Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 517.962.24

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ОЦЕНКИ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ МОНОТОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Р. И. Козлов

Аннотация. Обобщаются критерии асимптотической устойчивости, а также оценки областей притяжения в неотрицательном конусе для систем автономных разностных уравнений с монотонной разрывной правой частью.

Ключевые слова: разностные уравнения, монотонность, устойчивость, область притяжения, оценки.

Даются некоторые уточнения, дополнения и обобщения результатов из [1, 2] по асимптотической устойчивости и оценкам областей притяжения систем монотонных разностных уравнений. Ориентируясь на метод векторных функций Ляпунова [3, 4], где монотонные разностные уравнения возникают как системы сравнения при исследовании процессов с дискретным временем, мы изучаем свойства с односторонними (сверху) оценками поведения решений при неотрицательных начальных данных (устойчивость в конусе). Отметим, что во многих задачах динамики экономических, социальных, биологических и других процессов монотонные системы часто непосредственно служат моделями изучаемых объектов, для которых представляют интерес только свойства решений с неотрицательными состояниями [5–9].

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство с покоординатными соотношениями частичного порядка $y \le x$, $y < x$ $(y, x \in \mathbb{R}^n)$, порожденными соответственно неотрицательным конусом $\overline{\mathbb{R}^n_+} \equiv \{y = \operatorname*{col}_{i=\overline{1,n}}(y^i) \in \mathbb{R}^n : \forall i\ y^i \ge 0\}$ и его внутренностью $\mathbb{R}^n_+ \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : \forall i\ y^i > 0\}$.

Рассматривается система разностных уравнений

$$y(t+1) = f(y(t)), \quad t \in \mathbb{Z} \equiv \{0, 1, 2, \dots\},\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с правой частью $f : Y \to \mathbb{R}^n$, неубывающей по y на множестве $Y \subseteq \overline{\mathbb{R}^n_+}$: $(\forall y, x \in Y : y \le x)$ $f(y) \le f(x)$. Везде далее считается, что

$$Y = \{y \in \overline{\mathbb{R}^n_+} : \forall i = \overline{1,n}\ y^i < h^i,\ 0 < h^i \le \infty\} \quad (h^i \text{заданы}) \tag{2}$$

и $f(0) = 0$, вследствие чего $f(y) \ge 0$ в Y.

Решение системы (1) с начальными условиями $y(t_0) = y_0$ обозначается через $y(t, t_0, y_0)$, при $t_0 = 0$ — через $y(t, y_0)$; $T(y)$ — область определения решения

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–08–90411 УКР–а), Президиума СО РАН (проект № 80) и Программы Президиума РАН (№ 17.1).

(вправо по t), представляющая собой подмножество непосредственно следующих друг за другом (начиная с t_0) целых чисел из $T_{t_0} \equiv \{t \in \mathbb{Z} : t \geq t_0\}$, при которых удовлетворяется (1). Через $\{t_1, t_2\}$ будем обозначать «целочисленный» отрезок — совокупность всех целых чисел от t_1 до t_2 включительно ($t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$, $t_1 < t_2$).

Напомним, что монотонность f обеспечивает справедливость для (1) теоремы о разностных неравенствах: если для функции $u : T_u = \{t_0, t_m\} \to \mathbb{R}^n$ при любом $t \in T_u$ имеет место $u(t+1) \leq f(u(t))$, то при $u(t_0) \leq y_0$ для любого $t \in T_u \cap T(y)$ будет $u(t) \leq y(t, t_0, y_0)$ (см. [1–3] и ссылки в них). В свою очередь, отсюда сразу следует упорядоченность решений по начальным данным. Поскольку $f(y) \geq 0$ в Y, при неотрицательных начальных условиях y_0 решения $y(t, t_0, y_0)$ тоже неотрицательны.

Следуя [2], обозначим

$$S_+(y) \equiv \left\{z \in \overline{\mathbb{R}^n_+} : z \geq y\right\}, \quad S^+(y) \equiv \left\{z \in \overline{\mathbb{R}^n_+} : z > y\right\},$$

$$S_-(y) \equiv \left\{z \in \overline{\mathbb{R}^n_+} : z \leq y\right\}, \quad S^-(y) \equiv \left\{z \in \overline{\mathbb{R}^n_+} : z < y\right\},$$

$$S(x, y) \equiv S_+(x) \cap S_-(y) \equiv \langle x, y\rangle \quad \text{(конусный отрезок)},$$

где y, x — произвольные точки в $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, и введем множества

$$S_+(M) \equiv \bigcup_{y \in M} S_+(y), \quad S^+(M) \equiv \bigcup_{y \in M} S^+(y),$$

$$S_-(M) \equiv \bigcup_{y \in M} S_-(y), \quad S^-(M) \equiv \bigcup_{y \in M} S^-(y), \quad S(x, M) \equiv S_+(x) \cap S_-(M),$$

$$M_+ \equiv M \cap \mathbb{R}^n_+ \quad (M \text{ — произвольное множество в } \overline{\mathbb{R}^n_+}).$$

Будем писать $f \in SC(y)$, если f полунепрерывна сверху в точке $y \in Y$, т. е. $\overline{\lim\limits_{x \to y,\, x > y}} f(x) = f(y)$ (векторные операции $\overline{\lim}$ (и далее lim), inf, sup, min, max, $|\cdot|$ (модуль) понимаются как покомпонентные). В случае, когда f полунепрерывна сверху во всех точках некоторого множества $M \subseteq Y$ или всюду в Y, будем писать $f \in SC(M)$ или $f \in SC$ соответственно.

Определим изучаемые далее свойства устойчивости системы (1) в неотрицательном конусе $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ (сравни [2, с. 67–69, 114; 3; 4; 6–14]).

Притяжение (свойство A): существуют $\mathscr{A} \subseteq Y$, $\gamma \in \mathbb{R}^n_+$ такие, что $\mathscr{A} \supset S^-(\gamma)$ и

$$\forall y_0 \in \mathscr{A} \ T(y) = \mathbb{Z}, \ \lim y(t, y_0) = 0 \ \text{ при } t \to \infty, \tag{3}$$

причем для любого $\beta \in \mathscr{A}$ предельное соотношение (3) равномерно относительно $y_0 \in S_-(\beta)$, т. е. $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n_+ \ \exists \tau \in \mathbb{Z} \ \forall y_0 \in S_-(\beta) \ \forall t \in T_\tau \ y(t, y_0) < \sigma$.

Таким образом, свойство A — это существование содержащей внутренние (а значит, строго положительные) точки *области притяжения* $\mathscr{A}$, начинаясь в которой, решения бесконечно продолжимы и стремятся к 0 равномерно по начальным данным из каждого «параллелепипеда» $S_-(\beta)$, лежащего в $\mathscr{A}$.

Если $\mathscr{A} = Y$, притяжение называется *глобальным* (свойство GA).

Асимптотическая устойчивость (свойство AS): свойство A и *устойчивость* (свойство S): $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^n_+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^n_+ \ \forall y_0 \in Y \cap S^-(\delta) \ T(y) = \mathbb{Z}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$ $y(t, y_0) < \varepsilon$. *Глобальная асимптотическая устойчивость* (свойство ASG): AS с $\mathscr{A} = Y$.

Важную роль при исследовании динамических систем с монотонностью играют свойства некоторых множеств в пространстве состояний, на которых решения тоже ведут себя монотонным образом [1–3, 6–14]. Для рассматриваемых разностных систем (1) к таким множествам в первую очередь относятся множества, определяемые соотношениями

$$H \equiv \{y \in Y : f(y) \leq y\}, \quad E \equiv \{y \in Y : f(y) < y\}, \quad \Omega = \{y \in Y : f(y) = y)\}.$$

Как установлено в [1, 2], H обладает следующими свойствами: для любого $p \in H$ множество $S_-(p)$, а также само H инвариантны (всюду далее подразумевается инвариантность вправо по t); при $y_0 \in H$ в H целиком лежит и след решения $\tilde{y}(\tau, y_0)$ — ломаная в $\mathbb{R}^n$ с вершинами $\tilde{y}(t_k) = y(t_k)$, $t_k \in T(y)$, причем $T(y) = T_{t_0}$; при этом существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} y(t, y_0) = a \in H$ и если $f \in SC(a)$, то $a \in \Omega$.

