Сибирский математический журнал
Июль—август, 2013. Том 54, № 4

УДК 515.17+517.545

ОДНОЗНАЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ДИВИЗОРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА

М. И. Тулина

Аннотация. Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности нашла многочисленные приложения в теории функций, аналитической теории чисел и уравнениях математической физики. Дано полное конструктивное описание дивизоров элементарных абелевых дифференциалов целых порядков для всех трех родов, голоморфно зависящих от модулей компактных римановых поверхностей F. Исследовано расположение нулей голоморфных дифференциалов Прима на F, а также строение множества (мультипликативно) специальных дивизоров на F в пространствах F_{g-1} и F_{g-2}.

Ключевые слова: дифференциал Прима, дивизор, абелев дифференциал, компактная риманова поверхность, характер.

Введение

Теория однозначных (абелевых) дифференциалов (характер $\rho \equiv 1$) имеет ряд принципиальных отличий от теории дифференциалов с произвольными характерами ($\rho \neq 1$) [1]. Кроме того, однозначные дифференциалы (особенно случаи для порядков $q = 1$ и $q = 2$) даже на фиксированной поверхности уже нашли многочисленные приложения в уравнениях математической физики, при алгебро-геометрическом интегрировании нелинейных уравнений в [2] и в теоретической физике, а также в аналитической теории чисел в [3–5].

Для построения общей теории однозначных и мультипликативных дифференциалов большую роль играют так называемые элементарные дифференциалы любого порядка, имеющие минимальное количество полюсов и голоморфно зависящие от модулей $[\mu]$ компактных римановых поверхностей F_μ. В настоящей работе впервые дано полное конструктивное описание дивизоров элементарных абелевых дифференциалов целых порядков для всех трех родов. Исследуется расположение нулей голоморфных дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности F, а также строение множества (мультипликативно) специальных дивизоров на F в пространствах F_{g-1} и F_{g-2}. Кроме того, аналогичные вопросы изучаются для пространств (ρ, q)-дифференциалов Прима при любом характере ρ на F.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–90709), АВЦП (2.1.1.3707), а также ФЦП (№ 02.740.11.0457).

§ 1. Предварительные сведения

Пусть F — фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$ с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 — риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F. По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, такая, что U/Γ конформно эквивалентна F_0, Γ изоморфна $\pi_1(F)$, и эта группа имеет представление $\Gamma = \left\langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g : \prod\limits_{j=1}^{g} A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1} = I \right\rangle$ [6].

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0, т. е. выражением вида $\mu(z)d\bar{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0, где $\mu(z)$ — комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ. Пусть $M(F)$ — множество всех комплексно-аналитических структур на F с топологией C^∞ сходимости на F_0, $\mathrm{Diff}_0(F)$ — группа всех сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов, гомотопных тождественному диффеоморфизму на F_0. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbb{T}_g(F) = \mathbb{T}_g(F_0)$ — фактор-пространство $M(F)/\,\mathrm{Diff}_0(F)$ [3, 6].

Так как отображение $U \to F_0 = U/\Gamma$ — локальный диффеоморфизм, любой дифференциал Бельтрами μ на F_0 поднимается до Γ-дифференциала Бельтрами μ на U, т. е. $\mu \in L_\infty(U)$, $\|\mu\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{z \in U} |\mu(z)| < 1$, и $\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(z)$, $z \in U$, $T \in \Gamma$.

Если Γ-дифференциал μ на U продолжить на $\overline{\mathbb{C}} \backslash U$, положив $\mu = 0$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\overline{z}} = \mu(z) w_z$. Отображение $T \to T_\mu = w^\mu T (w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ на квазифуксову группу $\Gamma_\mu = w^\mu \Gamma (w^\mu)^{-1}$ [6].

Классические результаты Альфорса, Берса [6] и других авторов утверждают, что (1) $\mathbb{T}_g(F)$ является комплексным многообразием размерности $3g-3$ при $g \geq 2$; (2) $\mathbb{T}_g(F)$ имеет единственную комплексно-аналитическую структуру такую, что естественное отображение $\Phi : M(F) \to M(F)/\,\mathrm{Diff}_0(F) = \mathbb{T}_g(F)$ будет голоморфным и при этом Φ имеет только локальные голоморфные сечения; (3) элементы из Γ_μ голоморфно зависят от $[\mu]$. Естественно, что выбор образующих $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F)$ эквивалентен выбору системы образующих $\left\{a_k^\mu, b_k^\mu\right\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F_\mu)$ и $\left\{A_j^\mu, B_j^\mu\right\}_{j=1}^g$ в Γ_μ для любого $[\mu]$ из $\mathbb{T}_g$. Отсюда получим отождествления $M(F)/\,\mathrm{Diff}_0(F) = \mathbb{T}_g(F) = \mathbb{T}_g(\Gamma)$. При этом имеем взаимно однозначное соответствие между классами дифференциалов Бельтрами $[\mu]$, классами конформно эквивалентных отмеченных римановых поверхностей $\left[F_\mu; \left\{a_k^\mu, b_k^\mu\right\}_{k=1}^g\right]$ и отмеченными квазифуксовыми группами Γ_μ [6].

Универсальное многообразие Якоби рода g — расслоенное пространство над $\mathbb{T}_g$, слой которого над $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ является многообразием Якоби $J(F_\mu)$ для поверхности F_μ [7].

В [6, с. 99] для любого фиксированного $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ построены голоморфные на F_μ абелевы дифференциалы $\zeta_1[\mu], \dots, \zeta_g[\mu]$, которые образуют канонический базис на F_μ, двойственный к каноническому гомотопическому базису $\left\{a_k^\mu, b_k^\mu\right\}_{k=1}^g$ на F_μ. Этот базис голоморфно зависит от модулей $[\mu]$ отмеченной компактной римановой поверхности F_μ. Кроме того, матрица b-периодов

$\Omega(\mu) = (\pi_{jk}[\mu])_{j,k=1}^{g}$ на F_μ состоит из комплексных чисел

$$\pi_{jk}[\mu] = \int\limits_{\xi}^{B_k^\mu(\xi)} \zeta_j([\mu], w)\, dw, \quad \xi \in w^\mu(U)$$

и голоморфно зависит от $[\mu]$.

Для любых фиксированных $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ и $\xi_0 \in w^\mu(U)$ определим классическое отображение Якоби $\varphi : w^\mu(U) \to \mathbb{C}^g$ по правилу

$$\varphi_j(\xi) = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \zeta_j([\mu], w)\, dw, \quad j = 1, \dots, g.$$

Тогда φ индуцирует послойное голоморфное вложение из F_μ в $J(F_\mu)$.

