*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2013. Том 54, № 4*

*УДК 512.554.38*

# ЦЕНТРАЛИЗАТОР ПРОСТОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ПОДАЛГЕБРЫ В УНИВЕРСАЛЬНОЙ ОБЕРТЫВАЮЩЕЙ СЕМИМЕРНОЙ ПРОСТОЙ АЛГЕБРЫ МАЛЬЦЕВА

**Т. И. Шабалин**

**Аннотация.** Изучаются централизаторы простых трехмерных подалгебр Ли семимерной простой алгебры Мальцева в универсальной обертывающей этой алгебры. Найдены наборы порождающих элементов для такого централизатора в характеристике, отличной от 2, 3, и для подалгебры, порожденной централизатором в центральном замыкании универсальной обертывающей в характеристике 3. Показано, как в качестве следствия основной теоремы можно получить известное описание центра универсальной обертывающей семимерной простой алгебры Мальцева.

**Ключевые слова:** алгебра Ли, алгебра Мальцева, альтернативная алгебра, универсальные обертывающие, алгебра октонионов, скобка Пуассона.

Алгебры Мальцева введены А. И. Мальцевым в [1] как касательные алгебры локальных аналитических луп Муфанг. Алгебры Мальцева являются обобщением алгебр Ли. Для алгебр Мальцева в [2] введено понятие универсальной обертывающей алгебры. Эта алгебра, вообще говоря, неассоциативна, но в случае, когда алгебра Мальцева лиева, она совпадает с универсальной обертывающей алгебры Ли в обычном смысле.

Важными примерами алгебр Мальцева являются пространства элементов с нулевым следом в алгебрах Кэли — Диксона. Они образуют семейство алгебр, зависящих от трех ненулевых параметров из основного поля. Такие алгебры являются простыми и имеют размерность 7. Над полем характеристики 3 эти алгебры лиевы, над полями характеристик, не равных 2, 3, — нет. Е. Н. Кузьмин в [3] показал, что над полем характеристики, не равной 2, 3, всякая конечномерная центральная простая алгебра Мальцева изоморфна одной из этих алгебр.

В случае, когда основное поле алгебраически замкнуто, все такие алгебры $M$ изоморфны. При этом в алгебре $M$ есть трехмерная лиева подалгебра $L$, изоморфная $\mathfrak{sl}_2$. Известно строение центров универсальных обертывающих $U(L)$ и $U(M)$. Над полем нулевой характеристики оба центра являются кольцами многочленов от одной переменной и порождаются элементами Казимира $c_L$ и $c_M$ (см. [4]). В случае поля простой характеристики первый центр описан А. Н. Рудаковым и И. Р. Шафаревичем в [5], второй — Х. М. Перез-Искердо и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11–01–00938–а, 12–01–31194–мол–а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (№ 14.740.11.0346).

И. П. Шестаковым в [6]. Эти центры получаются как расширения колец многочленов от трех и семи переменных элементами $c_L$ и $c_M$ соответственно.

В данной работе изучаются централизаторы простых трехмерных подалгебр $L$ в $M$ в универсальной обертывающей $U(M)$. В характеристике, не равной 2, 3, такой централизатор порождается центрами алгебр $U(L)$ и $U(M)$. Более точно, в характеристике нуль централизатор порождается элементами $c_L$ и $c_M$, а в простой характеристике является расширением кольца многочленов от переменных $\xi_1, \dots, \xi_7$ элементами $c_L$ и $c_M$. Однако в характеристике 3 это неверно. Найдены элементы централизатора подалгебры $L$, которые не являются многочленами от $\xi_1, \dots, \xi_7$, $c_L$, $c_M$. Полного описания централизатора не получено, но описана подалгебра, порожденная централизатором в центральном замыкании $U(M)$. В характеристике нуль результат ранее получен К. А. Шемонаевым (анонс см. в [7]).

Как следствие получаем результаты В. Н. Желябина и И. П. Шестакова [4], а также Х. М. Перез-Искердо и И. П. Шестакова [6] о строении центра универсальной обертывающей простой нелиевой алгебры Мальцева.

## § 1. Алгебры Мальцева и их универсальные обертывающие

Пусть $F$ — поле, характеристика которого отлична от 2, 3. Алгебра $M$ с билинейной антикоммутативной операцией $[\,,]$ называется *алгеброй Мальцева* [4], если в ней выполняется тождество

$$[J(x,y,z),x] = J(x,y,[x,z]),$$

где $J(x,y,z) = [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y]$ — якобиан от $x, y, z$.

Обобщенный альтернативный центр $N_{\mathrm{alt}}(A)$ произвольной алгебры $A$ определяется равенством

$$N_{\mathrm{alt}}(A) = \{a \in A \mid \forall x, y \in A\ (a,x,y) = -(x,a,y) = (x,y,a)\},$$

где $(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$ — ассоциатор элементов $a, b, c$. Множество $N_{\mathrm{alt}}(A)$ замкнуто относительно операции коммутирования и образует алгебру Мальцева, которая обозначается через $N_{\mathrm{alt}}(A)^{(-)}$ (см. [8]). В [2] введены универсальные обертывающие алгебр Мальцева. Во многом свойства этих универсальных обертывающих близки к свойствам универсальных обертывающих алгебр Ли. Так, например, в [4] установлено, что центр универсальной обертывающей полупростой конечномерной алгебры Мальцева над полем характеристики нуль является кольцом многочленов от конечного числа переменных.