Аналогично лемме 3.3 в [2] легко показывается также, что при $y(t_0) \in E$ множество E содержит след решения на любом отрезке $\{t_0, t_m\} \subseteq T(y)$, на котором узлы $y(t_k)$ принадлежат E.

Кроме того, по лемме 3.4 из [2] если K — связная компонента (всюду здесь, как и в [2], имеется в виду линейная связность) множества H (соответственно множества E) и $f \in SC(q_K)$, где $q_K = \inf K$, то $q_K \in \Omega \cap K$ (соответственно $q_K \in \Omega \cap \overline{K}$, $q_K < y$ для любого $y \in K$).

Некоторым дополнением к названным свойствам множеств H, E являются следующие утверждения.

Лемма 1. *Две любые упорядоченные точки связной компоненты K множества $M = H$ или $M = E$ можно соединить монотонным путем, лежащим в K. В случае, когда $M = E$ и $f \in SC(K)$, строго упорядоченные точки из K могут быть соединены в K строго возрастающим путем.*

Если $f \in SC(q_K)$, то точка $q_K = \inf K$ может быть соединена с любой точкой $b \in K$ непрерывным путем $l(\alpha, b)$ со следующими свойствами: $l(0, b) = q_K$, $l(1, b) = b$, $l(\alpha, b)$ не убывает, а при $M = E$ даже строго возрастает по α, и $l(\alpha, b) \in K$ при $\alpha \in (0, 1]$ (при всех α в случае $M = H$).

Доказательство. Пусть $a, b \in K$, $a \leq b$, путь $l(\alpha)$ ($\alpha \in [0, 1]$) лежит в K и соединяет a и b так, что $l(0) = a$, $l(1) = b$. Переходя при необходимости к $l'(\alpha) = \max\{a, l(\alpha)\}$, можно считать $l(\alpha) \geq a$ (будет $f(l'(\alpha)) \leq \max\{f(a), f(l(\alpha))\} \leq \max\{a, l(\alpha)\} = l'(\alpha)$, $f(l'(\alpha)) < l'(\alpha)$ при $M = E$). Определим монотонный (неубывающий) путь $l_0(\alpha) = \min\limits_{\beta\in[\alpha,1]} l(\beta)$. Очевидно, $l_0(0) = a$, $l_0(1) = b$. Покажем, что $l_0(\alpha) \in K$. В силу непрерывности l для любых $\alpha \in [0, 1]$, $i = \overline{1, n}$, найдется $\alpha_i \in [\alpha, 1]$ такое, что $l^i_0(\alpha) = l^i(\alpha_i)$. По определению l_0 имеем $l_0(\alpha) \leq l(\alpha_i)$. Поэтому $f^i(l_0(\alpha)) \leq f^i(l(\alpha_i)) \leq l^i(\alpha_i) = l^i_0(\alpha)$ ($f^i(l_0(\alpha)) < l^i(\alpha_i) = l^i_0(\alpha)$ при $M = E$). Таким образом, $l_0(\alpha) \in M$, а значит, $l_0(\alpha) \in K$, т. е. l_0 является искомым монотонным путем.

Если $M = E$ и $a < b$, сначала вышеописанным образом построим в K неубывающий путь $l_0(\alpha)$, соединяющий a с b, и, пользуясь полунепрерывностью f сверху на K, вследствие чего K открыто, найдем вектор $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$, $\varepsilon < b - a$, такой, что $\langle y - \varepsilon, y + \varepsilon\rangle \subset K$ для любого $y \in l_0$. Полагая далее $l_\varepsilon(\alpha) = \max\{a + \varepsilon, l_0(\alpha)\} - (1 - \alpha)\varepsilon$, получаем в K строго возрастающий путь, соединяющий a и b.

Для доказательства последнего утверждения леммы в случае $M = H$ достаточно заметить, что в силу условия $f \in SC(q_K)$ будет $q_K \in K$ и согласно вышесказанному в K существует неубывающий путь, соединяющий q_K с любой точкой $b \in K$ $(b \geq q_K)$. В случае $M = E$ в качестве искомого строго возрастающего пути $l(\alpha, b)$, соединяющего q_K с произвольно данной точкой $b \in K$, можно взять объединение точки q_K и строго возрастающих путей $l_j(\alpha_j) \subset K$, $j = 1, 2, \ldots,$ $\alpha_j \in [0, 1]$, соединяющих a_{j+1} и a_j, где $a_1 = b$, $\{a_j\}$ — строго убывающая последовательность точек из K, стремящихся к q_K при $j \to \infty$ (существующая, поскольку $q_K \in \overline{K}$). Переход к единому параметрическому представлению $l(\alpha)$ с $\alpha \in [0, 1]$ получается, если принять, например, $l(0, b) = q_K$ и $l(\alpha, b) = l_j(\alpha_j)$ при $\alpha \in (0, 1]$, где j таково, что $\alpha \in (2^{-j}, 2^{1-j}]$, $\alpha_j = 2^j\alpha - 1$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для связной компоненты K множества $M = H$ (соответственно множества $M = E$) при $f \in SC(q_K)$ в $S(q_K, K)$ не существует точек из H (соответственно из E), не принадлежащих K, т. е. $M \cap S(q_K, K) = K$ и не может быть различных компонент K, имеющих общий* $\inf$.

Доказательство. Пусть лемма неверна и существует $p \in M \cap S(q_K, K)$, $p \notin K$. Так как $q_K = \inf K$, найдется точка $a \in K$ такая, что $a \leq p$ (при $M = H$ можно просто принять $a = q_K \in K$, если $M = E$, существование a следует из того, что необходимо $p > q_K$ и $q_K \in \overline{K}$).

Полагая $l^*(\alpha) = \min\{p; l(\alpha)\}$, где $l(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, — непрерывный путь в $K \subseteq M$, соединяющий $a = l(0)$ с некоторой точкой $b = l(1) \geq p$, получаем $l^*(1) = p \in M$, $l^*(0) = a \in K$, а в силу монотонности $f(l^*(\alpha)) \leq \min\{f(p); f(l(\alpha))\} \leq l^*(\alpha)$ $(f(l^*(\alpha)) < l^*(\alpha)$ при $M = E)$ для любого $\alpha \in [0, 1]$. Это означает, что l^* — непрерывный путь в M, соединяющий a и p, т. е. $p \in K$ вопреки предположению.

Следующая лемма уточняет известные свойства непрерывных аппроксимаций полунепрерывных функций применительно к монотонному случаю.

Лемма 3. *Если неубывающая функция $f : Y \to R^m$ $(m \geq 1)$ полунепрерывна сверху на множестве Y, определяемом согласно (2), то в любом замкнутом «параллелепипеде» $Y_b \equiv S_-(b)$, $b \in Y_+$, может быть построена невозрастающая последовательность неубывающих непрерывных функций $\varphi_k : Y_b \to R^m$, $k \in \mathbb{Z}_+ \equiv \{1, 2, \ldots\}$, мажорирующих f $(f(y) \leq \varphi_k(y)\ \forall y \in Y_b)$ и локально равномерно сходящихся сверху к f при $k \to \infty$ в следующем смысле: $\forall y \in Y_b\ \forall \varepsilon \in R^m_+$ $(\exists \bar{y} \in \langle y, b \rangle : \bar{y}^i > y^i$ при $y^i < b^i)$ $\exists j \in \mathbb{Z}_+\ \forall k \geq j\ \forall z \in \langle y, \bar{y} \rangle$ $\varphi_k(z) - f(y) < \varepsilon$ (и тем более $\varphi_k(z) - f(z) < \varepsilon$).*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $m = 1$. Определим в $Y_b \times Y_b$ функции $f_k(x, y) = f(x) - k \max\limits_{i=\overline{1,n}}(x^i - y^i)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и примем $\varphi_k(y) \equiv \max\limits_{y \leq x \leq b} f_k(x, y)$. Очевидно, f_k возрастают по y при фиксированном x, для любого $y \in Y_b$ при $x \geq y$ имеем $f_k(x, y) \leq f(x)$, $f_k(y, y) = f(y)$, вследствие чего $\varphi_k(y) \geq f(y)$, $\varphi_k(b) = f(b)$; последовательность $\{\varphi_k(y)\}$ не возрастает с ростом k.