Далее, для любого натурального числа $n > 1$ существует расслоенное пространство над $\mathbb{T}_g$, у которого слой над $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ есть пространство всех целых дивизоров степени n на компактной римановой поверхности F_μ. Голоморфные сечения этого расслоения определяют на каждой F_μ целый дивизор D^μ степени n, который голоморфно зависит от $[\mu]$. Также существует голоморфное отображение φ_n из этого расслоения на универсальное расслоение Якоби, $n \geq 1$, ограничение которого на слои является продолжением классического отображения Якоби $\varphi : F_\mu \to J(F_\mu)$. Известно, что для $n = g$ отображение $\varphi : F_g[\mu] \backslash F_g^1[\mu] \to W_g[\mu] \backslash W_g^1[\mu]$ является аналитическим изоморфизмом, где $F_g[\mu]$ — g-кратное симметрическое произведение поверхности F_μ и $W_g^1[\mu] = \varphi\big(F_g^1[\mu]\big)$ — имеет комплексную размерность, не превышающую $g - 2$ [6, 3]. Локальные голоморфные сечения этих расслоений над окрестностью $U([\mu_0]) \subset \mathbb{T}_g$ можно получить (для любого $n \geq 1$) из локальных голоморфных сечений Эрла s для $\Phi : M(F) \to \mathbb{T}_g$ над $U([\mu_0])$ [7].

Характером ρ для F_μ называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F_\mu), \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Характер единственным образом задается упорядоченным набором $\big(\rho\big(a_1^\mu\big), \rho\big(b_1^\mu\big), \dots, \rho\big(a_g^\mu\big), \rho\big(b_g^\mu\big)\big) \in (\mathbb{C}^*)^{2g}$.

Определение 1.1. *q-Дифференциалом Прима* относительно квазифуксовой группы Γ_μ для ρ, или *(ρ, q)-дифференциалом на* F_μ, называется дифференциал $\phi = \phi(z)dz^q$ такой, что $\phi(Tz)(T'z)^q = \rho(T)\phi(z)$, $z \in w^\mu(U)$, $T \in \Gamma_\mu$, $\rho : \Gamma_\mu \to \mathbb{C}^*$. В частности, при $m = 0$ это мультипликативная функция относительно Γ_μ для ρ.

Если f_0 — мультипликативная функция на F_μ для ρ без нулей и полюсов, то

$$f_0([\mu], P) = \exp \int\limits_{P_0[\mu]}^{P} 2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu], \rho)\zeta_j([\mu]),$$

где $P_0[\mu] = f^{s[\mu]}(P_0) \in F_\mu$, $c_j([\mu], \rho) \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, g$, c_j зависят голоморфно от $[\mu]$ и от ρ. При этом интегрирование ведется от фиксированной $P_0[\mu]$ до текущей P на переменной поверхности F_μ и $s[\mu]$ — сечение Эрла [7] над $U([\mu_0]) \subset \mathbb{T}_g$. Характер ρ для f_0 имеет вид [3]

$$\rho\big(a_k^\mu\big) = \exp 2\pi i c_k([\mu], \rho), \quad \rho\big(b_k^\mu\big) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu], \rho)\pi_{jk}([\mu])\right), \quad k = 1, \dots, g.$$

Такие характеры ρ будем называть *несущественными*, а f_0 (с таким характером) — *единицей*. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ группу всех характеров на Γ с естественным умножением. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в группе $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$.

Определение 1.2. Дифференциал Прима ϕ класса C^1 на $F = U/\Gamma$ для ρ называется *мультипликативно точным*, если $\phi = df(z)$ и $f(Tz) = \rho(T)f(z)$, $T \in \Gamma$, $z \in U$, т. е. f — мультипликативная функция на F класса C^2 для ρ.

Дивизором на F_μ назовем формальное произведение $D = P_1^{n_1} \dots P_k^{n_k}$, $P_j \in F_\mu$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, k$.

Теорема (Римана — Роха для характеров) [3, 4]. *Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера ρ верно равенство $r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D)$.*

Теорема (Абеля для характеров) [3, 4]. *Пусть D — дивизор на отмеченной переменной компактной римановой поверхности $\left[F_\mu, \left\{a_1^\mu, \dots, a_g^\mu, b_1^\mu, \dots, b_g^\mu\right\}\right]$ рода $g \geq 1$ и ρ — характер на $\pi_1(F_\mu)$. Тогда D будет дивизором мультипликативной функции f на F_μ для характера ρ, если и только если $\deg D = 0$ и*

$$\varphi(D) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g} \log\rho\big(b_j^\mu\big) e^{(j)}[\mu] - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g} \log\rho\big(a_j^\mu\big) \pi^{(j)}[\mu] \quad (= \psi(\rho, [\mu]))$$

в $\mathbb{C}^g$ по модулю целочисленной решетки $L(F_\mu)$, порожденной столбцами $e^{(1)}[\mu]$, $\dots, e^{(g)}[\mu]$, $\pi^{(1)}[\mu], \dots, \pi^{(g)}[\mu]$ матрицы a^μ- и b^μ-периодов на F_μ, где $\varphi[\mu]$ — отображение Якоби из F_μ в многообразие Якоби $J(F_\mu)$.

Отметим, что по теореме Берса [6, с. 99] отображение ψ зависит локально голоморфно от ρ и $[\mu]$.

§ 2. Однозначные элементарные дифференциалы

В этом параграфе будет найден общий вид элементарных однозначных q-дифференциалов на F_μ.

Теорема 2.1. *На переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ для любых точки $Q_1 \in F_\mu$ и натурального числа $q > 1$ существует элементарный q-дифференциал τ_{q,Q_1} третьего рода с единственным простым полюсом $Q_1 = Q_1[\mu]$ на F_μ, локально голоморфно зависящий от $[\mu]$, у которого общий вид дивизора $(\tau_{q,Q_1}) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q_1}$, где $\varphi(R_1 \dots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q_1) - \varphi(R_{g+1} \dots R_N)$ в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. При этом точки $R_{g+1}, \dots, R_N$ выбираются как локально голоморфное сечение расслоения целых дивизоров степени $N - g$ над $\mathbb{T}_g$, где $N = (2g-2)q + 1$ и $Q_1[\mu]$ — локально голоморфное сечение дивизоров степени 1 на F_μ для $[\mu]$ из любой односвязной окрестности $U[\mu_0] \subset \mathbb{T}_g$.*

Доказательство. Пусть $q > 1$. Тогда по теореме Римана — Роха для q-дифференциалов имеем $i_q(D) = (2q-1)(g-1) - \deg D + r\big(\frac{Z^{q-1}}{D}\big)$, где Z_μ^{q-1} — канонический класс дивизоров абелевых $(q-1)$-дифференциалов на F_μ, и $i_q(1) = (2q-1)(g-1)$. Поэтому $i_q\big(\frac{1}{Q_1}\big) = i_q(1) + 1 + r(Z^{q-1}Q_1)$. Таким образом, $i_q\big(\frac{1}{Q_1}\big) = i_q(1) + 1$, так как $\deg(Z^{q-1}Q_1) = (q-1)(2g-2) + 1 > 0$. Следовательно, существует q-дифференциал τ_{q,Q_1} на F_μ с единственным полюсом в Q_1 точно порядка один при $q > 1$.