Как показано в [2], для всякой алгебры Мальцева над полем $F$ существуют алгебра $U(M)$ и универсальный гомоморфизм $i\colon M \to N_{\mathrm{alt}}(U(M))^{(-)}$. Если $\{b_i \mid i \in I\}$ — упорядоченный базис $M$, то $U(M)$ имеет базис

$$\{b_{i_1}(\dots(b_{i_{n-1}}b_{i_n})\dots) \mid i_1 \le \dots \le i_n,\ n \in \mathbb{N}\}. \tag{1}$$

На $U(M)$ вводится фильтрация: $U_{-1} = 0$, $U_0 = F$, $U_n$ при $n > 0$ — пространство, порожденное $\{a_{i_1}(\dots(a_{i_{k-1}}a_{i_k})\dots) \mid a_i \in M,\ k \le n\}$, при этом

$$U(M) = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n, \quad U_iU_j \subseteq U_{i+j}, \quad [U_i, U_j] \subseteq U_{i+j-1}, \quad (U_i, U_j, U_k) \subseteq U_{i+j+k-2}.$$

Ассоциированная градуированная алгебра $G(M) = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} G^n$, $G^n = U_n/U_{n-1}$ оказывается ассоциативной коммутативной алгеброй, изоморфной $S(M)$ — симметрической алгебре пространства алгебры $M$. *Обобщенной скобкой Пуассона* на ассоциативной коммутативной алгебре называется билинейная антикоммутативная операция $\{\,,\}$, удовлетворяющая тождеству Лейбница

$$\{xy, z\} = \{x, z\}y + x\{y, z\}.$$

На алгебре $G(M)$ есть обобщенная скобка Пуассона, на однородных элементах она задается равенством

$$\{x + U_{i-1}, y + U_{j-1}\} = [x, y] + U_{i+j-2}.$$

Для произвольной алгебры $A$ ассоциативный центр $N(A)$, коммутативный центр $K(A)$ и центр $Z(A)$ определяются следующим образом:

$$N(A) = \{n \in A \mid \forall a, b \in A\ (n, a, b) = (a, n, b) = (a, b, n) = 0\},$$

$$K(A) = \{k \in A \mid \forall a \in A\ [k, a] = 0\}, \quad Z(A) = N(A) \cap K(A).$$

При этом для алгебры $U(M)$ структура центров описывается следующей леммой (см. [4]).

**Лемма 1.** *Пусть $M$ — алгебра Мальцева над полем $F$, а $U$ — ее универсальная обертывающая. Тогда*

$$Z(U) = K(U) = \{n \in U \mid \forall x \in M\ [n, x] = 0\}.$$

## § 2. Алгебры Кэли — Диксона и простые алгебры Мальцева

Пусть характеристика поля $F$ не равна 2. Обозначим через $O = O(\alpha, \beta, \gamma)$ алгебру Кэли — Диксона над полем $F$, $\alpha, \beta, \gamma \in F$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$. На алгебре $O$ есть линейная форма $t$, называемая *следом*, и квадратичная форма $n$, называемая *нормой* (см. [9]).

Пусть $M = M(\alpha, \beta, \gamma) = \{a \in O \mid t(a) = 0\}$ — пространство элементов с нулевым следом, тогда произведение элементов $a, b \in M$ в алгебре $O$ задается по формуле

$$ab = [a, b] - n(a, b)1, \tag{2}$$

где $[\,,]$ — антикоммутативное умножение на $M$, а

$$n(a, b) = \frac{1}{2}(n(a + b) - n(a) - n(b)).$$

Форма $n(\,,)$ — невырожденная билинейная форма на $M$. Она ассоциативна, т. е. $n([a, b], c) = n(a, [b, c])$. В дальнейшем нам понадобится формула (52) из [3], в наших обозначениях она записывается как

$$[[x, y], y] = -n(y, y)x + n(x, y)y. \tag{3}$$

Алгебра $M$ с произведением $[\,,]$ является простой алгеброй Мальцева. Если характеристика поля $F$ не равна 2, 3, то $M$ нелиева. Всякая центральная простая нелиева алгебра Мальцева над полем характеристики, не равной 2, 3, изоморфна алгебре типа $M$ (см. [3]). Позже покажем, что над полем характеристики 3 $M$ — алгебра Ли.

Пусть поле $F$ алгебраически замкнуто, $\operatorname{char} F \neq 2$. Тогда все алгебры $M(\alpha,\beta,\gamma)$ изоморфны алгебре $M(-1,-1,-1)$, которую будем обозначать через $\mathbb{M}$. Алгебра $\mathbb{M}$ имеет базис $e_1,\dots,e_7$ с таблицей умножения

$$[e_i, e_{i+1}] = e_{i+3}, \quad \text{где } e_{i+7} = e_i, \tag{4}$$

инвариантной относительно циклических перестановок троек индексов (см. [6]). Форма $n$ при этом задается следующим образом: $n(e_i,e_j) = 0$ при $i \neq j$, $n(e_i,e_i) = 1$, т. е. базис $e_1,\dots,e_7$ автодуальный.

Подпространство, натянутое на векторы $e_1, e_2, e_4$, является трехмерной простой алгеброй Ли, которая изоморфна $\mathfrak{sl}_2$. Обозначим эту подалгебру через $\mathbb{L}$. Непосредственно видно, что сужение формы $n$ на $\mathbb{L}$ невырожденно. Нам понадобится

**Лемма 2.** *Пусть $L_1$, $L_2$ — две трехмерные простые подалгебры в алгебре $\mathbb{M}$ над алгебраически замкнутым полем $F$ характеристики, не равной 2. Тогда алгебра $\mathbb{M}$ имеет автоморфизм $\varphi$ такой, что $\varphi(L_1) = L_2$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mathbb{M}$ имеет автоморфизм $\varphi$, переводящий $\mathbb{L}$ в $L_1$. Пусть $O = F \oplus \mathbb{M}$, где $F$ — одномерный центр алгебры $O$, а умножение элементов из $\mathbb{M}$ в $O$ восстанавливается по формуле (2). Тогда $O$ — алгебра Кэли — Диксона. Пусть $\mathbb{B} = F \oplus \mathbb{L}$, $B_1 = F \oplus L_1$. Поскольку поле $F$ алгебраически замкнуто, существует изоморфизм $\varphi\colon \mathbb{L} \to L_1$. Формула (3) показывает, что форма $n$ на любой подалгебре в $\mathbb{M}$ полностью определяется умножением в этой подалгебре. Следовательно, автоморфизм $\varphi$ сохраняет форму $n$, и она невырожденна на $L_1$. По формуле (2) умножение в алгебрах $\mathbb{B}$ и $B_1$ определяется скобкой $[\,,]$ в алгебрах $\mathbb{L}$ и $L_1$ и билинейной формой $n$ на них, поэтому $\varphi$ можно продолжить до изоморфизма $\varphi\colon \mathbb{B} \to B_1$. Подалгебры $\mathbb{B}$ и $B_1$ четырехмерные в $O$, ограничение формы $n$ на них невырожденно, поэтому алгебра $O$ получается получается из $\mathbb{B}$ и $B_1$ с помощью процесса Кэли — Диксона (см. доказательство теоремы 1 [9, гл. 2]). В силу алгебраической замкнутости поля $F$ результат этого процесса не зависит от выбора константы, поэтому константы можно считать равными. Тогда $O \cong (\mathbb{B},\alpha) \cong (B_1,\alpha)$, $\alpha \in F$, изоморфизм $\varphi$ продолжается до автоморфизма $\varphi\colon O \to O$, переводящего $\mathbb{B}$ в $B_1$. Его ограничение на $\mathbb{M}$ дает искомый автоморфизм. $\square$