Покажем, что каждая функция φ_k не убывает по y. Пусть $y, z \in Y_b$, $y \leq z$. Для произвольной точки $x \in \langle y, b \rangle$, если $x \leq z$, в силу монотонности f имеем $f_k(x, y) \leq f_k(x, x) = f(x) \leq f(z) \leq \varphi_k$. Если же $x \not\leq z$, то для $\bar{x} = \max\{x, z\}$ получается $0 < \max\limits_{i=\overline{1,n}}(\bar{x}^i - z^i) = \max\limits_{i=\overline{1,n}}(x^i - z^i) \leq \max\limits_{i=\overline{1,n}}(x^i - y^i)$. Поэтому $f_k(x, y) \leq f(x) - k \max\limits_{i=\overline{1,n}}(\bar{x}^i - z^i) \leq f_k(\bar{x}, z) \leq \varphi_k(z)$. Отсюда следует $\varphi_k(y) \leq \varphi_k(z)$.

Чтобы доказать непрерывность φ_k, для произвольно данных $\varepsilon > 0$ и $y, z \in$

Y_b таких, что $\|z-y\| \equiv \max\limits_{i=\overline{1,n}} |z^i-y^i| \le \delta$, где δ выбрано так, что $k\delta < \varepsilon$, обозначим $\bar z = \max\{z, y\}$. Очевидно, $\|\bar z - z\| \le \delta$, $\|\bar z - y\| \le \delta$, и в силу монотонности $\varphi_k(z)$ по z

$$\varphi_k(z) \le \varphi_k(\bar z) \le \max_{\bar z \le x \le b}(f(x) - k \max_{i=\overline{1,n}}(x^i - y^i) + k\delta)$$
$$\le \max_{y \le x \le b}(f(x) - k \max_{i=\overline{1,n}}(x^i - y^i)) + k\delta < \varphi_k(y) + \varepsilon.$$

Аналогично выводится $\varphi_k(y) \le \varphi_k(\bar z) < \varphi_k(z) + \varepsilon$, так что $|\varphi_k(y) - \varphi_k(z)| < \varepsilon$.

Осталось показать локально равномерную сходимость φ_k к f. При этом с учетом свойств монотонности $\varphi_k(y)$ по k и по y достаточно проверить неравенство $\varphi_j(\bar y) - f(y) < \varepsilon$ для $y \ne b$. Пусть $J_y \equiv \{i \in \overline{1,n} : y^i < b^i\}$, точка $\bar z \in \langle y, b\rangle$, $\bar z^i > y^i$ при $i \in J_y$, выбрана так, что в силу полунепрерывности f сверху $f(\bar z) < f(y) + \varepsilon$. Если $\bar z = b$, то можно сразу взять $\bar y = \bar z$, $j = 1$. При $\bar z \ne b$ примем $j = [(f(b) - f(\bar z))/\delta] + 1$ ($[\,\cdot\,]$ – целая часть), $\bar y = \operatorname*{col}\limits_{i=\overline{1,n}}(\bar y^i)$, где $\bar y^i = b^i$ при $\bar z^i = b^i$, $\bar y^i = \bar z^i - \delta$ при $i \in J \equiv \{i \in \overline{1,n} : \bar z^i < b^i\}$, $\delta = \frac{1}{2}\min\limits_{i\in J}(\bar z^i - y^i) > 0$ (очевидно, $J \subseteq J_y$, $\bar y \ge y$, причем $\bar y^i > y^i$ при $i \in J$). Тогда для $x \in \langle \bar y, b\rangle$ при $x \not\le \bar z$ имеем $\max\limits_{i=\overline{1,n}}(x^i - \bar y^i) = \max\limits_{i=\in J}(x^i - \bar y^i) = \max\limits_{i=\in J}(x^i - \bar z^i) + \delta \ge \delta$ и потому $f_j(x, \bar y) \le f(b) - j \max\limits_{i=\overline{1,n}}(x^i - \bar y^i) \le f(b) - j\delta \le f(\bar z)$. Если $x \le \bar z$, то сразу получается $f_j(x, \bar y) \le f(\bar z) - j \max\limits_{i=\overline{1,n}}(x^i - \bar y^i) \le f(\bar z)$. Отсюда $\varphi_j(\bar y) \le f(\bar z) < f(y) + \varepsilon$, что и требовалось.

Лемма доказана.

Пусть E^0 обозначает связную компоненту множества E такую, что $0 \in \overline{E}_0$.

Лемма 4. *Если для системы* (1) *с* $f \in SC$ *при некотором* $y_0 \in Y_+$ *имеем* $T(y) = \mathbb{Z}$ *и* $\lim y(t, y_0) = 0$ *при* $t \to \infty$, *то* E^0 *непусто и содержит множество* $E(y_0) \equiv E \cap S_-(y_0)$, *которое связно.*

Доказательство. Положим $\rho = \min\limits_{i=\overline{1,n}} y_0^i$ и для любого $r \in (0, \rho)$ построим в $S_-(y_0)$ множество $q_r \equiv \left\{ y \in \overline{\mathbb{R}^n_+} : \sum\limits_{i=1}^n (y^i)^2 = r^2 \right\}$. Найдем $m \in \mathbb{Z}_+$ и точку $b \in Y$ такие, что для момента $t = m$ имеем $\max\limits_{i=\overline{1,n}}\{y^i(m, y_0)\} < r_0 = r/2\sqrt{n}$, $b > \max\limits_{t\in T_m} y(t, y_0) \equiv \bar y$, где $T_m = \{0, m\}$. Выберем вектор $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^n_+$ так, что $\varepsilon_0 \le b - \bar y$, $\varepsilon_0^i \le r_0$. Полагая $j_0 = 1$, по лемме 3 определим числа $j_s \in \mathbb{Z}_+$ и точки $\bar y_s \in S_-(b)$ таким образом, что для $s = \overline{1, m}$

$$j_s \ge j_{s-1}, \quad \varepsilon_s \equiv \bar y_s - y(m - s, y_0) \in \mathbb{R}^n_+, \quad \varepsilon_s \le \varepsilon_{s-1},$$
$$\varphi_{j_s}(\bar y_s) - f(y(m - s, y_0)) < \varepsilon_{s-1}/2,$$

где $\{\varphi_j(y)\}$ — невозрастающая, аппроксимирующая последовательность непрерывных невозрастающих по y мажорант функции f.

Примем $\varphi(y) \equiv \varphi_{j_m}(y) + \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon_m/2$, и обозначим через $z(t)$ решение системы $z(t+1) = \varphi(z(t))$ с $z(0) = y_0$. Тогда для любого $t \in \{0, m-1\}$ если $z(t) \le \bar y_{m-t}$, то, полагая $s = m - t$, получаем

$$z(t+1) = \varphi_{j_m}(z(t)) + \varepsilon \le \varphi_{j_s}(\bar y_s) + \varepsilon < f(y(m-s, y_0)) + \varepsilon_{s-1}/2 + \varepsilon$$
$$= f(y(t, y_0)) + \varepsilon_{s-1}/2 + \varepsilon \le y(t+1, y_0) + \varepsilon_{s-1} = \bar y_{m-(t+1)} \le y(t+1, y_0) + \varepsilon_0.$$

Так как $z(0) = y_0 = y(0) = \bar{y}_m - \varepsilon_m < \bar{y}_m$, отсюда по индукции выводится $z(t) < y(t, y_0) + \varepsilon_0$, $t \in T_m$, а значит, $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \{z^i(m)\} < 2r_0$.

Определим на поверхности q_r непрерывное касательное поле $v(y) = \varphi(y) - r^{-2}(\varphi(y), y)$, где $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\partial\mathbb{R}^n_+ \equiv \overline{\mathbb{R}^n_+} \setminus \mathbb{R}^n_+$. Для любых $y, z \in \partial q_r \equiv q_r \setminus \mathbb{R}^n_+$ таких, что $(y, z) = 0$, получается $(v(y), z) = (\varphi(y), z) \geq (\varepsilon, z) \geq \varepsilon_0^2 > 0$, так как $\varphi(y) \geq f(y) + \varepsilon \geq \varepsilon$. Отсюда по одному следствию теоремы Брауэра [15, с. 256] (см. также [12, теорема 2.1; 13]) получается, что на q_r существуют точки x такие, что $v(x) = 0$ и $\varphi(x) = r^{-2}(\varphi(x), x)x$, т. е. множество $Q_r \equiv \{y \in q_r : \exists c(y) \in R^1\ \varphi(y) = c(y)y\}$ непусто. При этом поскольку $\varphi(y) \geq \varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$, необходимо $Q_r \subset \mathbb{R}^n_+$.