Такой q-дифференциал τ_{q,Q_1} можно задать в виде $\tau_{q,Q_1} = f\omega_0^q$ и

$$(\tau_{q,Q_1}) = \frac{R_1 \dots R_N}{(\omega_0)^q Q_1}(\omega_0)^q, \quad (f) = \frac{R_1 \dots R_N}{(\omega_0)^q Q_1},$$

где $N = q(2g-2)+1$ и точка Q_1 не принадлежит дивизору (ω_0). Отсюда по теореме Абеля [3, с. 67] получаем равенство

$$\varphi_{P_0}(R_1 \dots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi_{P_0}(Q_1) - \varphi_{P_0}(R_{g+1} \dots R_N) \tag{1}$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$ для F_μ, где $K[\mu]$ — вектор констант Римана, голоморфно зависящий от модулей римановых поверхностей F_μ и от выбора базисной точки P_0, а также зависящий от канонического базиса a_j^μ, b_j^μ, $j = 1, \dots, g$, петель на F_μ. Предыдущее уравнение понимаем как равенство в переменном Якобиане $J(F_\mu)$, т. е. в слое из универсального расслоения Якоби, лежащем над отмеченной поверхностью F_μ.

Таким образом, для определения нулей имеем $N - g = 1 + (2g-2)q - g \geq g$ свободных параметров, выбираемых произвольно на F_μ и локально голоморфно зависящих от $[\mu]$. По теореме Эрла [2, 7] можно выбрать дивизор из точек $R_{g+1}, \dots, R_N$, отличных от точки Q_1 на F_μ, как локально голоморфное сечение для расслоения целых дивизоров степени $N-g$ над пространством Тейхмюллера $\mathbb{T}_g$.

Решая проблему обращения Якоби в универсальном расслоении Якоби над $\mathbb{T}_g$, найдем дивизор $R_1 \dots R_g$ на F_μ, который будет единственным решением уравнения (1), так как правая сторона может быть выбрана не принадлежащей $W_g^1[\mu] \subset J(F_\mu)$. Размерность этого подмножества не превышает $g-2$, но $N - g > g - 2$ при наших условиях. При этом можно получить, что точки $R_1, \dots, R_g$ отличны от точки Q_1 и голоморфно зависят от наших параметров, так как правая сторона (1) была выбрана голоморфно зависящей от $[\mu]$. Действительно, пусть $R_1 = Q_1$, тогда имеем равенство $\varphi(R_2 \dots R_g) = -2Kq - \varphi(R_{g+1} \dots R_{2g-1} R_{2g} \dots R_N)$. Рассмотрим дивизор $D = R_2 \dots R_g R_{g+1} \dots R_{2g-1}$ степени $2g-2$ с $g-1$ свободными точками $R_{g+1}, \dots, R_{2g-1}$. По теореме о свободных точках [3] имеем неравенство $g - 1 + 1 \leq r\left(\frac{1}{D}\right) = 2g - 2 - g + 1 + i(D)$ и $i(D) \geq 1$. Поэтому существует ненулевой голоморфный абелев дифференциал ω на F_μ такой, что $(\omega) \geq D$, а значит, $(\omega) = D$. Отсюда получаем, что $\varphi(D) = -2K$. Предыдущее равенство перепишется в другом виде: $-2K(1-q) = \varphi(R_{2g} \dots R_{q(2g-2)+1})$. Заметим, что $N - (2g-1) \geq 2g - 2 \geq 2$ при $q > 1$ и $g > 1$. Множество, заданное выражением слева, нульмерно, а справа не менее, чем двумерно. Следовательно, можно выбрать точки $R_{2g}, \dots, R_{q(2g-2)+1}$ так, чтобы это соотношение не выполнялось в многообразии Якоби $J(F_\mu)$; противоречие. Поэтому точка Q_1 действительно полюс первого порядка на F_μ. Теорема доказана.

Найдем общий вид однозначного q-дифференциала $\omega = \tau_{q,Q_1Q_2}$ третьего рода, имеющего точно два простых полюса в точках $Q_1 = Q_1[\mu]$ и $Q_2 = Q_2[\mu]$ на F_μ, голоморфно зависящего от параметров.

Теорема 2.2. *На переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ для любого натурального числа $q > 1$ существует элементарный q-дифференциал τ_{q,Q_1Q_2} третьего рода точно с простыми полюсами $Q_1 = Q_1[\mu]$, $Q_2 = Q_2[\mu] \in F_\mu$, локально голоморфно зависящий от $[\mu]$, у которого общий вид дивизора $(\tau_{q,Q_1Q_2}) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q_1Q_2}$, где $\varphi(R_1 \dots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q_1Q_2) -$*

$\varphi(R_{g+1}\dots R_N)$. *При этом точки* $R_{g+1},\dots,R_N$ *выбираются как локально голоморфное сечение расслоения целых дивизоров степени* $N-g$ *над* $\mathbb{T}_g$, $N=(2g-2)q+2$, *и* $Q_1=Q_1[\mu]$, $Q_2=Q_2[\mu]$ — *локально голоморфные сечения дивизоров степени* 1 *на* F_μ *для* $[\mu]$ *из любой односвязной окрестности* $U[\mu_0]\subset\mathbb{T}_g$.

Доказательство. Для $q>1$ такие дифференциалы τ_{q,Q_1Q_2} можно получить в виде $\tau=f\omega_0^q$, где f — однозначная функция, имеющая дивизор $(f)=\frac{R_1\dots R_N}{(\omega_0)^qQ_1Q_2}$, здесь $N=(2g-2)q+2$ и

$$\varphi(R_1\dots R_g)=-2K[\mu]q+\varphi(Q_1Q_2)-\varphi(R_{g+1}\dots R_N). \tag{2}$$

Дивизор $R_1\dots R_g$ будет единственным решением уравнения (2), если правая сторона не принадлежит $W_g^1[\mu]$. При этом можно сделать так, чтобы $R_j\neq Q_1,Q_2$, $j=g+1,\dots,N$. Кроме того, точки $R_1,\dots,R_g$ можно выбрать отличными от точек Q_1,Q_2. Докажем это от противного.