Рассмотрим некоторую трехмерную подалгебру $L$ в $M$ над произвольным полем $F$. Пусть $\overline{F}$ — алгебраическое замыкание $F$. Расширим поле скаляров алгебры $M$: $\overline{M} = M \otimes_F \overline{F}$, $\overline{M}$ можно отождествить с $\mathbb{M}$. Рассуждения из доказательства леммы 2 показывают, что сужение формы $n$ алгебры $\mathbb{M}$ на $\overline{L} = L \otimes_F \overline{F}$ невырожденно. В алгебрах $M$ и $\mathbb{M}$ выполняется формула (3), поэтому форма $n_M$, связанная с алгеброй $M$, является ограничением формы $n_{\mathbb{M}}$, связанной с $\mathbb{M}$. Таким образом, ограничение формы $n = n_M$ на алгебру $L$ невырожденно.

## § 3. Случай характеристики, не равной 2, 3

По аналогии с элементом Казимира для алгебр Ли рассмотрим

$$c_M = a_1 b_1 + \dots + a_7 b_7 \in U(M),$$

где $\{a_1,\dots,a_7\}$, $\{b_1,\dots,b_7\}$ — дуальные базисы $M$ относительно формы $n$.

**Лемма 3.** *Элемент Казимира $c_M$ алгебры $M$ лежит в центре $Z(U(M))$ универсальной обертывающей $U(M)$.*

Доказательство. Во всякой алгебре выполняется тождество

$$[x,yz]-[x,y]z-y[x,z]=-(x,y,z)-(y,z,x)+(y,x,z). \tag{5}$$

Пусть $c$ — произвольный элемент $M$. В силу леммы 1 достаточно доказать, что $[c,c_M]=0$. Из (5) получаем

$$\Big[c,\sum a_ib_i\Big]=\sum a_i[c,b_i]+\sum[c,a_i]b_i-\sum(-(c,a_i,b_i)-(a_i,b_i,c)+(a_i,c,b_i)). \tag{6}$$

Следуя стандартным аргументам (см., например, [10, 6.2]), покажем, что сумма первых двух слагаемых в правой части равна нулю. Поскольку $\{a_1,\dots,a_7\}$, $\{b_1,\dots,b_7\}$ — базисы алгебры $M$, можем записать $[c,a_i]=\sum s_{ij}a_j$, $[c,b_i]=\sum t_{ij}b_j$ для некоторых $s_{ij},t_{ij}$ из поля $F$. Тогда

$$n([c,a_i],b_j)=\sum_k s_{ik}n(a_k,b_j)=s_{ij},$$

$$n([c,a_i],b_j)=-n([a_i,c],b_j)=-n(a_i,[c,b_j])=-\sum_k t_{jk}n(a_i,b_k)=-t_{ji}.$$

Следовательно, $s_{ij}=-t_{ji}$, и

$$\sum a_i[c,b_i]+\sum[c,a_i]b_i=\sum t_{ij}a_ib_j+\sum s_{ij}a_jb_i=0.$$

Пользуясь тем, что $c,a_i,b_i$ лежат в обобщенном альтернативном центре $M$, можно сгруппировать слагаемые в последней сумме в правой части (6), тогда получим

$$\Big[c,\sum a_ib_i\Big]=-3\sum(c,a_i,b_i). \tag{7}$$

Форма $n$ симметрична, поэтому тензор $a_1\otimes b_1+\dots+a_7\otimes b_7\in M\otimes M$ тоже симметричен. Значит, в левой части (7) стоит выражение, не меняющееся при перемене мест $a_i$ и $b_i$, а выражение в правой части (7) при такой замене меняет знак. Следовательно, обе части (7) равны нулю. $\square$

Пусть $\operatorname{char}F=p>3$. Если $a$ — элемент алгебры $M$, т. е. $a\in O$ и $t(a)=0$, то $t(a^p)=0$ и $\mathrm{ad}_{a^p}=\mathrm{ad}_a^p$, где $\mathrm{ad}_a\colon O\to O$, $b\mapsto[a,b]$. Поэтому $M$ — ограниченная алгебра Мальцева, отображение $p$-й степени $a\mapsto a^{[p]}$ задается как возведение в $p$-ю степень в $O$. Отображение $\xi\colon M\to U(M)$, $\xi(a)=a^p-a^{[p]}$ обладает следующими свойствами:

1) $\xi(a+b)=\xi(a)+\xi(b)$,

2) $\xi(\alpha a)=\alpha^p\xi(a)$.

Заметим, что образ $\xi$ содержится в центре алгебры $U(M)$. Действительно, в силу леммы 1 достаточно доказать, что $\mathrm{ad}_{\xi(a)}|_M=0$ для $a\in M$. По лемме 3.2 из [6] $\mathrm{ad}_{a^p}=\mathrm{ad}_a^p$, откуда $\mathrm{ad}_{\xi(a)}|_M=\mathrm{ad}_{a^p-a^{[p]}}|_M=\mathrm{ad}_a^p|_M-\mathrm{ad}_a^p|_M=0$.

В [2, 7] описан центр алгебры $U(M)$. В характеристике нуль он порождается $c_M$, в характеристике $p>3$ — $c_M$ и $\xi(a_1),\dots,\xi(a_7)$, где $a_1,\dots,a_7$ — произвольный базис $M$.

Пусть $S\subseteq U(M)$ — произвольное подмножество. Его *централизатором* в $U(M)$ называется множество

$$C_{U(M)}(S)=\{x\in U(M)\mid\forall y\in S\ [x,y]=0\}.$$

К. А. Шемонаевым получен следующий аналог леммы 1 из [4].