Покажем, что $c(y) < 1$ на Q_r. Пусть $c(y_*) \geq 1$ для какого-то $y_* \in Q_r$. Тогда $\varphi(y_*) \geq y_*$ и по лемме 3.2 из [2] для системы $z(t+1) = \varphi(z(t))$, так как $y_* < y_0$, всюду на $T(z)$ будет $z(t, y_0) \geq y_*$ и $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \{z^i(t, y_0)\} \geq \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{y^i_*\} \geq r/\sqrt{n} = 2r_0$. Это противоречит полученной выше оценке для $z(m, y_0)$.

Итак, для любого $r \in (0, \rho)$ существует $x \in Q_r \subset \mathbb{R}^n_+$ такой, что $f(x) \leq \varphi(x) < x$, т. е. множество $E(y_0) = E \cap S_-(y_0)$ непусто и $0 \in \overline{E(y_0)}$. Для любой связной компоненты K множества $E(y_0)$ в силу отмеченных выше свойств E будет $q_K \equiv \inf K \in \Omega$, $q_K \leq y_0$. Учитывая инвариантность $S_+(q_K)$, следующую из упорядоченности решений по начальным данным, и условие $y(t, y_0) \to 0$, отсюда получаем $q_K = 0$ и по лемме 2 $K = E(y_0)$, т. е. множество $E(y_0)$ само связно и содержится в E^0.

Доказанная лемма обобщает лемму 3.10 из [2] на случай разрывных (лишь полунепрерывных сверху) правых частей. Требование полунепрерывности f в лемме 4 существенно, как показывает следующий

Пример 1. $Y = \overline{R^2_+}$; $f^1(y) = 0$ при $y \in Y$; $f^2(y) = \lambda y^2$ при $y^1 = 0$, $f^2(y) = y^1 + y^2$ при $y^1 > 0$, где $\lambda \in (0, 1)$. Все решения с $y_0 \in Y$ стремятся к 0 при $t \to \infty$, но $E = \varnothing$, а множество H сводится к полупрямой $\{y^1 = 0,\ y^2 \geq 0\}$.

Положим $G \equiv \{y \in Y : f(y) \prec y\}$, где $x \prec y$ — отношение частичного порядка для точек $x, y \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$, означающее $x^i < y^i$, если $y^i > 0$, иначе $x^i = y^i$ $(i = \overline{1, n})$. Очевидно, что $G \subseteq H$, $G \setminus E \subseteq \partial\mathbb{R}^n_+ \equiv \overline{\mathbb{R}^n_+} \setminus \mathbb{R}^n_+$, $G_+ = G \cap \mathbb{R}^n_+ = E$; для любых $y, x \in G$ имеем $\min\{y; x\} \in G$.

Справедливы следующие аналоги лемм 1 и 2 и указанные перед ними свойства связных компонент множеств H или E.

Лемма 5. *Если K — связная компонента множества G, $f \in SC(q_K)$, где $q_K \equiv \inf K$, то $q_K \in \Omega \cap \overline{K}$ ($q_K \in \Omega \cap K$ при $q_K = 0$); $S(q_K, K) \cap G = K$; $q_K \prec y$, $y \in K$. Любая точка $b \in K$ может быть соединена с q_K непрерывным путем $l(\alpha)$ со свойствами: $l(0) = q_K$, $l(\alpha) \in K$ для $\alpha \in (0, 1]$, $l(1) = b$, $l(\alpha_1) \leq l(\alpha_2)$ при $\alpha_1 < \alpha_2$, а в случае $f \in SC(K)$ даже $l(\alpha_1) \prec l(\alpha_2)$ (путь l монотонен относительно $\prec$).*

Доказательство. Определим множество $K^* \equiv \{y \in \overline{\mathbb{R}^n_+} : \exists a, b \in K,\ y = \min\{a, b\}\}$. Имеем $K \subseteq K^* \subseteq G$, для любых двух путей $l_1(\alpha), l_2(\alpha) \subset K$ с $\alpha \in [0, 1]$ их минимум $l(\alpha) = \min\{l_1(\alpha), l_2(\alpha)\}$ лежит в K, поэтому K^* представляет связное множество в G, содержащее K, а значит, $K^* = K$. Отсюда по определению q_K как $\inf K$ получается $q_K \in \overline{K}$, так как для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$, $i = \overline{1, n}$, существует $a_i \in K \cap S_+(q_K)$ такое, что $a^i_i < q^i_K + \varepsilon^i$ и $a = \min\{a_i\} \in K \cap \langle q_K, q_K + \varepsilon\rangle$.

В силу полунепрерывности f сверху в точке q_K имеем $f(q_K) \leq q_K$. Покажем, что также $f(q_K) \geq q_K$. Пусть это не так и множество индексов $J =$

$\{j \in \overline{1,n} : f^j(q_K) < q_K^j\}$ непусто. Поскольку при $j \in J$ необходимо $q_K^j > 0$, существует окрестность $U_j = \{y \in Y : \max\limits_{i=\overline{1,n}} |y^i - q_K^i| < r^i\}$ точки q_K, в которой $f^j(y) < y^j$. Очевидно, что $K \cap U_j \neq \varnothing$, и для любого $z \in K \cap U_j$ найдется точка $v \in U_j \cap S_-(z)$ такая, что $v^j < q_K^j$ и $v^i = z^i$ при $i \neq j$. В силу монотонности f для всех точек отрезка прямой, соединяющего точки v, z, при $i \neq j$ будет $f^i(y) - y^i = f^i(y) - z^i \leq f^i(z) - z^i$, а так как $\langle v, z\rangle \subset U_j$, также $f^j(y) < y^j$. Отсюда следует, что $f(y) \prec y$, поскольку $f(z) \prec z$, т. е. v и z лежат в одной и той же связной компоненте K множества G. Это противоречит тому, что $v \ngeq q_K$, а значит, $q_K \in \Omega$. Поэтому для любого $y \in K$ в неравенстве $q_K \leq y$ для каких-то компонент может быть $q_K^i = y^i$ только при $q_K^i = 0$, так как иначе для них было бы $f^i(q_K) \leq f^i(y) < y^i$. Следовательно, $q_K \prec y$.

Вторая часть леммы доказывается аналогично лемме 1.

Лемма 6. *Если K — непустое связное множество в G, то для любой точки покоя p системы* (1), *лежащей в $S_-(K)$, имеет место оценка $p \leq q_K$, где $q_K = \inf K$. Для решения $y(t, y_0)$ с $y_0 \in S_-(K)$ имеем $T(y) = \mathbb{Z}$ и $\varlimsup\limits_{t\to\infty} y(t, y_0) \leq q_K$ при $f \in SC(H \cap S_-(K))$, причем если K — связная компонента множества G и $y_0 \geq q_K$, то $y(t, y_0) \to q_K$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $K = K^*$, где K^* — связное множество в G, построенное при доказательстве леммы 5, так как $S_-(K) = S_-(K^*)$, $\inf K^* = q_K$. Поэтому далее $q_K \in \overline{K}$. Пусть от противного найдется точка покоя $p \in \Omega \cap S_-(K)$ (последнее множество непусто, поскольку по крайней мере содержит 0) такая, что $p \nleq q_K$. Существуют $a, b \in K$ такие, что $p \leq b$, $q_K \leq a \leq b$ и для каких-то компонент $p^i > a^i$. Соединим a и b лежащим в K непрерывным неубывающим путем $l(\alpha)$ так, что $l(0) = a$, $l(1) = b$. Пусть $\alpha_0 = \min\{\alpha : l(\alpha) \geq p\}$, $d = l(\alpha_0)$. Очевидно, $a \leq d \geq p$, $\alpha_0 > 0$ $(a \neq d)$, существуют компоненты такие, что $d^i = p^i$, и, как нетрудно видеть, среди них необходимо есть те, для которых $d^j > a^j \geq 0$ (иначе для всех таких i было бы $l^i(\alpha) = p^i = a^i = d^i$, $\alpha \in [0, \alpha_0]$, и нашлись бы $\alpha < \alpha_0$, где $l(\alpha) \geq p$). Так как $d \in K \subseteq G$, в силу монотонности f для этих компонент $f^j(p) - p^j \leq f^j(d) - d^j < 0$, что противоречит тому, что $p \in \Omega$.