1. Пусть $R_1=Q_1$. Тогда $\varphi(R_2\dots R_g)=-2K[\mu]q+\varphi(Q_2)-\varphi(R_{g+1}\dots R_N)$. Рассмотрим дивизор $D=R_2\dots R_gR_{g+1}\dots R_{2g-1}$ степени $2g-2$ с $g-1$ свободными точками $R_{g+1},\dots,R_{2g-1}$. По теореме о свободных точках получаем неравенство $i(D)\geq 1$. Поэтому $\varphi(D)=-2K$. Предыдущее равенство перепишется в другом виде: $-2K(q-1)+\varphi(Q_2)=\varphi(R_{2g}\dots R_{q(2g-2)+2})$. Заметим, что $N-(2g-1)\geq 2g-1\geq 3$ при $q>1$ и $g>1$. Следовательно, можно выбрать точки $R_{2g},\dots,R_{q(2g-2)+2}$ так, чтобы это соотношение не выполнялось в многообразии Якоби $J(F_\mu)$; противоречие. Поэтому точка Q_1 будет действительно полюс первого порядка на F_μ.

2. Пусть $R_1=Q_1,R_2=Q_2$. Тогда $\varphi(R_3\dots R_g)=-2K[\mu]q-\varphi(R_{g+1}\dots R_N)$. Рассмотрим дивизор $D=R_3\dots R_gR_{g+1}\dots R_{2g}$ степени $2g-2$ с $g-1$ свободными точками $R_{g+1},\dots,R_{2g-1}$. По теореме о свободных точках снова имеем неравенство $i(D)\geq 1$. Поэтому $\varphi(D)=-2K$. Предыдущее равенство перепишется в другом виде: $-2K(q-1)=\varphi(R_{2g+1}\dots R_{q(2g-2)+2})$. Заметим, что $N-2g\geq 2g-2\geq 2$ при $q>1$ и $g>1$. Следовательно, можно выбрать точки $R_{2g+1},\dots,R_{q(2g-2)+2}$ так, чтобы это соотношение не выполнялось в многообразии Якоби $J(F_\mu)$; противоречие. Поэтому точки Q_1,Q_2 будут действительно полюсами первого порядка на F_μ. Теорема доказана.

Найдем общий вид q-дифференциалов $\tau_{q,Q}^{(m)}$ с единственным полюсом $Q=Q[\mu]$ точно порядка $m\geq 2$ на F_μ при $q>1$.

При $m\geq 2$ по теореме Римана — Роха для q-дифференциалов на F_μ [4] найдем размерность

$$i_q\left(\frac{1}{Q^m}\right)=\dim_{\mathbb{C}}\Omega^q\left(\frac{1}{Q^m}\right)=(g-1)(2q-1)-\deg D+r\left(\frac{Z_\mu^{q-1}}{D}\right),$$

где $D=\frac{1}{Q^m}$. Отсюда $i_q\big(\frac{1}{Q^m}\big)=(g-1)(2q-1)+m\geq 5$. Здесь $r\big(\frac{Z_\mu^{q-1}}{D}\big)=0$, так как $\deg\frac{Z_\mu^{q-1}}{D}>0$ при наших условиях. Действительно, $\deg Z_\mu^{q-1}=(q-1)(2g-2)>0$ и $\deg\big(\frac{1}{D}\big)=m>0$. Это можно доказать другим способом, от противного. Если существует функция h на F_μ с условием $(h)\geq Q^mZ_\mu^{q-1}$, то $0=\deg(h)\geq\deg Q^mZ_\mu^{q-1}\geq 3$; противоречие.

Так как $\deg Z_\mu^{q-1}Q^{m-1}=(q-1)(2g-2)+m-1\geq 1>0$, имеем

$$i_q\left(\frac{1}{Q^{m-1}}\right)=(g-1)(2q-1)-\deg\left(\frac{1}{Q^{m-1}}\right)+r\big(Z_\mu^{q-1}Q^{m-1}\big)=(g-1)(2q-1)+m-1.$$

Следовательно, $i_q\left(\frac{1}{Q^m}\right) = i_q\left(\frac{1}{Q^{m-1}}\right) + 1$. Значит, существует q-дифференциал $\tau_{q,Q}^{(m)}$ с полюсом точно порядка m в точке Q на F_μ, т. е. $\left(\tau_{q,Q}^{(m)}\right) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q^m}$ на F_μ, $R_j \neq Q$, $j = 1, \dots, N$, где $N = (2g-2)q + m$.

Построим такие дифференциалы в явном виде: $\tau = \tau_{q,Q}^{(m)} = f\omega_0^q$, где ω_0 — голоморфный дифференциал, голоморфно зависящий от $[\mu]$, и Q не принадлежит (ω_0). Такие однозначные функции f имеют дивизор

$$(f) = \frac{R_1 \dots R_{(2g-2)q}\widetilde{R}_1 \dots \widetilde{R}_m}{(\omega_0)^q Q^m} = \frac{R_1 \dots R_N}{Q_1^q \dots Q_{2g-2}^q Q^m}.$$

По теореме Абеля [4, с. 67] получаем уравнение $\varphi[\mu](R_1 \dots \widetilde{R}_m) - \varphi[\mu](Q^m) = -2K[\mu]q$ в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. Отсюда

$$\varphi(R_1 \dots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) - \varphi(R_{g+1} \dots \widetilde{R}_m). \tag{3}$$

Если правая сторона не принадлежит $W_g^1[\mu]$, то имеем единственный дивизор $R_1 \dots R_g$, являющийся решением уравнения (3) [3].

Таким образом, для определения нулей имеем $N - g = m + (2g-2)q - g \geq g$ свободных параметров, выбираемых произвольно на F_μ и локально голоморфно зависящих от $[\mu]$. По теореме Эрла [7] можно выбрать дивизор из точек $R_{g+1}, \dots, \widetilde{R}_m$, отличных от точки Q на F_μ, как локально голоморфное сечение для расслоения целых дивизоров степени $N-g$ над пространством Тейхмюллера $\mathbb{T}_g$.

Решая проблему обращения Якоби в универсальном расслоении Якоби над $\mathbb{T}_g$, найдем дивизор $R_1 \dots R_g$ на F_μ, который будет единственным решением уравнения (3), так как правая сторона может быть выбрана не принадлежащей $W_g^1[\mu] \subset J(F_\mu)$. Размерность этого подмножества не превышает $g-2$, но $N - g > g - 2$ при наших условиях. При этом можно получить, что точки $R_1, \dots, R_g$ отличны от точки Q и голоморфно зависят от параметров, так как правая сторона (3) была выбрана голоморфно зависящей от $[\mu]$. Пусть $R_1 = Q$. Тогда

$$\varphi(R_2 \dots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^{m-1}) - \varphi(R_{g+1} \dots R_{(2g-2)q}\widetilde{R}_1 \dots \widetilde{R}_m).$$

Рассмотрим дивизор $D = R_2 \dots R_g R_{g+1} \dots R_{2g-2}\widetilde{R}_1$ степени $2g-2$ с $g-1$ свободными точками $R_{g+1}, \dots, R_{2g-2}, \widetilde{R}_1$. По теореме о свободных точках имеем неравенство $i(D) \geq 1$. Поэтому $\varphi(D) = -2K$. Предыдущее равенство перепишется в виде $-2K(q-1) + \varphi(Q^{m-1}) = \varphi(R_{2g-1} \dots R_{q(2g-2)}\widetilde{R}_2 \dots \widetilde{R}_m)$ при $q > 1$. Следовательно, можно выбрать точки $R_{2g-1}, \dots, R_{q(2g-2)+2}$, $\widetilde{R}_2, \dots, \widetilde{R}_m$ так, чтобы это соотношение не выполнялось в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. Множество, заданное выражением слева, нульмерно, а справа не менее, чем размерности $m-1 \geq 1$ при любых $q > 1$ и $g \geq 2$; противоречие. Поэтому точка Q действительно полюс точно порядка m на F_μ.