**Лемма 4.** *Если $M$ — алгебра Мальцева, а $L$ — ее подалгебра, то для любых элементов $x \in C_{U(M)}(L)$, $a, b \in U(L)$*

$$[x, a] = (x, a, b) = (a, x, b) = (a, b, x) = 0.$$

*В частности, $C_{U(M)}(L) = C_{U(M)}(U(L))$.*

Выше показано, что если $L$ — трехмерная простая лиева подалгебра в $M$, то ограничение формы $n$ на $L$ невырожденно, поэтому можно рассмотреть

$$c_L = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \text{ — элемент Казимира,}$$

где $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ — дуальные базисы $L$ относительно формы $n$. Элемент $c_L$ лежит в централизаторе $C_{U(M)}(L)$ алгебры $L$ в $U(M)$.

Основной результат данной работы сформулирован в следующей теореме.

**Теорема 1.** *Пусть $F$ — поле, характеристика которого не равна 2, 3, $L$ — трехмерная простая подалгебра нелиевой простой алгебры Мальцева $M$ над $F$, $a_1, \dots, a_7$ — произвольный базис $M$. Тогда централизатор $L$ в универсальной обертывающей $U(M)$ порождается элементами Казимира $c_M, c_L$ алгебр $M, L$, если $\operatorname{char} F = 0$, и элементами $c_M, c_L, \xi(a_1), \dots, \xi(a_7)$, если $\operatorname{char} F > 3$.*

Предположим, что теорема доказана для случая подалгебры $\mathbb{L}$ в $\mathbb{M}$ над алгебраически замкнутым полем. Пусть теперь $L$ — некоторая простая трехмерная подалгебра Ли в нелиевой простой алгебре Мальцева $M$ над произвольным полем $F$, $a_1, \dots, a_7$ — базис $M$ над полем $F$. Пусть $\overline{F}$ — алгебраическое замыкание $F$, $\overline{M} = M \otimes_F \overline{F}$, $\overline{L} = L \otimes_F \overline{F}$. Отождествим $\overline{M}$ с $\mathbb{M}$. По лемме 2 алгебра $\mathbb{M}$ имеет автоморфизм $\varphi$, переводящий $\mathbb{L}$ в $\overline{L}$. Его можно продолжить до автоморфизма $\varphi: U(\mathbb{M}) \to U(\mathbb{M})$, при этом

$$\varphi(C_{U(\mathbb{M})}(\mathbb{L})) = C_{U(\mathbb{M})}(\overline{L}), \quad \varphi(\xi(a)) = \xi(\varphi(a)), \ a \in \mathbb{M},$$

а поскольку $\varphi$ сохраняет форму $n$, то $\varphi(c_{\mathbb{L}}) = c_{\overline{L}}$, $\varphi(c_{\mathbb{M}}) = c_{\mathbb{M}}$. Следовательно, $C_{U(\mathbb{M})}(\overline{L})$ порождается $c_{\mathbb{M}}$, $c_{\overline{L}}$, $\xi(a_1), \dots, \xi(a_7)$.

Элементы $c_M$, $c_L$, $\xi(a_1), \dots, \xi(a_7)$ лежат в универсальной обертывающей $U(M)$, определенной над полем $F$. Их образы в алгебре $U(\overline{M})$, получающейся из $U(M)$ при расширении базового поля до $\overline{F}$, порождают централизатор $C_{U(\overline{M})}(L)$. Следовательно, они порождают централизатор $C_{U(M)}(L)$ и над полем $F$. Итак, достаточно доказать теорему для подалгебры $\mathbb{L}$ в $\mathbb{M}$ над полем $F = \overline{F}$.

Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим случай положительной характеристики. В базисе $e_1, \dots, e_7$ алгебры $\mathbb{M}$ имеем

$$c_{\mathbb{L}} = e_1^2 + e_2^2 + e_4^2 \ \text{ и } \ c_{\mathbb{M}} = e_1^2 + \dots + e_7^2.$$

Заметим, что элемент $c_{\mathbb{L}}$ лежит в ассоциативной обертывающей $U(\mathbb{L})$ и потому обладает ассоциативными степенями, а элементы $c_{\mathbb{M}}$, $\xi(e_1), \dots, \xi(e_7)$ — в центре $U(\mathbb{M})$, стало быть, коммутируют и ассоциируют со всеми степенями $c_{\mathbb{L}}$. Значит, любой полином от элементов $\xi(e_1), \dots, \xi(e_7)$, $c_{\mathbb{L}}$, $c_{\mathbb{M}}$ лежит в $C_{U(\mathbb{M})}(\mathbb{L})$ — централизаторе $\mathbb{L}$ в $U(\mathbb{M})$.

Рассмотрим $c \in C_{U(\mathbb{M})}(\mathbb{L})$, $c \neq 0$. Пусть $r$ — степень $c$ в фильтрации алгебры $U(\mathbb{M})$, т. е. $c \in U_r$, но $c \notin U_{r-1}$, и $\overline{c} = c + U_{r-1}$ — соответствующий элемент в $G(\mathbb{M}) \cong S(\mathbb{M})$. Тогда $\{\overline{c}, \overline{a}\} = [c, a] + U_{r-1} = 0$ для всякого $a \in \mathbb{L}$. Будем доказывать, что любой элемент из

$$C_{S(\mathbb{M})}(\mathbb{L}) = \{z \in S(\mathbb{M}) \mid \forall a \in \mathbb{L} \ \{z, a\} = 0\}$$

является многочленом от $e_1^p, \dots, e_7^p$, $e_1^2+e_2^2+e_4^2$, $e_1^2+\dots+e_7^2 \in S(\mathbb{M})$. Отсюда будет следовать, что для некоторого многочлена $f(x_1, \dots, x_7, y, z) \in F[x_1, \dots, x_7, y, z]$ элемент $c - f(\xi(e_1), \dots, \xi(e_7), c_{\mathbb{L}}, c_{\mathbb{M}})$ лежит в $C_{U(\mathbb{M})}(\mathbb{L})$ и имеет меньшую степень фильтрации. По индукции получим доказательство теоремы.

Для $x, y \in S(\mathbb{M})$ введем отображения $D_x : S(\mathbb{M}) \to S(\mathbb{M})$ и $J_{x,y} : S(\mathbb{M}) \to S(\mathbb{M})$ следующим образом:

$$zD_x = \{z, x\},\ zJ_{x,y} = \{\{z, x\}, y\} - \{\{z, y\}, x\} - \{z, \{x, y\}\}$$

для всех $z \in S(\mathbb{M})$.