Если $y_0 \in S_-(K)$, то, взяв $z_0 \geq y_0$, $z_0 \in K \subset H$, для решений $y(t, y_0)$, $y(t, z_0)$ имеем $0 \leq y(t, y_0) \leq y(t, z_0) \leq z_0$, а потому $T(y) = \mathbb{Z}$. Кроме того, решение $y(t, z_0)$ принадлежит H для любого $t \in \mathbb{Z}$ и не возрастает, а значит, существует $\lim\limits_{t\to\infty} y(t, z_0) = r \in H \cap S_-(K)$, который в силу условия $f \in SC(r)$ является точкой покоя, и по доказанному выше $r \leq q_K$. Для решения $y(t, y_0)$, очевидно, будет $\varlimsup\limits_{t\to\infty} y(t, y_0) \leq r$. Наконец, в случае, когда K — связная компонента G, по лемме 5 $q_K \in \Omega$, и поскольку $z_0 \geq q_K$, то $y(t, z_0) \geq q_K$ и $r \geq q_K$, т. е. $y(t, y_0) \to q_K$ при $t \to \infty$.

Лемма доказана.

Переходя к рассмотрению критериев изучаемых свойств притяжения A и асимптотической устойчивости AS, везде далее будем в (1) считать правую часть f полунепрерывной сверху в нуле. Это приводит к тому, что проверка традиционного для понятий асимптотической устойчивости требования устойчивости в определении AS для рассматриваемой автономной системы (1) становится излишней, поскольку устойчивость S оказывается следствием равномерного притяжения A.

Вообще, полунепрерывность f сверху в нуле и вытекающая из этого полунепрерывность сверху нулевого решения по начальным данным [2, лемма 3.6] необходимы для свойства устойчивости S. Но, как показывает нижеследующий пример, для притяжения они не требуются.

Пример 2. Пусть $Y = \overline{R^2_+}$, $f^1(y) = \max\{0; y^1 - 1\}$, $f^2(y) = 0$ при $y^1 = 0$, $f^2(y) = \max\{1; y^1\}$ при $y^1 > 0$. Все решения с $y_0 \geq 0$ достигают нуля за конечное число шагов, но $y^2(1, y^0) \geq 1$ при $y^1_0 > 0$, т. е. устойчивости нет.

Пусть G^0 — связная компонента множества G такая, что $0 \in G^0$, $G^0_+ \equiv G^0 \cap \mathbb{R}^n_+$. Очевидно, $G^0_+ \supseteq E^0$, но вообще говоря, $G^0_+ \neq E^0$. Если K — связное множество в G с $\inf K = 0$, то $K \subseteq G^0$.

Пример 3. Пусть $Y = \overline{R^2_+}$, $f^1(y) = \max\{0; y^1 - 1\}$, $f^2(y) = \lambda y^2$ при $y^1 = 0$, $f^2(y) = \min\{y^2; 1 + \lambda(y^2 - 1)\}$ при $y^1 > 0$, где $\lambda \in (0, 1)$. Имеем $H = \overline{R^2_+}$, $E = \{y \in R^2_+ : y^2 > 1\}$, $E^0 = \varnothing$, $G = G^0 = E \cup \{y^1 = 0, y^2 \geq 0\}$. Таким образом, $G^0_+ = E \neq \varnothing$ в отличие от E^0.

Теорема 1. *Если существует связное множество $K \subseteq G$ с $\inf K = 0$, содержащее строго положительные точки (т. е. $K_+ \neq \varnothing$), и $f \in SC(H \cap S_-(K))$, то система* (1) *обладает свойством AS. В случае, когда $f \in SC$, для свойства AS системы* (1) *необходимо, чтобы E^0 было непусто (т. е. чтобы существовало связное множество $K \subseteq E$ с $\inf K = 0$). Для области притяжения $\mathscr{A}$ справедливы соотношения $\mathscr{A} \cap E = E^0$, $\mathscr{A} \cap G = G^0$ и внутренняя оценка $\mathscr{A} \supseteq S_-(G^0) \supseteq S_-(K)$. Если $S_-(K) = Y$, то имеет место свойство ASG.*

Доказательство. Достаточность и оценка $\mathscr{A} \supseteq S_-(G^0) \supseteq S_-(K)$ непосредственно следуют из леммы 6 (равномерность притяжения при этом обеспечивается упорядоченностью решений по начальным данным). Необходимость вытекает из леммы 4. Соотношения для $\mathscr{A} \cap E$, $\mathscr{A} \cap G$ получаем из леммы 2 и первой части леммы 5.

Пользуясь второй частью леммы 1, можно сформулировать другой вариант критерия асимптотической устойчивости, обобщающий один результат Битсориса [16] (в статье [17] им приведено аналогичное утверждение для квазимонотонных дифференциальных уравнений, но тоже только в непрерывном случае).

Теорема 2. *Система* (1) *с $f \in SC$ обладает свойством* (AS) *тогда и только тогда, когда существует непрерывная неубывающая* (*даже строго возрастающая*) *кривая $l : [0, a) \to Y$ такая, что $l(0) = 0$, $f(l(\alpha)) < l(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, a)$. Если при этом $l(\alpha) \underset{\alpha \to a}{\to} h = \sup Y$ ($\min\limits_{i=\overline{1,n}} l^i(\alpha) \underset{\alpha \to a}{\to} \infty$, когда $Y = \overline{\mathbb{R}^n_+}$), то будет глобальная AS.*

Практическое использование теоремы 1 затрудняется требованием связности множеств K из E или G, поэтому представляют интерес случаи, когда эти множества априори являются связными и установление AS сводится к простой проверке существования в $\mathbb{R}^n_+$ точек, где функция $(f(y) - y)$ имеет отрицательные значения (что облегчается монотонностью f).

В связи со сказанным рассмотрим условия, обеспечивающие связность нужных множеств.

Пусть $l(\alpha, y)$ — определенная на множестве $[0, 1] \times L$, $L \subseteq Y$, непрерывная неубывающая по α функция со значениями в $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, удовлетворяющая условиям:

$$\forall y \in L\ l(0, y) = 0,\ l(1, y) = y;\ l(\alpha, x) \prec l(\alpha, y) \quad \text{при } x \prec y, \tag{4}$$

т. е. путь l соединяет точку y с 0, функция l монотонна по y относительно $\prec$.

Определение. Будем писать $f \in lsh_L$ и называть функцию f *l-субоднородной* на множестве L, если

$$\forall y \in L \; \forall \alpha \in (0,1] \quad f(l(\alpha, y)) \le l(\alpha, f(y)), \tag{5}$$

где l — некоторая функция с описанными выше свойствами. Если f l-субоднородна всюду на Y, то будем писать $f \in lsh$.

Лемма 7. *Если для функции $f \in lsh_L$ множество $G_L \equiv G \cap L$ непусто (соответственно $E_L \equiv E \cap L$ непусто, а функция l строго возрастает по y), то G_L связно и $0 \in G_L$, т. е. $G_L \subseteq G^0$ (соответственно E_L связно, $0 \in E_L$ и $E_L \subseteq E^0$). В случае, когда $f \in lsh$, связным будет все множество G и $G = G^0$ (соответственно E связно и $E = E^0$).*

Доказательство. Пусть $y \in G_L$. В силу (5) и $\prec$-монотонности l по y для любого $\alpha \in (0,1]$ получается $f(l(\alpha, y)) \le l(\alpha, f(y)) \prec l(\alpha, y)$, поскольку $f(y) \prec y$ (соответственно $f(l(\alpha, y)) \le l(\alpha, f(y)) < l(\alpha, y)$ при $y \in E_L$ в силу строгой монотонности l). Таким образом, любая точка y из G_L (из E_L) соединяется с точкой 0 непрерывным неубывающим путем $l(\alpha, y)$, все точки которого лежат в G_L (соответственно все, кроме $l(0, y) = 0$, лежат в E_L). Это означает, что y принадлежит связной компоненте G^0 (соответственно E^0), которая по лемме 2 единственна, откуда следуют нужные свойства G_L и E_L.

Объединением теоремы 1 и леммы 7 получается критерий AS, который вследствие удобства его практического использования сформулируем в виде отдельной теоремы.

