot}} b = F\odot \circ t(X,X)(a,b)$, проводится, как и выше.

Доказательство теоремы 1 для $\mathscr{C} = \mathscr{C}\mathscr{A}b\mathscr{M}on$ получаем «скрещиванием» доказательств для $\mathscr{C} = \mathscr{C}\mathscr{M}on$ и $\mathscr{C} = \mathscr{C}\mathscr{A}b\mathscr{S}\mathscr{G}r$.

Перейдем к исследованию поднятий нормальных функторов на категорию выпуклых компактов.

Будем использовать джойны только топологических пространств, являющихся выпуклыми компактами. Пусть выпуклые компакты X и Y лежат соответственно в векторных топологических пространствах L_0 и L_1 и содержат нулевые векторы этих пространств, обозначаемые $\mathbf{0}$. Выпуклую оболочку множества $X \times \{0\} \times \{\mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{0}\} \times \{1\} \times Y$ в произведении $L_0 \times \mathbb{R} \times L_1$ назовем *джойном* X и Y и обозначим через $X \bowtie Y$. Очевидно, что $X \bowtie Y$ — выпуклый компакт и выпуклая структура на нем не зависит от вложений X и Y соответственно в L_0 и L_1, а следовательно, от расположения $\mathbf{0}$ внутри X и Y. Отображения $e_0 : X \to X \bowtie Y$, $e_1 : Y \to X \bowtie Y$, определенные как $e_0(x) = (x, 0, \mathbf{0})$ и $e_1(y) = (\mathbf{0}, 1, y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, являются аффинными вложениями.

Наша реализация джойна гомеоморфна стандартной, но имеет то преимущество, что $X \bowtie Y$ — сумма (копроизведение) объектов X и Y в категории выпуклых компактов. Практически это означает, что для любых аффинных непрерывных отображений $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ в выпуклый компакт Z существует единственное непрерывное аффинное продолжение $f \nabla g : X \bowtie Y \to Z$, т. е. отображение, удовлетворяющее равенствам $(f\nabla g) \circ e_0 = f$, $(f \nabla g) \circ e_1 = g$. Каждый элемент джойна представляется в виде $\lambda e_0(x) + \mu e_1(y)$, где $x \in X$, $y \in Y$, $0 \le \lambda$, $\mu \le 1$, $\lambda + \mu = 1$. Тогда искомое продолжение $f \nabla g$ отображает этот элемент в $\lambda f(x) + \mu g(y)$.

Как следствие, для каждых непрерывных аффинных отображений $f : X \to Z$, $g : Y \to T$ выпуклых компактов существует единственное общее непрерывное аффинное продолжение $f \bowtie g : X \bowtie Y \to Z \bowtie T$, и получаем функтор $\bowtie$: $\mathscr{C}onv \times \mathscr{C}onv \to \mathscr{C}onv$.

Существование естественного поднятия на $\mathscr{C}onv$ степенного функтора в $\mathscr{C}omp$ очевидно. Доказательство необходимости для существования естественного поднятия нормального функтора F того, что F — степенной, разобьем в последовательность лемм. Далее предполагаем, что $\overline{F}$ — естественное поднятие функтора F, $0 \le \lambda \le 1$.

Отметим, что пересечение $X \bowtie Y$ и ${\mathrm{pr}_2}^{-1}(\lambda) = L_0 \times \{\lambda\} \times L_1$ (где $\mathrm{pr}_2 : L_0 \times \mathbb{R} \times L_1 \to \mathbb{R}$ — проектирование на второй сомножитель) равно $(1-\lambda)X \times \{\lambda\} \times \lambda Y$. Отображение $i_\lambda : X \times Y \to (1-\lambda)X \times \{\lambda\} \times \lambda Y$, определенное как $i_\lambda(x,y) = \big((1-\lambda)x, \lambda, \lambda y\big)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, является гомеоморфизмом при всех $0 < \lambda < 1$. Обозначим через $j_\lambda : (1-\lambda)X \times \{\lambda\} \times \lambda Y \to X \times Y$ отображение, обратное к i_λ.

Лемма 4. *Пусть X, Y — выпуклые компакты, $a \in FX$, $b \in FY$. Тогда* *выпуклая комбинация* $(1-\lambda)a_0 + \lambda b_1$ *элементов* $a_0 = Fe_0(a)$ *и* $b_1 = Fe_1(b)$ *в* $\overline{F}(X \bowtie Y)$ *содержится в* $F((1-\lambda)X \times \{\lambda\} \times \lambda Y))$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $F\operatorname{pr}_2(a_0)$ и $F\operatorname{pr}_2(b_1)$ — единственные элементы подмножеств соответственно $F\{0\}$ и $F\{1\}$ в FI. Эти элементы можно отождествить с $0, 1 \in I$, поэтому их выпуклая комбинация с коэффициентами $1-\lambda$ и λ отождествляется с λ, следовательно, является единственным элементом $F\{\lambda\}$. Из сохранения прообразов следует, что $(1-\lambda)a_0 + \lambda b_1 \in F(\operatorname{pr}_2^{-1}(\lambda))$.