Отображения вида $D_x$ являются дифференцированиями по определению обобщенной скобки Пуассона. Отображения вида $J_{x,y}$ получаются из них с помощью коммутирования и взятия линейной комбинации, поэтому также являются дифференцированиями.

Рассмотрим дифференцирования

$$D_{e_1} + \frac{1}{3}J_{e_2,e_4},\ D_{e_2} + \frac{1}{3}J_{e_4,e_1},\ D_{e_4} + \frac{1}{3}J_{e_1,e_2},\ -\frac{1}{3}J_{e_2,e_4},\ -\frac{1}{3}J_{e_4,e_1},\ -\frac{1}{3}J_{e_1,e_2}. \quad (8)$$

Ясно, что $z \in C_{S(\mathbb{M})}(\mathbb{L})$ тогда и только тогда, когда они обращаются в нуль на $z$.

Введем биградуировку на алгебре $S(\mathbb{M})$, присвоив элементам $e_1, e_2, e_4$ степень $(1, 0)$, а элементам $e_3, e_5, e_6, e_7$ — степень $(0, 1)$. При умножении однородных элементов степени складываются покомпонентно. По таблице умножения алгебры $\mathbb{M}$ можно проверить, что отображения $D_x$ для $x \in \mathbb{L}$ сохраняют биградуировку на $S(\mathbb{M})$. Следовательно, ее сохраняют и отображения (8), т. е. можно считать $z$ однородным элементом, например, степени $(k, l)$.

Если $D$ — дифференцирование алгебры $S(\mathbb{M})$, $f \in S(\mathbb{M})$ — произвольный многочлен, то

$$fD = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial f}{\partial e_i}(e_i D).$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно частных производных $\frac{\partial z}{\partial e_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial e_7}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & e_4 & 0 & -e_2 & 0 & 0 & 0 \\ -e_4 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & -e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_7 & 0 & e_6 & -e_5 & -e_3 \\ 0 & 0 & e_5 & 0 & -e_3 & e_7 & -e_6 \\ 0 & 0 & -e_6 & 0 & e_7 & e_3 & -e_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial e_7} \end{pmatrix} = 0. \quad (9)$$

Подставив на место $e_i$ числовые значения из поля $F$: $e_4 = e_7 = 1$, остальные $e_i = 0$, получим, что ранг матрицы в левой части не меньше 5. Первые три строки матрицы линейно зависимы над $S(\mathbb{M})$. Следовательно, ее ранг равен 5. Поэтому любое решение системы будет линейной комбинацией двух линейно независимых решений:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 0 \\ e_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_3 \\ 0 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{pmatrix}.$$

Будем обозначать через $i$ произвольный индекс из множества $I = \{1, 2, 4\}$, а через $j$ — из множества $J = \{3, 5, 6, 7\}$. Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial e_i} = Ae_i, \quad \frac{\partial z}{\partial e_j} = Be_j \tag{10}$$

для всех $i \in I$, $j \in J$ и некоторых $A$, $B$ из поля частных алгебры $S(\mathbb{M})$. Поскольку $Ae_i$ — многочлены при различных $i$, то и $A$ должно быть многочленом, причем, так как $\frac{\partial z}{\partial e_i}$ — однородные элементы степени $(k-1, l)$, а $e_i$ — однородные элементы степени $(1, 0)$, то и $A$ должно быть однородным многочленом степени $(k-2, l)$. Аналогично $B$ — однородный элемент степени $(k, l-2)$. Поскольку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial e_{i_1} \partial e_{i_2}} = \frac{\partial^2 z}{\partial e_{i_2} \partial e_{i_1}},$$

дифференцируя первое из равенств (10), получим

$$\frac{\partial A}{\partial e_{i_1}} e_{i_2} = \frac{\partial A}{\partial e_{i_2}} e_{i_1}. \tag{11}$$

Аналогично, дифференцируя второе, имеем

$$\frac{\partial A}{\partial e_{j_1}} e_i = \frac{\partial B}{\partial e_i} e_{j_1}, \quad \frac{\partial A}{\partial e_{j_2}} e_i = \frac{\partial B}{\partial e_i} e_{j_2},$$

откуда

$$\frac{\partial A}{\partial e_{j_1}} e_{j_2} = \frac{\partial A}{\partial e_{j_2}} e_{j_1}. \tag{12}$$

Условия (11), (12) означают, что вектор $\left(\frac{\partial A}{\partial e_1}, \dots, \frac{\partial A}{\partial e_7}\right)^\top$ является решением системы (9), т. е. $A \in C_{S(\mathbb{M})}(\mathbb{L})$. Аналогично $B \in C_{S(\mathbb{M})}(\mathbb{L})$. Степени элементов $A$ и $B$ меньше, чем степень $z$, поэтому можно считать доказанным, что $A$ и $B$ — многочлены от $e_1^p, \dots, e_7^p$, $c_{\mathbb{L}}$, $c_{\mathbb{M}} \in S(\mathbb{M})$. Так как многочлен $z$ однородный степени $(k, l)$, то

$$kz = \sum_{i \in I} \frac{\partial z}{\partial e_i} e_i = \sum_{i \in I} Ae_i^2 = Ac_{\mathbb{L}}, \quad lz = \sum_{j \in J} \frac{\partial z}{\partial e_j} e_j = \sum_{j \in J} Be_j^2 = B(c_{\mathbb{M}} - c_{\mathbb{L}}).$$

Если $k$ или $l$ не делятся на $p$, то отсюда сразу следует требуемое. Если $k$ и $l$ делятся на $p$, то $A = B = 0$. Тогда из (10) получаем, что все частные производные $\frac{\partial z}{\partial e_i}$, $\frac{\partial z}{\partial e_j}$ равны нулю, а значит, $z$ — многочлен от $e_1^p, \dots, e_7^p$.

Рассуждение сохраняет силу и в случае характеристики нуль, при этом нужно рассматривать многочлены только от $e_1^2 + e_2^2 + e_4^2$, $e_1^2 + \dots + e_7^2$. $\square$

В случае $\operatorname{char} F = 0$ теорема ранее доказана К. А. Шемонаевым (анонс см. в [7]). В качестве следствия из теоремы можно получить известное из [2, 7] описание центра универсальной обертывающей $U(M)$.