Таким образом, дивизор

$$(\tau_{q,Q}^{(m)}) = \frac{R_1 \dots R_g R_{g+1} \dots R_N}{Q^m}, \quad R_1, \dots, R_N \neq Q,$$

имеет наиболее общий вид для дивизоров q-дифференциалов $\tau_{q,Q}^{(m)}$ с единственным полюсом точно порядка $m \geq 2$ на F_μ для точки $Q \in F_\mu$.

При $q > 1$ индукцией по m, используя теорему 2.1, можно получить, что для любого $m \geq 2$ существует ветвь дифференциала $\tau_{q,Q}^{(m)}$ с условием, что $\tau_{q,Q}^{(m)} = \left(\frac{1}{z^m} + O(1)\right) dz^q$, $z(Q) = 0$. Следовательно, доказана

Теорема 2.3. *На переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \ge 2$ для любых натуральных чисел $m \ge 2$, $q > 1$ существует элементарный q-дифференциал*
$$\tau^{(m)}_{q,Q} = \left(\frac{1}{z^m} + O(1)\right) dz^q, \quad z(Q) = 0,$$
с полюсом в любой точке $Q = Q[\mu] \in F_\mu$ точно порядка m, локально голоморфно зависящий от $[\mu]$, у которого общий вид дивизора $\big(\tau^{(m)}_{q,Q}\big) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q^m}$, где $\varphi(R_1 \dots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) - \varphi(R_{g+1} \dots R_N)$. При этом точки $R_{g+1}, \dots, R_N$ выбираются как локально голоморфное сечение расслоения целых дивизоров степени $N-g$ над $\mathbb{T}_g$, где $N = (2g-2)q + m$ и $Q = Q[\mu]$ — локально голоморфное сечение дивизоров степени 1 на F_μ для $[\mu]$ из любой односвязной окрестности $U[\mu_0] \subset \mathbb{T}_g$.

§ 3. Пространства однозначных дифференциалов

Рассмотрим пространство $\Omega\big(\frac{1}{P_1^{\alpha_1} \dots P_l^{\alpha_l} P_{l+1} \dots P_s}; F_\mu\big)$ абелевых дифференциалов для $s > 1$, $0 \le l \le s$. По теореме Римана — Роха имеем равенство
$$0 = r\big(P_1^{\alpha_1} \dots P_l^{\alpha_l} P_{l+1} \dots P_s\big) \\ = -(\alpha_1 + \dots + \alpha_l + s - l) - g + 1 + i\left(\frac{1}{P_1^{\alpha_1} \dots P_l^{\alpha_l} P_{l+1} \dots P_s}\right).$$
Отсюда
$$i\left(\frac{1}{P_1^{\alpha_1} \dots P_l^{\alpha_l} P_{l+1} \dots P_s}\right) = (\alpha_1 + \dots + \alpha_l + s - l) + g - 1.$$

Построим базис пространства 1-дифференциалов на F_μ рода $g \ge 2$, кратных дивизору $\frac{1}{P_1^{\alpha_1} \dots P_l^{\alpha_l} P_{l+1} \dots P_s}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_l \ge 2$. Рассмотрим набор 1-дифференциалов
$$\zeta_1, \dots, \zeta_g, \tau^{(2)}_{P_1}, \dots, \tau^{(\alpha_1)}_{P_1}, \dots, \tau^{(2)}_{P_l}, \dots, \tau^{(\alpha_l)}_{P_l}, \tau_{P_1 P_2}, \dots, \tau_{P_1 P_s}. \tag{4}$$
Докажем, что этот набор линейно независим над $\mathbb{C}$. Предположим, что существует линейная комбинация с коэффициентами, которые не все равны нулю:
$$C_1\zeta_1 + \dots + C_g\zeta_g + C_1^{(2)}\tau^{(2)}_{P_1} + \dots + C_1^{(\alpha_1)}\tau^{(\alpha_1)}_{P_1} \\ + \dots + C_l^{(2)}\tau^{(2)}_{P_l} + \dots + C_l^{(\alpha_l)}\tau^{(\alpha_l)}_{P_l} + C_2'\tau_{P_1P_2} + \dots + C_s'\tau_{P_1P_s} = 0.$$
Имеем $C_1^{(2)} = \dots = C_l^{\alpha_l} = 0$ и $C_2' = \dots = C_s' = 0$, так как в правой части нет особенностей. Остается равенство $C_1\zeta_1 + \dots + C_g\zeta_g = 0$. Поскольку $\zeta_1, \dots, \zeta_g$ — базис голоморфных дифференциалов, $C_1 = \dots = C_g = 0$. Таким образом, доказана

Теорема 3.1. *Векторное расслоение*
$$E_1 = \bigcup_{[\mu]} \Omega\left(\frac{1}{P_1^{\alpha_1} \dots P_l^{\alpha_l} P_{l+1} \dots P_s}; F_\mu\right)$$
является голоморфным векторным расслоением ранга $\alpha_1 + \dots + \alpha_l + s - l + g - 1 = d$ над $\mathbb{T}_g$, где набор (4) из 1-дифференциалов является базисом локально голоморфных сечений этого расслоения.