Лемма 5. *Для произвольного элемента* $a \in FX$, *где* X — *выпуклый компакт, выпуклая комбинация* $a_\lambda = (1-\lambda)a_0 + \lambda a_1$ *элементов* $a_0 = Fe_0(a)$ *и* $a_1 = Fe_1(a)$ *в* $\overline{F}(X \bowtie X)$ *равна* $Fe_\lambda(a)$, *где вложение* $e_\lambda : X \to X \bowtie X$ *отображает каждую точку* $x \in X$ *в* $((1-\lambda)x, \lambda, \lambda x)$.

Доказательство. Напомним, что для любого компакта X существует вложение $\eta_P X$ в пространство PX вероятностных мер на X, наделенное слабой* топологией [10]. Это вложение сопоставляет каждой точке $x \in X$ меру Дирака δ_x, сосредоточенную в этой точке. Отметим, что PX — выпуклый компакт, но вложение $\eta_P X$ не аффинное. Более того, его образ лежит в PX свободно (в категорном смысле), в частности, никакая нетривиальная выпуклая комбинация точек этого образа не принадлежит ему. С другой стороны, отображение барицентра $bX : PX \to X$ [10] является аффинным и левым обратным к $\eta_P X$.

Рассмотрим вложения $e'_0, e'_1 : PX \to PX \bowtie PX$, определенные аналогично e_0, e_1. Пусть $a' = F\eta_P X(a)$, $a'_0 = Fe'_0(a')$, $a'_1 = Fe'_1(a')$. Элемент $a'_\lambda = (1-\lambda)a'_0 + \lambda a'_1$ согласно предыдущей лемме содержится в $F((1-\lambda)PX \times \{\lambda\} \times \lambda PX)$. С другой стороны, отображение $p = \mathbf{1}_{PX} \nabla \mathbf{1}_{PX} : PX \bowtie PX \to PX$ аффинно, и $Fp(a'_0) = Fp(a'_1) = a'$, следовательно, $Pf(a'_\lambda) = (1-\lambda)a' + \lambda a' = a' \in F(\eta_P X(X))$. Из сохранения прообразов вытекает, что

$$a_\lambda \in F((1-\lambda)PX \times \{\lambda\} \times \lambda PX \cap p^{-1}(\eta_P X(X))).$$

Последнее пересечение в скобках равно $\{((1-\lambda)\eta_P X(x), \lambda, \lambda \eta_P X(x)) \mid x \in X\}$ и переводится отображением p на $\eta_P X(X)$ биективно. Из этого следует, что $a'_\lambda = Fe'_\lambda(a)$, где $e'_\lambda(x) = ((1-\lambda)\eta_P X(x), \lambda, \lambda \eta_P X(x))$ для каждого $x \in X$.

Остается заметить, что $a = FbX(a')$, $a_0 = F(bX \bowtie bX)(a'_0)$, $a_1 = F(bX \bowtie bX)(a'_1)$, поэтому

$$a_\lambda = F(bX \bowtie bX)(a'_\lambda) = F(bX \bowtie bX) \circ Fe'_\lambda(a) = Fe_\lambda(a).$$

Напомним, что функтор $F : \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$ называется *слабо бикоммутативным*, если для любых компактов X, Y и элементов $a \in FX$, $b \in FY$ существует такой элемент $c \in F(X \times Y)$, что $F\operatorname{pr}_1(c) = a$, $F\operatorname{pr}_2(c) = b$. Если такой элемент c единствен для каждых a, b, то F называется *мультипликативным*.

Лемма 6. *Функтор* F *мультипликативен.*

Доказательство. Сначала получим слабую бикоммутативность. Благодаря сохранению вложений и прообразов без ограничения общности можно считать, что $X = Y$ — совпадающие выпуклые компакты. Пусть $a, b \in FX$, вложения $e_0, e_1 : X \to X \bowtie X$ и отображение $j_\lambda : (1-\lambda)X \times \{\lambda\} \times \lambda X \to X \times X$ определены выше, $q : X \to X$ — отображение, тождественно равное $\mathbf{0}$ и z — единственный элемент $F\{\mathbf{0}\}$. Обозначим $a_0 = Fe_0(a)$, $a_1 = Fe_1(a)$, $b_0 = Fe_0(b)$,

$b_1 = Fe_1(b)$. Зафиксируем любое $0 < \lambda < 1$ и положим $c' = (1-\lambda)a_0 + \lambda b_1$, $c = Fj_\lambda(c') \in F(X \times X)$. Тогда