**Следствие 1.** *Пусть $F$ — поле, характеристика которого не равна 2, 3, $M$ — простая нелиева алгебра Мальцева над $F$, $a_1, \dots, a_7$ — произвольный базис $M$. Тогда центр $Z(U(M))$ универсальной обертывающей $U(M)$ порождается элементом Казимира $c_M$, если $\operatorname{char} F = 0$, и элементами $c_M$, $\xi(a_1), \dots, \xi(a_7)$, если $\operatorname{char} F > 3$.*

Доказательство. Так же, как и теорему 1, следствие достаточно доказать для алгебры $\mathbb{M}$ над алгебраически замкнутым полем $F$. Сначала рассмотрим случай положительной характеристики. Пусть $c \in Z(U(\mathbb{M}))$, $c \neq 0$, —

ненулевой элемент из центра, $r$ — степень $c$ в фильтрации алгебры $U(\mathbb{M})$, т. е. $c \in U_r$, но $c \notin U_{r-1}$, и $\overline{c} = c + U_{r-1}$ — соответствующий элемент в $G(\mathbb{M}) \cong S(\mathbb{M})$. Тогда $\{\overline{c}, \overline{a}\} = 0$ для всякого $a \in \mathbb{M}$. Обозначим через $A$ подкольцо в $S(\mathbb{M})$, порожденное $c_{\mathbb{M}}$, $e_1^p, \ldots, e_7^p \in S(\mathbb{M})$. Будем доказывать, что любой элемент из

$$Z(S(\mathbb{M})) = \{z \in S(\mathbb{M}) \mid \forall a \in \mathbb{M}\ \{z, a\} = 0\}$$

лежит в кольце $A$. Отсюда будет следовать, что для некоторого многочлена $f(x_1, \ldots, x_7, y) \in F[x_1, \ldots, x_7, y]$ элемент $c - f(\xi(e_1), \ldots, \xi(e_7), c_{\mathbb{M}})$ лежит в $Z(U(\mathbb{M}))$ и имеет меньшую степень фильтрации. По индукции получим доказательство следствия.

Для любых $z \in Z(S(\mathbb{M}))$ имеем $\{z, a\} = 0$ при любом $a \in \mathbb{L}$, следовательно, по теореме 1 $z$ представляется в виде $f(c_{\mathbb{L}})$, где $f \in A[x]$ — некоторый многочлен с коэффициентами из $A$. В кольце $S(\mathbb{M})$ будет $c_{\mathbb{L}}^p = e_1^{2p} + e_2^{2p} + e_4^{2p} \in A$. Поэтому можно считать, что $f$ имеет степень $n < p$. Предположим, что $n \geq 1$. По определению $Z(S(\mathbb{M}))$, $\{f(c_{\mathbb{L}}), e_3\} = 0$. Поскольку $\{\,,\}$ — обобщенная скобка Пуассона, то

$$\{f(c_{\mathbb{L}}), e_3\} = f'(c_{\mathbb{L}})\{c_{\mathbb{L}}, e_3\} = 2f'(c_{\mathbb{L}})(e_1e_7 + e_2e_5 - e_4e_6) = 0.$$

В кольце $S(\mathbb{M})$ нет делителей нуля, поэтому $f'(c_{\mathbb{L}}) = 0$. Тогда $f'(c_{\mathbb{L}})$ снова лежит в $Z(S(\mathbb{M}))$ и можно повторить рассуждение. Делая это $n$ раз, получим $f^{(n)}(c_{\mathbb{L}}) = 0$, т. е. $n!a = 0$, где $a$ — коэффициент при старшем члене $f$. Так как $n < p$, отсюда следует, что $a = 0$; противоречие с тем, что $f$ имеет степень $n$. Следовательно, многочлен $f$ может быть только константой, т. е. $z \in A$.

Рассуждение сохраняет силу и в случае $\operatorname{char} F = 0$, при этом нужно рассматривать кольцо $A$, порожденное только $c_{\mathbb{M}} \in S(\mathbb{M})$, и не накладывать ограничений на степень многочлена $f$. $\square$

## § 4. Случай характеристики 3

Пусть поле $F$ имеет характеристику 3. Как и ранее, будем обозначать через $M$ пространство элементов с нулевым следом в алгебре Кэли — Диксона $O$. Тогда $M$ — алгебра Ли. Действительно, во всякой алгебре справедливо тождество

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = (a, b, c) - (a, c, b) - (b, a, c) + (b, c, a) + (c, a, b) - (c, b, a).$$

Пусть $a, b, c \in M \subseteq O$, $[\,,]_O$ — коммутатор в $O$, $[\,,]_M$ — скобка в $M$ и $J(\,,\,,)_O$, $J(\,,\,,)_M$ — соответствующие якобианы. Поскольку алгебра $O$ альтернативна (см. [9]), имеем

$$J(a, b, c)_O = 6(a, b, c) = 0.$$

При этом

$$[a, b]_O = ab - ba = [a, b]_M - n(a, b) - [b, a]_M + n(b, a) = 2[a, b]_M,$$

т. е.

$$J(a, b, c)_M = \frac{1}{4} J(a, b, c)_O = 0.$$

Как известно из теории алгебр Ли, $M$ имеет ассоциативную универсальную обертывающую $U(M)$ с базисом Пуанкаре — Биркгофа — Витта таким, как в (1), фильтрацией $U_n$ и ассоциированной градуированной алгеброй $G(M) \cong S(M)$ со скобкой Пуассона. В $U(M)$ есть центральный элемент Казимира, в центре

$U(M)$ лежит образ отображения $\xi\colon M \to U(M)$. Результат теоремы 3.5 из [6], дающий описание центра $U(M)$, сохраняется и в характеристике 3 с тем же доказательством. Однако теорема 1 уже не имеет места.

Пусть поле $F$ алгебраически замкнуто. Тогда $M$ имеет базис $e_1,\dots,e_7$ с таблицей умножения (4). Будем обозначать через $L$ подалгебру с базисом $e_1,e_2,e_4$.