Рассмотрим фактор-пространство $\Omega\big(\frac{1}{P_1^{\alpha_1} \dots P_l^{\alpha_l} P_{l+1} \dots P_s}; F_\mu\big)/\Omega(1; F_\mu)$, где $0 \le l \le s$. По теореме Римана — Роха имеем равенство
$$\dim \Omega\left(\frac{1}{P_1^{\alpha_1} \dots P_l^{\alpha_l} P_{l+1} \dots P_s}; F_\mu\right) = \alpha_1 + \dots + \alpha_l + s - l + g - 1,$$

тогда

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega\left(\frac{1}{P_1^{\alpha_1}\dots P_l^{\alpha_l}P_{l+1}\dots P_s}; F_\mu\right)/\Omega(1;F_\mu) = \alpha_1+\dots+\alpha_l+s-l-1,$$

так как $\dim_{\mathbb{C}}\Omega(1;F_\mu)=g$. Набор классов смежности 1-дифференциалов

$$\tau_{P_1}^{(2)},\dots,\tau_{P_1}^{(\alpha_1)},\dots,\tau_{P_l}^{(2)},\dots,\tau_{P_l}^{(\alpha_l)},\tau_{P_1P_2},\dots,\tau_{P_1P_s} \tag{5}$$

является базисом нашего фактор-пространства. Линейная независимость доказывается, как в предыдущем случае. Таким образом, доказано

Следствие 3.1. *В условиях предыдущей теоремы векторное расслоение* $E_2=\bigcup\limits_{[\mu]}\Omega\big(\frac{1}{P_1^{\alpha_1}\dots P_l^{\alpha_l}P_{l+1}\dots P_s};F_\mu\big)/\Omega(1;F_\mu)$ *является голоморфным векторным расслоением ранга* $\alpha_1+\dots+\alpha_l+s-l-1$ *над* $\mathbb{T}_g$. *При этом классы смежности 1-дифференциалов из набора* (5) *будут базисом локально голоморфных сечений этого расслоения.*

Замечание 3.1. В предыдущих теоремах расслоения E_1 и E_2 над односвязной базой $\mathbb{T}_g$ по теореме Грауэрта глобально тривиальны или аналитически эквивалентны прямому произведению $\mathbb{T}_g\times\mathbb{C}^d$, где d — ранг рассматриваемых расслоений.

Обозначим через $\Omega^q\big(\frac{1}{P_1^{\alpha_1}\dots P_l^{\alpha_l}P_{l+1}\dots P_n};F_\mu\big)$ при $q>1$ пространство q-дифференциалов на F_μ, кратных дивизору $\frac{1}{P_1^{\alpha_1}\dots P_l^{\alpha_l}P_{l+1}\dots P_n}$, где $\alpha_1,\dots,\alpha_l\geq 2$, $n\geq 1$, $0\leq l\leq n$, и точки $P_1,\dots,P_n$ попарно различны, а через $\Omega^q(1;F_\mu)$ — подпространство голоморфных q-дифференциалов на F_μ.

По теореме Римана — Роха для q-дифференциалов найдем размерности этих пространств. Известно, что $\dim\Omega^q(1;F_\mu)=(2q-1)(g-1)$ при $q>1$. Имеем

$$i_q\left(\frac{1}{P_1^{\alpha_1}\dots P_l^{\alpha_l}P_{l+1}\dots P_n}\right)=(g-1)(2q-1)-\deg\left(\frac{1}{P_1^{\alpha_1}\dots P_l^{\alpha_l}P_{l+1}\dots P_n}\right)$$
$$+\,r\big(Z^{q-1}P_1^{\alpha_1}\dots P_l^{\alpha_l}P_{l+1}\dots P_n\big)=(g-1)(2q-1)+\alpha_1+\dots+\alpha_l+n-l\ (\geq 4).$$

Поэтому $\dim\Omega^q\big(\frac{1}{P_1^{\alpha_1}\dots P_l^{\alpha_l}P_{l+1}\dots P_n};F_\mu\big)/\Omega^q(1;F_\mu)=\alpha_1+\dots+\alpha_l+n-l(\geq 1)$.

Рассмотрим наборы q-дифференциалов:

$$\tau_{q,P_1}^{(1)},\tau_{q,P_1}^{(2)},\dots,\tau_{q,P_1}^{(\alpha_1)},\dots,\tau_{q,P_l}^{(1)},\tau_{q,P_l}^{(2)},\dots,\tau_{q,P_l}^{(\alpha_l)},\tau_{q,P_1P_{l+1}},\dots,\tau_{q,P_1P_n}, \tag{6}$$

или

$$\tau_{q,P_1}^{(1)},\tau_{q,P_1}^{(2)},\dots,\tau_{q,P_1}^{(\alpha_1)},\dots,\tau_{q,P_l}^{(1)},\tau_{q,P_l}^{(2)},\dots,\tau_{q,P_l}^{(\alpha_l)},\tau_{q,P_{l+1}},\dots,\tau_{q,P_n}, \tag{7}$$

при $l\geq 1$, $q>1$;

$$\tau_{q,P_1}^{(1)},\tau_{q,P_1P_2},\dots,\tau_{q,P_1P_n}, \tag{8}$$

или

$$\tau_{q,P_1}^{(1)},\dots,\tau_{q,P_n}^{(1)}, \tag{9}$$

при $l=0$, $q>1$.

Покажем, что классы смежности q-дифференциалов набора (6) линейно независимы над $\mathbb{C}$. Предположим, что существует линейная комбинация дифференциалов из списка (6) с коэффициентами, которые не все равны нулю, вида

$C_1^{(1)}\tau_{q,P_1}^{(1)}+\dots+C_1^{(\alpha_1)}\tau_{q,P_1}^{(\alpha_1)}+\dots+C_l^{(1)}\tau_{q,P_l}^{(1)}+\dots+C_l^{(\alpha_l)}\tau_{q,P_l}^{(\alpha_l)}+C_{l+1}\tau_{q,P_1P_{l+1}}+\dots+C_n\tau_{q,P_1P_n}=\omega$, где ω — голоморфный q-дифференциал.

Коэффициенты $C_2^{(1)}=\dots=C_l^{(\alpha_l)}$ равны 0, так как для правой части точки $P_2,\dots,P_l$ не являются особыми. Осталось равенство

$$C_1^{(1)}\tau_{q,P_1}^{(1)}+\dots+C_1^{(\alpha_1)}\tau_{q,P_1}^{(\alpha_1)}+C_{l+1}\tau_{q,P_1P_{l+1}}+\dots+C_n\tau_{q,P_1P_n}=\omega.$$

Поскольку для правой части точки $P_{l+1},\dots,P_n$ не являются особыми, имеем $C_{l+1}=\dots=C_n=0$. После этого получаем равенство $C_1^{(1)}\tau_{q,P_1}^{(1)}+C_1^{(2)}\tau_{q,P_1}^{(2)}+\dots+C_1^{(\alpha_1)}\tau_{q,P_1}^{(\alpha_1)}=\omega$ и $C_1^{(1)}=\dots=C_1^{(\alpha_1)}=0$, так как точка P_1 не является особой для правой части.

Таким образом, набор классов смежности для q-дифференциалов из списка (6) является базисом нашего фактор-пространства.

Аналогично доказывается утверждение для набора (7).

Покажем, что набор (8) линейно независим над $\mathbb{C}$. Предположим, что существует линейная комбинация с коэффициентами, которые не все равны нулю, вида $C_1^{(1)}\tau_{q,P_1}^{(1)}+C_2\tau_{q,P_1P_2}+\dots+C_n\tau_{q,P_1P_n}=\omega$, где ω — голоморфный q-дифференциал. Имеем $C_2=\dots=C_n=0$, так как для правой части нет особенностей $P_2,\dots,P_n$. Остается равенство $C_1^{(1)}\tau_{q,P_1}=\omega$. Очевидно, что $C_1^{(1)}=0$. Следовательно, набор классов смежности q-дифференциалов из списка (8) является базисом нашего фактор-пространства.