Теорема 3. *Если для уравнения* (1) *с правой частью $f \in lsh_L$ множество $G_L \equiv G \cap L$ содержит строго положительные точки (т. е. $G_{L+} = G_L \cap \mathbb{R}^n_+ \ne \varnothing$) и $f \in SC(H \cap S_-(G_L))$, то система* (1) *обладает свойством AS. Для области притяжения справедлива оценка $\mathscr{A} \supseteq S_-(G_L)$. В случае, когда $L = Y = S_-(G)$, имеет место глобальная AS.*

Если в системе (1) *правая часть $f \in lsh$ полунепрерывна сверху, то условие непустоты множества $G_+ = G \cap \mathbb{R}^n_+ = E$ необходимо и достаточно для свойства AS.*

Для расширения оценок области притяжения в условиях теоремы 3 полезным является

Следствие 1. *Точка $y_0 \in Y$ принадлежит области притяжения $\mathscr{A}$ системы* (1) *с правой частью $f \in lsh_L$, полунепрерывной сверху на $H \cap S_-(G_L)$, если $y_* \equiv y(t_*, y_0) \in G_L$ для некоторого момента $t_* \in \mathbb{Z}$, т. е. $f(y_*) \prec y_*$ и $y_* \in L$. При этом в области притяжения будет лежать также объединение конусных отрезков $\bigcup\limits_{t \in \{0, t_*\}} \langle 0, y(t, y_0) \rangle$ (шлейф $S_-(y(t, y_0))$ решения $y(t, y_0)$ на отрезке $\{0, t_*\}$).*

Поскольку $G \subseteq H$, H инвариантно, а значит, по крайней мере с момента t_*, описанного в следствии 1, решение $y(t, y_0)$ не возрастает по t, для любой компоненты, для которой $y^i(t_{*i}) = 0$ в какой-то момент $t_{*i} \ge t_*$, далее при всех $t \ge t_{*i}$ будет $f^i(y(t, y_0)) = y^i(t, y_0) = 0$. Для других, т. е. не обращающихся в нуль компонент решения (если таковые останутся), строгие неравенства $f^i(y(t, y_0)) = y^i(t+1, y_0) < y^i(t, y_0)$, вообще говоря, не сохраняются с течением времени.

Действительно, без каких-то дополнительных требований и множество G, и множество E могут быть неинвариантными.

Так, в примере 3 при $y_0^2 > 0$ все решения за конечное время достигают полуоси $\{y^1 = 0,\ y^2 > 0\}$ и далее стремятся по ней к 0 при $t \to \infty$. Таким образом, множество E здесь не инвариантно в отличие от G.

Пример 4. Пусть $y \in \overline{R_+^2}$, $h(y^1)$ — функция, определенная соотношениями: $h(0) = 0$, $h(y^1) = 1/2$ при $y^1 \geq 1/2$, $h(y^1) = a_i$ при $y^1 \in [a_{i+1}, a_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $a_0 = 1/2$, $a_{i+1} = (a_i)^2$. Зададим систему (1) формулами: $f^1(y) = y^1$, если $y^2 \geq h(y^1)$; если $y^2 < h(y^1)$, то $f^1(y) = \varepsilon y^1$ при $y^2 = 0$, $f^1(y) = \max\{a_j; \varepsilon y^1\}$ при $y^2 \in (a_{j+1}, a_j]$, где $1/2 < \varepsilon < 1$, $a_j = a_j(y^1) = \max\{a_i,\ a_i \leq y^1\}$; $f^2(y) = \varepsilon y^2$.

Имеем $H = \overline{R_+^2}$, $E = \{y \in R_+^2,\ y^2 \in (0, h(y^1))\}$, $G = E \cup \partial R_+^2$. Множества E, G связны, примыкают к 0, т. е. $E = E^0$, $G = G^0$, и система обладает свойством ASG. Существуют решения, например, все решения с начальными условиями $y_0^1 \in (1/2, 1)$, $y_0^2 \in (1/4, 1/2)$, которые бесконечное число раз попадают в E (в G) и покидают его (выходя на вертикальные участки графика $h(y^1)$), т. е. и E, и G здесь неинвариантны.

В случае инвариантности множества E решения, начинающиеся в нем или попавшие в него при некотором t_0, далее строго убывают по всем компонентам, а в случае инвариантности G каждая компонента решения строго убывает, пока является положительной, но может за конечное время стать (или быть изначально) нулевой и далее будет оставаться таковой. Такое поведение процессов при использовании систем (1) как систем сравнения в методе вектор-функций Ляпунова [2–4] оказывается полезным в алгоритмах численного анализа их асимптотической устойчивости на основе следствия 1, а для некоторых экономических, социальных и других моделей с монотонностью [5–8] может представлять самостоятельный интерес.

По аналогии со свойством «неприводимости» или «неразложимости» в теории монотонных динамических систем инвариантность E, G может быть обеспечена дополнительными требованиями на монотонность правой части системы (1).

Так, множество E инвариантно, если для любых $x \in E$, $z \in H$, $z < x$, будет $\min\{f^i(z) - f^i(x)\} < 0$ при $i \in I_z \equiv \{i \in \overline{1,n} : f^i(z) = z^i\} \neq \varnothing$, в частности, если f строго убывает на E. Соответственно множество G инвариантно, если для любых $x \in G$, $z \in H$, $z \prec x$, будет $\min\{f^i(z) - f^i(x)\} < 0$ при $i \in I_z^+ \equiv \{i \in I_z : z^i > 0\} \neq \varnothing$, в частности, если f $\prec$-убывает на G.

Действительно, если, например, G не инвариантно для некоторого решения $y(t, y_0)$, найдется момент $\tau \in \mathbb{Z}$, $\tau > 0$, такой, что $y(\tau, y_0) \equiv z \notin G$, $y(t, y_0) \in G$ $\forall t \in \{0, \tau - 1\}$. Поскольку $z \in H$, вектор z необходимо имеет компоненты $z^i = f^i(z) > 0$, т. е. $I_z^+ \neq \varnothing$. По определению момента τ будет $x \equiv y(\tau - 1, y_0) \in G$, поэтому $z \prec x$. В силу монотонности f имеем $f(z) \leq f(x) = z$, причем $z^i = f^i(z) = f^i(x)$ при $i \in I_z^+$. Это противоречит предположению о свойствах f.

Легко видеть, что в примере 3 выписанные условия усиленной монотонности f для множества G выполняются, а для множества E — нет.

Замечание 1. Когда правая часть f $\prec$-убывает на G (или f строго убывает на E), условие $f \in lsh_L$ в теореме 3 является и необходимым для асимптотической устойчивости системы (1). В этом случае можно принять, например, $L = G \cap \mathscr{A}$ (соответственно $L = E \cap \mathscr{A}$) и определить функцию $l(\alpha, y)$ соотношениями $l(0, y) = 0$, $l(\alpha, y) \equiv \tilde{y}(-\ln \alpha, y)$ при $\alpha \in (0, 1]$, где $\tilde{y}(\tau, y)$ — параметризованное непрерывной переменной $\tau \in [0, \infty)$ представление следа решения с начальным условием y.

Замечание 2. Следствие 1 могло бы служить для полного конструктивного описания областей притяжения, если бы попадание решения в множество G являлось необходимым условием принадлежности начальной точки области притяжения (по крайней мере при $y_0 > 0$). Очевидно, это так для уравнений первого порядка; верно, как можно показать, и для систем на плоскости (с полунепрерывной сверху f). В общем случае вопрос о необходимости в условиях следствия 1 остается открытым.

Тем не менее чтобы получить критерий (необходимый и достаточный) выделения притягивающихся решений, ниже по сравнению со следствием 1 расширяем достаточные условия. Для этого используется прием, предложенный в работе [18] при исследовании экспоненциальной устойчивости систем сравнения.

Обозначим через $f_{(m)}$ m-кратную композицию функции f, $m \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, т. е. $f_{(m)}(y) = \overbrace{f(f(\dots(f}^{m}(y))\dots))$ $(f_{(1)} \equiv f)$; $H_m \equiv \{y \in Y_m : f_{(m)}(y) \le y\}$, $E_m \equiv \{y \in Y_m : f_{(m)}(y) < y\}$, $G_m \equiv \{y \in Y_m : f_{(m)}(y) \prec y\}$, $Y_m = \{y \in Y : f_{(k)}(y) \in Y,\ k = \overline{1, m-1}\} \subseteq \overline{\mathbb{R}^n_+}$ — область определения $f_{(m)}$.