**Лемма 5.** *В централизаторе $C_{U(M)}(L)$ алгебры $L$ в $U(M)$ лежат элементы*

$$x = e_1\bigl(e_3^2 - e_5^2 - e_6^2 + e_7^2\bigr) - e_2(e_3e_6 + e_5e_7) - e_4(e_3e_5 - e_6e_7),$$
$$y = e_1(e_5e_3 + e_6e_7) - e_2(e_3e_7 - e_5e_6) + e_4\bigl(e_3^2 - e_5^2 + e_6^2 - e_7^2\bigr),$$
$$z = e_1(e_6e_3 - e_5e_7) + e_2\bigl(e_3^2 + e_5^2 - e_6^2 - e_7^2\bigr) + e_4(e_3e_7 + e_6e_5),$$

*которые не являются многочленами от элементов $c_L, c_M, \xi(e_1),\dots,\xi(e_7)$. Они удовлетворяют уравнениям третьей степени над центром $Z$ алгебры $U(M)$,*

$$x^3 + c_M^2x = \xi(e_1)(\xi(e_3)^2 - \xi(e_5)^2 - \xi(e_6)^2 + \xi(e_7)^2) - \xi(e_2)(\xi(e_3)\xi(e_6) + \xi(e_5)\xi(e_7)) - \xi(e_4)(\xi(e_3)\xi(e_5) - \xi(e_6)\xi(e_7)), \quad (13)$$

$$y^3 + c_M^2y = \xi(e_1)(\xi(e_5)\xi(e_3) + \xi(e_6)\xi(e_7)) - \xi(e_2)(\xi(e_3)\xi(e_7) - \xi(e_5)\xi(e_6)) + \xi(e_4)(\xi(e_3)^2 - \xi(e_5)^2 + \xi(e_6)^2 - \xi(e_7)^2), \quad (14)$$

$$z^3 + c_M^2z = \xi(e_1)(\xi(e_6)\xi(e_3) - \xi(e_5)\xi(e_7)) + \xi(e_2)(\xi(e_3)^2 + \xi(e_5)^2 - \xi(e_6)^2 - \xi(e_7)^2) + \xi(e_4)(\xi(e_3)\xi(e_7) + \xi(e_6)\xi(e_5)), \quad (15)$$

*а также соотношениям*

$$[x,y] = c_Mz, \quad [y,z] = c_Mx, \quad [z,x] = c_My, \quad (16)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = c_L(c_M - c_L)^2 - c_L(c_M + c_L). \quad (17)$$

*Для элементов Казимира $c_L, c_M$ алгебр $L$ и $M$ имеют место равенства*

$$c_L^3 - c_L^2 = \xi(e_1)^2 + \xi(e_2)^2 + \xi(e_4)^2, \quad c_M^3 - c_M^2 = \xi(e_1)^2 + \dots + \xi(e_7)^2.$$

Доказательство. Утверждения леммы проверены в программе *PBW*, предоставленной автору П. С. Колесниковым. ☐

Пусть $Z_0$ — подкольцо в центре $Z$ алгебры $U(M)$, порожденное $\xi(e_1),\dots,\xi(e_7)$. Алгебра $U(M)$ не имеет делителей нуля, поэтому $Z_0$ — область целостности. Пусть $F_{Z_0}$ — поле частных $Z_0$ и $D(M) = U(M)\otimes_{Z_0} F_{Z_0}$. Универсальная обертывающая $U(M)$ — свободный модуль над $Z_0$ с образующими $e_1^{i_1}\dots e_7^{i_7}$, $0 \le i_1,\dots,i_7 \le 2$, поэтому $D(M)$ — алгебра размерности $3^7$ над полем $F_{Z_0}$. Алгебра $D(M)$ так же, как $U(M)$, не имеет делителей нуля, поэтому является телом.

Пусть $F_Z$ — поле частных $Z$. Тогда $D(M) \cong U(M)\otimes_Z F_Z$, $F_Z$ — центр $D(M)$. По лемме 5 элемент Казимира $c_M$ имеет степень 3 над $F_{Z_0}$, следовательно, $F_Z = F_{Z_0}(c_M)$ имеет размерность 3 над $F_{Z_0}$, поэтому алгебра $D(M)$ имеет размерность $3^6$ над своим центром.

В дальнейшем, будем рассматривать $D(M)$ как алгебру над $F_Z$ и называть *подалгебрами* $D(M)$ только подкольца, содержащие $F_Z$.

Пусть $D(L)$ — подалгебра в $D(M)$, порожденная $L$. Пусть $B$ — подалгебра в $D(M)$, порожденная элементами $c_L, x, y, z$. Так как $D(M)$ — конечномерное тело, $D(L)$ и $B$ — тела. Элемент Казимира $c_L$ не лежит в $F_Z$, по лемме 5 он имеет степень 3 над $F_{Z_0}$, поэтому $\dim_{F_Z} F_Z(c_L) = 3$.

Алгебра $D(M)$ является векторным пространством над любым своим подтелом, поэтому подтела $D(M)$ имеют размерности вида $3^n$.

**Лемма 6.** *Центр алгебры $B$ равен $F_Z(c_L)$, и $B$ имеет размерность $3^3$ над $F_Z$.*

Доказательство. Из равенств (13)–(16) следует, что $B$ как векторное пространство над полем $F_Z(c_L)$ порождается элементами $x^i y^j z^k$, $0 \le i, j, k \le 2$, причем соотношение (17) показывает, что они не линейно независимы над $F_Z(c_L)$. Значит, $\dim_{F_Z(c_L)}(B) < 3^3$, а $\dim_{F_Z}(B) < 3^4$.

Поскольку $F_Z(c_L)$ содержится в центре $B$, центр $B$ имеет размерность не меньше 3 над $F_Z$. Алгебра $B$ является конечномерной простой, поэтому она имеет размерность $n^2$ над своим центром для некоторого $n$. Так как $B$ не совпадает со своим центром, остается единственная возможность: центр алгебры $B$ равен $F_Z(c_L)$ и $B$ имеет размерность $3^3$ над $F_Z$. $\square$

Аналогичное рассуждение можно провести для алгебры $D(L)$. Действительно, в алгебре $O = O(-1, -1, -1)$ выполнено $e_i^3 = -e_i$, поэтому в $M$ имеем $e_i^{[3]} = -e_i$, а в универсальной обертывающей $U(M)$ будет $e_i^3 + e_i = \xi(e_i)$. Значит, $e_1, e_2, e_4$ имеют степень 3 над $F_{Z_0}$ и, следовательно, над $F_Z(c_L)$. При этом элементы $e_1^i e_2^j e_4^k$, $0 \le i, j, k \le 2$, линейно зависимы над $F_Z(c_L)$, так как

$$e_1^2 + e_2^2 + e_4^2 = c_L.$$

Действуя далее, как в лемме 6, получаем, что $D(L)$ имеет центр $F_Z(c_L)$ и размерность $3^3$ над $F_Z$.