Рассмотрим линейную комбинацию для набора (9): $C'_1\tau_{q,P_1}^{(1)}+\dots+C'_n\tau_{q,P_n}^{(1)}=\omega$. Так как в правой и левой частях разные особенности, $C'_1=\dots=C'_n=0$. Следовательно, набор классов смежности q-дифференциалов из списка (9) является базисом нашего фактор-пространства. Таким образом, доказали теорему.

Теорема 3.2. *Векторное расслоение*

$$E_3=\bigcup_{[\mu]}\Omega^q\left(\frac{1}{P_1^{\alpha_1}\dots P_l^{\alpha_l}P_{l+1}\dots P_n};F_\mu\right)/\Omega^q(1;F_\mu)$$

будет голоморфным векторным расслоением ранга $\alpha_1+\dots+\alpha_l+n-l$ над $\mathbb{T}_g$, где $g\geq 2$, $\alpha_1,\dots,\alpha_l\geq 2$, $n\geq 1$, $0\leq l\leq n$, $q>1$ и точки $P_1,\dots,P_n$ попарно различны. При этом классы смежности q-дифференциалов из наборов (6)–(9) дают базис локально голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbb{T}_g$.

Рассмотрим набор q-дифференциалов

$$\zeta_1,\dots,\zeta_{(2q-1)(g-1)},\tau_{q,P_1}^{(1)},\tau_{q,P_1}^{(2)},\dots,\tau_{q,P_1}^{(\alpha_1)},\dots,\tau_{q,P_l}^{(\alpha_l)},\tau_{q,P_1P_{l+1}},\dots,\tau_{q,P_1P_n},\qquad(10)$$

где $\zeta_1,\dots,\zeta_{(2q-1)(g-1)}$ — базис голоморфных q-дифференциалов при $q>1$.

Покажем, что классы смежности набора (10) линейно независимы. Предположим, что существует линейная комбинация, у которой не все коэффициенты нулевые:

$$C_1\zeta_1+\dots+C_{(2q-1)(g-1)}\zeta_{(2q-1)(g-1)}+C_1^{(1)}\tau_{q,P_1}^{(1)}+C_1^{(2)}\tau_{q,P_1}^{(2)}+\dots$$
$$+C_1^{(\alpha_1)}\tau_{q,P_1}^{(\alpha_1)}+\dots+C_l^{(\alpha_l)}\tau_{q,P_l}^{(\alpha_l)}+C_{l+1}\tau_{q,P_1P_{l+1}}+\dots+C_n\tau_{q,P_1P_n}=0.$$

Имеем $C_1^{(1)}=\dots=C_l^{(\alpha_l)}=0$ и $C_{l+1}=\dots=C_n=0$, так как в правой части нет особенностей. Остается равенство

$$C_1\zeta_1+\dots+C_{(2q-1)(g-1)}\zeta_{(2q-1)(g-1)}=0,$$

но $\zeta_1,\dots,\zeta_{(2q-1)(g-1)}$ — базис, а значит, $C_1=\dots=C_{(2q-1)(g-1)}=0$. Следовательно, набор q-дифференциалов (10) является базисом этого пространства на F_μ. Таким образом, доказано

Следствие 3.2. *Векторное расслоение* $E_4 = \bigcup\limits_{[\mu]} \Omega^q\big(\frac{1}{P_1^{\alpha_1}\dots P_l^{\alpha_l} P_{l+1}\dots P_n}; F_\mu\big)$ *является голоморфным векторным расслоением ранга* $(2q-1)(g-1)+\alpha_1+\dots+\alpha_l+n-l$ *над* $\mathbb{T}_g$ *при* $g \geq 2$. *При этом набор* (10) *дает базис локально голоморфных сечений этого расслоения, где* $\alpha_1,\dots,\alpha_l \geq 2$, $n \geq 1$, $q > 1$, $0 \leq l \leq n$.

§ 4. Специальные дивизоры дифференциалов Прима

В этом параграфе исследуются расположение нулей голоморфных дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности F и строение множества (мультипликативно) специальных дивизоров на F в пространствах F_{g-1} и F_{g-2}. Кроме того, аналогичные вопросы изучаются для (ρ,q)-дифференциалов Прима при любом характере ρ на F.

Определение 4.1. Дивизор D на F называется (ρ,q)-*специальным* при $q \geq 1$, если $i_{\rho,q}(D) = \dim \Omega^q_\rho(D) > 0$. Дивизор D на F называется (ρ,q)-*неспециальным* при $q \geq 1$, если $i_{\rho,q}(D) = 0$.

Теорема 4.1. *Пусть* F *— компактная риманова поверхность рода* $g \geq 2$. *Тогда* (1) *если* ρ *— несущественный характер и* D *— любой целый дивизор,* $\deg D = t \leq g-1$ *на* F*;* (2) *если* ρ *— существенный характер и* D *— любой целый дивизор,* $\deg D = t \leq g-2$ *на* F*, то в обоих случаях* (а) *существует ненулевой голоморфный дифференциал Прима* τ *для* ρ *на* F *такой, что* $(\tau) \geq D$*, а значит,* D *—* $(\rho,1)$*-специален на* F*;* (б) *имеет место канонический изоморфизм* $L_{\rho^{-1}}(D^{-1}) \cong \Omega^1(E)$*, где* $DE = (\tau)$.

Доказательство. (1) Пусть ρ — несущественный характер. Пополним дивизор D дивизором $D' = P_{t+1}\dots P_{g-1}$, $\deg D' = g-t-1$, и составим дивизор $D_1 = DD'$ степени $g-1$. Воспользуемся некоторыми свойствами тэта-функции для отмеченной римановой поверхности F. Положим $e = \varphi(D_1)+K$ [3]. Тогда $\Theta(e) = 0$ и в силу четности тэта-функции $\Theta(-e) = 0$. Отсюда $-e = \varphi(D_2)+K$, где D_2 — целый дивизор степени $g-1$. Следовательно, D_1D_2 — целый дивизор степени $2g-2$ и $\varphi(D_1D_2) = -2K$. В силу того, что в D_1 есть $g-1$ свободных точек на F, по теореме Римана — Роха имеем неравенство $g-1+1 \leq r\big(\frac{1}{D_1D_2}\big) = r_{\rho^{-1}}\big(\frac{1}{D_1D_2}\big) = 2g-2-g+1+i_\rho(D_1D_2)$. Отсюда $i_\rho(D_1D_2) \geq 1 > 0$. Поэтому существует ненулевой голоморфный дифференциал τ для ρ с условием $(\tau) = D_1D_2 \geq D$ на F.