Очевидно, $f_{(m)}(0) = 0$, $f_{(m)}$ неубывающая вместе с f, поэтому при $p \in H_m$ множества $S_-(p)$ и само H_m инвариантны для системы

$$x(\tau + 1) = f_{(m)}(x(\tau)), \quad \tau \in \mathbb{Z},\ x \in Y_m, \tag{6}$$

причем если $p \in H$, то $Y_m \supseteq S_-(p)$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$.

Решения $y(t, y_0)$ и $x(\tau, y_0)$ систем (1), (6) с одинаковыми начальными условиями $y(0) = y_0 = x(0)$ связаны соотношением $y(m\tau, y_0) = x(\tau, y_0)$, $\tau \in T(x)$.

Отсюда с помощью группового свойства автономных систем выводится

Лемма 8. *Для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ множество H_m инвариантно для системы* (1).

Доказательство. Действительно, при $y_0 \in H_m$ для любого $t > 0$, обозначая $\tau = \left[\frac{t}{m}\right]$ ($[\cdot]$ — целая часть), имеем $y(m\tau, y_0) = x(\tau, y_0) \in H_m$, и по теореме о разностных неравенствах

$$\begin{aligned} f_{(m)}(y(t, y_0)) = y(t + m, y_0) = y(t - m\tau, y(m\tau + m, y_0)) \\ \le y(t - m\tau, y(m\tau, y_0)) = y(t, y_0), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Легко также видеть, что $H \subseteq H_m \subseteq H_{mk}$, $E \subseteq E_m \subseteq E_{mk} \subseteq \mathbb{R}^n_+$, $G \subseteq G_m \subseteq G_{mk}$, $m, k \in \mathbb{Z}_+$ (в силу инвариантности H, H_m соответственно для (1) и (6)); $E_m \subseteq G_m \subseteq H_m$.

С учетом равномерной относительно t_0 полунепрерывности нулевого решения по начальным данным на отрезках $T_m = \{t_0, t_0 + m\}$ (предположение $f \in SC(0)$ здесь по-прежнему сохраняется, вследствие чего все $f_{(m)}$ тоже полунепрерывны сверху в нуле) из вышесказанного следует, что свойства AS для обоих систем (1) и (6) могут иметь место только одновременно, области притяжения совпадают. Отсюда получается критерий асимптотической устойчивости, обобщающий теорему 3.

Теорема 4. *Система* (1) *асимптотически устойчива, если при некотором $m \in \mathbb{Z}_+$ в G_m существует непустое связное множество K_m с $\inf K_m = 0$ (например, $f_{(m)} \in lsh_{L_m}$, $K_m = G_{mL} \equiv G_m \cap L_m \neq \varnothing$), содержащее внутренние (т. е. строго положительные) точки, и функция $f_{(m)}$ полунепрерывна сверху на $H_m \cap S_-(K_m)$. При этом справедлива оценка области притяжения $\mathscr{A} \supseteq S_-(\bigcup\limits_{m\geq 1} K_m) \equiv \mathscr{A}_K$.*

В случае, когда $Y = \mathscr{A}_K$, имеет место глобальная AS.

Обратно, если система (1) *обладает свойством AS, то найдется номер $m_* \in \mathbb{Z}_+$, начиная с которого все множества $E_m = G_m \cap \mathbb{R}^n_+$ непусты.*

Необходимость здесь очевидна: для любого строго положительного $y_0 \in \mathscr{A}$ при достаточно большом $m_* \in \mathbb{Z}$ в силу притяжения (3) будет $y(m, y_0) < y_0$, $m \geq m_*$.

Пример 5. Для функции f из примера 3 имеем $f^1_{(m)}(y) = \max\{0; y^1 - m\}$ при $y \in \overline{R^2_+}$, $f^2_{(m)}(y) = \lambda^{(m)} y^2$ при $y^1 \in [0, m-1]$, $f^2_{(m)}(y) = \min\{y^2; 1+\lambda^{(m)}(y^2-1)\}$ при $y^1 > m-1$. Таким образом, $G_m = \{[0, m-1] \times \overline{R^1_+}\} \cup \{y^1 > m-1, y^2 > 1\}$, и если принять $L_m = [0, m-1] \times \overline{R^1_+}$, то выполняются все условия теоремы 4 о глобальной AS (с $m \geq 2$).

Следствию 1 теперь можно придать форму точного описания положительной внутренности области притяжения $\mathscr{A}_+ \equiv \mathscr{A} \cap \mathbb{R}^n_+$, т. е. критерия для выделения всех строго положительных начальных условий притягивающихся решений.

Теорема 5. *Точка $y_0 \in Y$ лежит в области притяжения системы* (1) *вместе с конусным отрезком $\langle 0, y_0 \rangle$, если $f_{(m)} \in lsh_{L_m}$, $y(t_*, y_0) \in G_{mL}$ при некоторых $t_* \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$, т. е. $y(t_* + m, y_0) \prec y(t_*, y_0)$, $y(t_*, y_0) \in L_m$, и, кроме того, функция $f_{(m)}$ полунепрерывна сверху на $H_m \cap S_-(G_{mL})$. При этом также $\bigcup\limits_{t \in \{0, t_*\}} \langle 0, y(t, y_0) \rangle \subseteq \mathscr{A}$.*

Обратно, если для системы (1) *$y_0 \in \mathscr{A}_+$, то существуют число $m_* \in \mathbb{Z}_+$ и момент $t_* \in \mathbb{Z}$ такие, что $y(t_*, y_0) \in E_m$, т. е. $y(t_* + m, y_0) < y(t_*, y_0)$ для всех $m \geq m_*$, $m \in \mathbb{Z}$, а также $y(t + m, y_0) \leq y(t, y_0)$, $t \geq t_*$, $t \in \mathbb{Z}$.*

Последнее неравенство $y(t + m, y_0) \leq y(t, y_0)$ здесь получается по лемме 8.

Замечание 3. Очевидно, композиция любых двух неубывающих функций класса lsh тоже (l)-субоднородна, а потому, когда в условиях теорем 4, 5 $f \in lsh_L$, будет также $f_{(m)} \in lsh_{L_m}$, где $L_m = \{y \in L : f_{(k)}(y) \in L,\ k = \overline{1, m-1}\}$.

Следствие 2. *Если в системе* (1) *$f \in lsh$ полунепрерывна сверху всюду на Y, то $\mathscr{A}_+ = \bigcup\limits_{m \geq 1} E_m$.*

Теорема 5 позволяет построить эффективные вычислительные процедуры отыскания оценок областей притяжения дискретных систем сравнения (сравни [3]), особенно в случае $f \in lsh_L$. Каждое итерирование до момента $t_* + m$, где t_*, m обладают указанными в теореме свойствами, выделяет сразу целый «параллелепипед» $\langle 0, y_0 \rangle$ в области притяжения.

Замечание 4. В правилах останова непритягивающихся решений может использоваться следующее свойство: если в процессе итерирования для некоторых $\overline{t} \in \mathbb{Z}$, $\overline{m} \in \mathbb{Z}_+$ окажется $y(\overline{t}+\overline{m}, y_0) \geq y(\overline{t}, y_0) \neq 0$, то заведомо $S_+(y_0) \cap \mathscr{A} = \varnothing$, т. е. точка y_0 вместе с конусом $S_+(y_0)$ не лежит в области притяжения. Это следует из инвариантности множества $Q_m = \{y \in Y_m : f_{(m)}(y) \geq y\}$ для систем (1) и (6).

Приведем условия асимптотической устойчивости, обобщающие в части достаточности теорему 4 на случай, когда не выполняется условие полунепрерывности $f_{(m)} \in SC(H_m \cap S_-(K_m))$ (кроме оговоренной полунепрерывности сверху в 0).

Обозначим через $f^*_{(m)}(y) \equiv \varlimsup\limits_{x\to y,\, x>y} f_{(m)}(x)$ «точную» полунепрерывную сверху мажоранту (верхнюю регуляризацию [19]) функции $f_{(m)}$; $G^*_m \equiv \{y \in Y_m : f^*_{(m)}(y) \prec y\}$.

Теорема 6. *Система* (1) *асимптотически устойчива, если при некотором $m \in \mathbb{Z}_+$ в G^*_m существует непустое связное множество K^*_m с* $\inf K^*_m = 0$ (*например, $f_{(m)} \in lsh_{L_m}$, $K^*_m = G^*_{mL} \equiv G^*_m \cap L_m \neq \varnothing$*), *содержащее строго положительные точки. При этом справедлива оценка $\mathscr{A} \supseteq S_-(\bigcup\limits_{m\geq 1} K^*_m) \equiv \mathscr{A}_{K^*}$.*

Если $Y = \mathscr{A}_{K^*}$, то имеет место глобальная AS.