Обозначим через $A$ централизатор алгебры $D(L)$ в $D(M)$. Тогда $A$ — подтело в $D(M)$. Как отмечено ранее, элементы $c_L, x, y, z$ коммутируют с элементами из $L$, поэтому $B$ содержится в $A$.

**Лемма 7.** *Тела $A$ и $B$ совпадают.*

Доказательство. Ясно, что $Z(D(L)) \subseteq A$. Поэтому $Z(D(L)) \subseteq Z(A)$. Пусть $C(A)$ — централизатор тела $A$ в $D(M)$. Тогда по теореме о двойном централизаторе он равен $D(L)$. Центр $Z(A)$ алгебры $A$ лежит в $C(A)$. При этом элементы из $Z(A)$ коммутируют с элементами из $D(L)$, т. е. $Z(A) \subseteq Z(D(L))$. Значит, $Z(A) = F_Z(c_L)$.

Предположим, что $A \supsetneq B$. Тогда $\dim_{F_Z} A \ge 3^4$. Тело $A$ имеет размерность $n^2$ над своим центром, поэтому его размерность над $F_Z$ может быть равна только $3^5$. Рассмотрим тело $A(e_1)$, полученное добавлением $e_1$ к $A$. Элемент $e_1$ не лежит в $A$, поэтому $A(e_1)$ строго содержит $A$, т. е. $A(e_1) = D(M)$. При этом элемент $e_1$ коммутирует с любым элементом из $A$. Так как он имеет степень 3 над $F_Z$, любой элемент из $A(e_1)$ имеет вид $a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_1^2$ для некоторых $a_0, a_1, a_2 \in A$. Элемент $e_3$ лежит в $A(e_1)$, следовательно, в $U(M)$ имеет место соотношение

$$f e_3 = c_0 + c_1 e_1 + c_2 e_1^2 \tag{18}$$

для некоторых $f \in Z$, $c_0, c_1, c_2 \in C_{U(M)}(L)$, причем $f \ne 0$. Прокоммутируем обе части (18) с $e_1$, получим

$$-f e_7 = 0.$$

В $U(M)$ нет делителей нуля; пришли к противоречию. Значит, $A = B$. $\square$

**Теорема 2.** *Существует ненулевой элемент $f \in Z_0$ такой, что $f C_{U(M)}(L)$ содержится в $S$, где $S$ — $Z_0$-подалгебра в $U(M)$, порожденная элементами $c_M, c_L, x, y, z$.*

Доказательство. Кольцо $Z_0$ является кольцом многочленов над полем $F$ от конечного числа переменных, поэтому оно нётерово. Централизатор

$C_{U(M)}(L)$ — подмодуль в конечно порожденном $Z_0$-модуле $U(M)$, тем самым он порождается некоторым конечным набором элементов $u_1, \dots, u_n$ как $Z_0$-модуль. Образы элементов $u_i$ в алгебре $D(M)$ принадлежат телу $B$, порожденному элементами $c_M, c_L, x, y, z$ над $F_{Z_0}$, поэтому в $D(M) = U(M) \otimes_{Z_0} F_{Z_0}$ имеем

$$u_i \otimes 1 = \sum_j v_{ij} \otimes a_{ij}$$

для некоторых $v_{ij} \in S$, $a_{ij} \in F_{Z_0}$. Приводя дроби $a_{ij}$ к общему знаменателю и перебрасывая их числители на левую сторону тензорного произведения, получаем

$$u_i \otimes 1 = v_i \otimes \frac{1}{f_i},$$

где $v_i \in S$, $f_i \in Z_0$. Положим $f = f_1 \dots f_n$, $g_i = \frac{f}{f_i} \in Z_0$. Тогда

$$fu_i \otimes 1 = g_i v_i \otimes \frac{f_i}{f_i} = g_i v_i \otimes 1,$$

т. е. $fu_i = g_i v_i \in S$. Поскольку $u_1, \dots, u_n$ порождают $C_{U(M)}(L)$ как $Z_0$-модуль, $fC_{U(M)}(L) \subseteq S$. $\square$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю В. Н. Желябину за постоянное внимание к работе, а также П. С. Колесникову за предоставление программы *PBW* для вычислений в универсальных обертывающих алгебр Ли и Мальцева.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Мальцев А. И.* Аналитические лупы // Мат. сб. 1955. Т. 36, № 3. С. 569–576.
2. *Pérez-Izquierdo J. M., Shestakov I. P.* An envelope for Malcev algebras // J. Algebra. 2004. V. 272, N 1. P. 379–393.
3. *Кузьмин Е. Н.* Алгебры Мальцева и их представления // Алгебра и логика. 1968. Т. 7, № 4. С. 48–69.
4. *Желябин В. Н., Шестаков И. П.* Теоремы Шевалле и Константа для алгебр Мальцева // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 560–584.
5. *Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р.* Неприводимые представления простой трехмерной алгебры над полем конечной характеристики // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 439–454.
6. *Pérez-Izquierdo J. M., Shestakov I. P.* On the center of the universal enveloping algebra of the central simple non-Lie Maltsev algebra in characteristic $p$ // Proc. Jordan structures in algebra and analysis meeting. Almeria: Editorial Circulo Rojo, 2010. P. 227–242.
7. *Шемонаев К. А.* Централизаторы трехмерных простых подалгебр Ли в универсальной обертывающей семимерной простой алгебры Мальцева: Тез. докл. // Мальцевские чтения. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2009. С. 140.
8. *Moradni P. J., Pérez-Izquierdo J. M., Pumplün S.* On the tensor product of composition algebras // J. Algebra. 2001. V. 243. P. 41–68.
9. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
10. *Хамфрис Дж.* Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.

*Статья поступила 28 июня 2012 г.*

Шабалин Тимофей Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
shabalin.timofey@gmail.com