$$\begin{aligned} F(q \bowtie \mathbf{1}_X)(c') &= (1-\lambda)F(q \bowtie \mathbf{1}_X) \circ Fe_0(a) + \lambda F(q \bowtie \mathbf{1}_X) \circ Fe_1(b) \\ &= (1-\lambda)Fe_0(z) + \lambda F(q \bowtie \mathbf{1}_X) \circ Fe_1(b) \\ &= (1-\lambda)F(q \bowtie \mathbf{1}_X) \circ Fe_0(b) + \lambda F(q \bowtie \mathbf{1}_X) \circ Fe_1(b) \\ &= F(q \bowtie \mathbf{1}_X)\big((1-\lambda)Fe_0(b) + \lambda Fe_1(b)\big) = F(q \bowtie \mathbf{1}_X) \circ Fe_\lambda(b), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} F\,\mathrm{pr}_2(c) = F\,\mathrm{pr}_2 \circ Fj_\lambda(c') &= F\,\mathrm{pr}_2 \circ Fj_\lambda \circ F(q \bowtie \mathbf{1}_X)(c') \\ &= F\,\mathrm{pr}_2 \circ Fj_\lambda \circ F(q \bowtie \mathbf{1}_X) \circ Fe_\lambda(b). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathrm{pr}_2 \circ j_\lambda \circ (q \bowtie \mathbf{1}_X) \circ e_\lambda = \mathbf{1}_X$, получим $F\,\mathrm{pr}_2(c) = b$. Аналогично доказывается равенство $F\,\mathrm{pr}_1(c) = a$.

Пусть $a \in FX$, $b \in FY$, $c \in F(X \times Y)$, $F\,\mathrm{pr}_1(c) = a$, $F\,\mathrm{pr}_2(c) = b$. Для доказательства единственности такого c можем считать, что X и Y — выпуклые компакты. Кроме джойна $X \bowtie Y$ и вложений $e_0 : X \to X \bowtie Y$, $e_1 : Y \to X \bowtie Y$ рассмотрим джойн $(X \times Y) \bowtie (X \times Y)$ и аналогичные вложения $e'_0, e'_1 : X \times Y \to (X \times Y) \bowtie (X \times Y)$. Положим $c'_0 = Fe'_0(c)$, $c'_1 = Fe'_1(c)$, $c' = (1-\lambda)c'_0 + \lambda c'_1$. Согласно лемме 5 $c' = Fe'_\lambda(c)$, где $e_\lambda(x,y) = ((1-\lambda)(x,y), \lambda, \lambda(x,y))$. Поскольку под действием аффинного отображения $F(\mathrm{pr}_1 \bowtie \mathrm{pr}_1) : F((X \times Y) \bowtie (X \times Y)) \to F(X \bowtie Y)$ элементы c'_0, c'_1 и c' переходят соответственно в $Fe_0(a)$, $Fe_1(b)$ и $F(\mathrm{pr}_1 \bowtie \mathrm{pr}_2) \circ Fe'_\lambda(c) = Fi_\lambda(c)$, получаем в $\overline{F}(X \bowtie Y)$ равенство $(1-\lambda)Fe_0(a) + \lambda Fe_1(b) = Fi_\lambda(c)$. Так как i_λ — вложение, элемент c однозначно определяется элементами a, b. Этим мультипликативность F доказана.

Поскольку единственным мультипликативным нормальным функтором является степенной [7], истинность теоремы 2 установлена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jfirgensen P. E. T.* Semigroups of measures in non-commutative harmonic analysis // Semigroup Forum. 1991. V. 43, N 1. P. 263–290.
2. *Banakh T., Hryniv O.* Embedding topological semigroups into the hyperspaces over topological groups // Acta Univ. Carol., Math. Phys. 2007. V. 48, N 2. P. 3–18.
3. *Teleiko A., Zarichnyi M.* Categorical topology of compact Hausdorff spaces. Lviv: VNTL Publ., 1999. V. 5.
4. *Teleiko A. B., Zarichnyi M. M.* Semigroups and triples. 1988. (Preprint).
5. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 3. С. 3–62.
6. *Banakh T., Cencelj M., Hryniv O., Repovš D.* Characterizing compact Clifford semigroups that embed into convolution and functor semigroups // Semigroup Forum. 2011. V. 83, N 1. P. 123–133.
7. *Заричный М. М.* Мультипликативный нормальный функтор — степенной // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 1. С. 93–110.
8. *Engelking R.* General topology. Warsaw: PWN, 1977.
9. *Barr M., Wells Ch.* Toposes, triples and theories. New York: Springer, 1988.
10. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология: основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
11. *Nykyforchyn O. R.* On the axiom of continuity, openness and bicommutativity // Methods Funct. Anal. Topol. 1998. V. 4. P. 82–85.
12. *Радул Т. М.* Про монади, породжені деякими нормальними функторами (О монадах, порожденных некоторыми нормальными функторами) // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат. 1990. № 34. С. 59–62.

13. *Nykyforchyn O. R.* Semiconvex compacta // Comm. Math. Univ. Carol. 1997. V. 38, N 4. P. 761–774.

14. *Nykyforchyn O. R.* Atomized measures and semiconvex compacta // Carpath. Math. Publ. 2010. V. 2, N 2. P. 83–100.

Статья поступила 1 октября 2012 г.

Никифорчин Олег Ростиславович
Прикарпатский национальный университет им. Василя Стефаника,
факультет математики и информатики,
ул. Шевченка, 57, Ивано-Франковск 76025, Украина
oleh.nyk@gmail.com

Реповш Душан
Университет в Любляне, педагогический факультет,
Институт математики, физики и механики,
ул. Ядранска, 19, Любляна 1000, Словения
dusan.repovs@guest.arnes.si