Доказательство. Если $f_{(k)} \in lsh_{L_k}$ для какого-либо $k \in \mathbb{Z}_+$, то также $f^*_{(k)} \in lsh_{L_k}$, поэтому по теореме 3, а в общем случая определения K^*_m по теореме 1 сформулированные условия обеспечивают асимптотическую устойчивость и выписанную оценку области $\mathscr{A}$ для системы $x(\tau+1) = f^*_{(m)}(x(\tau))$, $\tau \in \mathbb{Z}$, $x \in Y_m$. Решения последней в силу теоремы о разностных неравенствах мажорируют решения системы (6), вследствие чего система (6) и исходная система (1) тоже обладают свойством AS с той же оценкой области притяжения, что завершает доказательство.

Пример 6. Продемонстрируем применение теоремы к системе примера 1, где правая часть не полунепрерывна сверху (исключая точку 0) на множестве $H = G$, представляющем полупрямую $\{y^1 = 0,\ y^2 \geq 0\}$, $G_+ = \varnothing$, и теорема 3 неприменима, хотя $f \in lsh$ с $l(\alpha, y) = \alpha y$. Функции $f_{(m)}$, определяемые соотношениями $f^1_{(m)}(y) \equiv 0$, $f^2_{(m)}(y) = \lambda^{(m)} y^2$ при $y^1 = 0$, $f^2_{(m)}(y) = \lambda^{(m-1)}(y^1 + y^2)$ при $y^1 > 0$, также не полунепрерывны сверху при $y^1 = 0$, $y^2 > 0$, поэтому теорема 4 тоже неприменима, несмотря на то, что при $m \geq 2$ множества $E_m = \{y \in R^2_+ : y^1 < (1/\lambda^{(m-1)} - 1)y^2\}$ уже непустые. Для функций $f^*_{(m)}$ всюду в $\overline{R^2_+}$ получается $f^{*1}_{(m)}(y) \equiv 0$, $f^{*2}_{(m)}(y) = \lambda^{(m-1)}(y^1 + y^2)$, $G^*_m = G_m = \overline{E_m} = \{y \in \overline{R^2_+} : y^1 \leq (1/\lambda^{(m-1)} - 1)y^2\}$, так что по теореме 6 есть глобальная асимптотическая устойчивость.

В заключение приведем критерий, дающий наиболее общие необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости и полное описание области притяжения автономных монотонных разностных систем при минимальных предварительных требованиях на правую часть f.

Для определенной выше верхней регуляризации $f^*_{(m)}(y)$ определим P^*_m как подмножество в H_m, отрицательный шлейф которого $S_-(P^*_m)$ не содержит отличных от 0 точек x таких, что $f_{(m)}(x) \leq x \leq f^*_{(m)}(x)$. Иначе говоря, $P^*_m \equiv \{y \in H_m : S_-(y) \cap \Theta^*_m = \{0\}\}$), где $\Theta^*_m \equiv \{y \in H_m : f^*_{(m)}(y) \geq y\}$.

Теорема 7. *Система* (1) *асимптотически устойчива, если при некотором $m \in \mathbb{Z}_+$ в P^*_m существует непустое множество K^*_m, содержащее строго положи-*

тельные точки. Справедлива оценка области притяжения

$$\mathscr{A} \supseteq S_{-}\Big(\bigcup_{m\geq 1} K_m^*\Big) \equiv \mathscr{A}_{K^*}.$$

Если $Y = \mathscr{A}_{K^*}$, то имеет место глобальная AS.

В случае, когда $f_{(m)}$ полунепрерывны сверху начиная с некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$, существование вышеописанных множеств K_m^* необходимо для асимптотической устойчивости системы (1), причем если AS глобальна, то K_m^* могут быть выбраны так, что $Y = \mathscr{A}_{K^*}$.

Доказательство. Достаточно показать притяжение для решений $x(t, x_0)$ системы (6), начинающихся в K_m^*. Поскольку H_m инвариантно, при $x_0 \in K_m^*$ решение $x(t, x_0)$ не убывает и имеет при $t \to \infty$ предел $q \in S_-(x_0) \cap \Theta_m^*$. По определению P_m^* получается $q = 0$, что и требовалось.

Для доказательства необходимости, выбрав произвольно $y_0 \in \mathscr{A}_+$, найдем номер $m_+ \in \mathbb{Z}_+$, начиная с которого $y_0 \in E_m$ и $f_{(m)} \in SC$. В силу полунепрерывности Θ_m^* превращается в множество точек покоя системы (6), которое при наличии притягивающегося решения с $x_0 = y_0 > 0$ не может содержать в $S_-(x_0)$ ненулевых точек. Поэтому для любого $m \geq m_+$ можно попросту принять $K_m^* = E_m$.

Теорема доказана.

В части достаточности теорема охватывает теорему 6, так как любое связное множество $K_m^* \subseteq G_m^*$ с $\inf K_m^* = 0$, описанное в условиях теоремы 6, является подмножеством в P_m^*. При $m = 1$ из нее как частные случаи получаются лемма 3.8 из [2] и условия глобальной AS, приведенные в работе [14], причем без дополнительного требования полунепрерывности f (и тем более непрерывности, как в [14]).

Отметим, однако, что непосредственное практическое применение последней теоремы с точки зрения конструктивности и вычислительной реализации может оказаться более сложным по сравнению с предыдущими утверждениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов Р. И., Бурносов С. В.* Асимптотическое поведение и оценки решений монотонных разностных уравнений // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск: Наука, 1987. С. 85–93.
2. *Козлов Р. И.* Теория систем сравнения в методе векторных функций Ляпунова. Новосибирск: Наука, 2001.
3. *Абдуллин Р. З., Анапольский Л. Ю, Воронов А. А., Козлов Р. И. и др.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. В. М. Матросова, А. А. Воронова. М.: Наука, 1987.
4. *Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
5. *Опойцев В. И.* Нелинейная системостатика. М.: Наука, 1986.
6. *Smith H.* Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995.
7. *Haddad W. M., Chellaboina V., Hui Q.* Nonnegative and compartmental dynamical systems. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2010.
8. *Haddad W. M., Chellaboina V., August E.* Stability and dissipativity theory for discrete-time non-negative and compartmental dynamical systems // Int. J. Control. 2003. V. 76, N 18. P. 1845–1861.
9. *Krause U.* Positive nonlinear difference equations // Nonlinear Anal. 1997. V. 30, N 1. P. 301–308.

10. *Козлов Р. И.* Оценки решений и устойчивость систем сравнения // Теория устойчивости и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1979. С. 38–49.
11. *Анапольский Л. Ю.* Метод сравнения в динамике дискретных систем // Вектор-функции Ляпунова и их построение. Новосибирск: Наука, 1980. С. 92–128.
12. *Борисенко С. Д., Косолапов В. И., Оболенский А. Ю.* Устойчивость процессов при непрерывных и дискретных возмущениях. Киев: Наук. думка, 1988.
13. *Мартынюк А. А, Оболенский А. Ю.* Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 38-49.
14. *Dashkovskiy S. N., Rüffer B. S., Wirth F. R.* Discrete-time monotone systems: Criteria for global asymptotic stability and applications // Proc. 17th Inter. symp. math. theory of networks and systems (Kyoto, Japan, July 24–28, 2006). Kyoto, 2006. P. 89–97.
15. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
16. *Bitsoris G.* Stability analysis of discrete-time dynamical systems via positive upper aggregated systems // Int. J. Control. 1984. V. 15, N 10. P. 1087–1099.
17. *Bitsoris G.* On the inverse problem of the comparison principle // The Lyapunov function method and applications / ed. by P. Borne, V. Matrosov. Basel: J. C. Baltzer AG Sci. Publ. Co, IMACS, 1990. P. 3–8.
18. *Козлов Р. И., Козлова О. Р.* Исследование устойчивости нелинейных непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ. I, II // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2, С. 104–113; № 3. С. 41–50.
19. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

Статья поступила 6 сентября 2012 г.

Козлов Равиль Измайлович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, а/я 1233, Иркутск 664033
kozlov@icc.ru