Это можно получить другим способом. Из $\varphi(D_1D_2) = -2K$ следует существование ненулевого голоморфного абелева дифференциала ω с $(\omega) = D_1D_2 \geq 1$. Следовательно, $\tau = f_0\omega \neq 0$ будет голоморфным дифференциалом для ρ с условием $(\tau) = (f_0)(\omega) = D_1D_2 \geq D$ на F.

(2) Пусть ρ — существенный характер и $D \geq 1$, $\deg D = t \leq g-2$. Голоморфный дифференциал τ для ρ будем искать в следующем виде: $\tau = \omega_0 f$, где ω_0 — голоморфный абелев дифференциал такой, что $(\omega_0) = Q_1\dots Q_{2g-2}$ и дивизоры D и (ω_0) не пересекаются. Это следует из того, что дивизоры голоморфных абелевых дифференциалов не имеют базисных точек на F.

Таким образом, искомая функция f имеет дивизор $(f) = \frac{DD'}{Q_1\dots Q_{2g-2}}$, где $D' = P_1\dots P_{2g-2-t} \geq 1$, $\deg D' = 2g-2-t(\geq g)$. По теореме Абеля для характеров [3, 4] такие функции должны удовлетворять следующим условиям:

$$0 \neq \psi(\rho) = \varphi((f)) = \varphi(D) + \varphi(D') - \varphi((\omega_0)) = \varphi(D) + \varphi(D') + 2K.$$

Перепишем последнее равенство в другом виде: $a = -2K + \psi(\rho) - \varphi(D) = \varphi(D') = \varphi(P_1 \dots P_{2g-2-t})$. Выбирая произвольно точки $P_{g+1}, \dots, P_{2g-2-t}$, решим задачу обращения Якоби $\varphi(P_1 \dots P_g) = a - \varphi(P_{g+1} \dots P_{2g-2-t})$ в многообразии Якоби $J(F)$. По классической теореме обращения Якоби существует дивизор $P_1 \dots P_g$ на F, являющийся решением этого уравнения. Таким образом, можно построить функцию f с указанным выше дивизором. Следовательно, существует искомый ненулевой голоморфный $(\rho, 1)$-дифференциал $\tau = \omega_0 f$ с условием $(\tau) \geq D$ на F.

Из (a) получаем, что существует дивизор $E \geq 1$, удовлетворяющий условию $(\tau) = DE$. Если f для ρ^{-1} удовлетворяет условию $(f) \geq \frac{1}{D}$, то $f\tau$ — абелев дифференциал с условием $(f\tau) \geq \frac{1}{D} DE = E$. Обратно, если ω — абелев дифференциал и $(\omega) \geq E$, то функция $\frac{\omega}{\tau}$ для ρ^{-1} удовлетворяет условию $\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \geq E \frac{1}{DE} = \frac{1}{D}$. Поэтому размерности пространств $L_{\rho^{-1}}(D^{-1})$ и $\Omega^1(E)$ одинаковы. Следовательно, умножение на τ задает канонический изоморфизм $L_{\rho^{-1}}(D^{-1}) \cong \Omega^1(E)$. Теорема доказана.

Последнее утверждение теоремы 4.1 есть аналог закона взаимности Брилля — Нётера для любых характеров.

Замечание 4.1. Из [8] следует, что ограничения на $t = \deg D$ являются необходимыми в предыдущей теореме.

Теорема 4.2. *Пусть ρ — несущественный характер и $D = P_1 \dots P_g$ — целый дивизор степени g на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$. Тогда существует целый дивизор D', близкий к D, $\deg D' = g$, такой, что D' $(\rho, 1)$-неспециальный и его можно выбрать состоящим из попарно различных точек на F.*

Доказательство. Для любого P_1 по теореме Римана — Роха $i_\rho(P_1) = r_{\rho^{-1}}\left(\frac{1}{P_1}\right) + g - 2$. Для несущественного характера ρ^{-1} имеем включение $L_{\rho^{-1}}\left(P_1^{-1}\right) \supset \langle f_0 \rangle$, а значит, $r_{\rho^{-1}}\left(P_1^{-1}\right) \geq 1$. Выберем точку P_1', близкую к P_1, с условием, что $r_{\rho^{-1}}\left(\frac{1}{P_1'}\right) = 1$. Если $r_{\rho^{-1}}\left(P_1^{-1}\right) > 1$, то существует функция $f \neq cf_0$, $c \neq 0$, $c \in \mathbb{C}$, такая, что $(f) \geq \frac{1}{P_1}$. Поэтому P_1 имеет первый мультипликативный не пробел Вейерштрасса $n_1(P_1) = 1$ $(\leq g)$, а значит, P_1 — мультипликативная точка Вейерштрасса на F для ρ^{-1}. Мультипликативные точки Вейерштрасса для ρ^{-1} составляют конечное множество точек на F. Следовательно, существует P_1', близкая к P_1, которая не является мультипликативной точкой Вейерштрасса на F [5]. Таким образом, $r_{\rho^{-1}}\left(\frac{1}{P_1'}\right) = 1$ и $i_\rho(P_1') = g - 1$.

Пусть по индукционному предположению для некоторого j, $1 < j < g$, построили дивизор $D_j' = P_1' \dots P_j'$ требуемого типа, где P_k' близка к P_k, $k = 1, \dots, j$, и $i_\rho(P_1' \dots P_j') = g - j$. Выберем базис $\varphi_1, \dots, \varphi_{g-j}$ голоморфных дифференциалов Прима на F для ρ, которые обращаются в нуль в точках $P_1', \dots, P_j'$. Рассмотрим φ_1.

Если $\varphi_1(P_{j+1}) \neq 0$ на F, то имеем двустороннюю оценку $g - (j+1) \leq i_\rho(D_j' P_{j+1}) \leq g - (j+1)$ или $i_\rho(D_j' P_{j+1}) = g - (j+1)$, где $P_{j+1}' = P_{j+1}$.

Если $\varphi_1(P_{j+1}) = 0$, то с учетом того, что у дифференциала конечное число нулей, выберем близкую к P_{j+1} точку P_{j+1}' с условием, что $\varphi_1(P_{j+1}') \neq 0$.

Таким образом, $i_\rho(D_j' P_{j+1}') = g - (j+1)$. Следовательно, за g шагов получим $D_g' = D'$ такой, что $i_\rho(D') = 0$.

Из метода доказательства видно, что точки в дивизоре D' можно выбрать попарно различными на F. Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Пусть ρ — существенный характер и $D = P_1 \dots P_{g-1}$ — целый дивизор степени $g-1$ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$. Тогда существует целый дивизор D', близкий к D, $\deg D' = g-1$, такой, что D' $(\rho, 1)$-неспециальный и D' можно выбрать состоящим из попарно различных точек на F.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.2 с учетом того, что $i_\rho(1) = g-1$.

Следствие 4.1. *Если характер ρ несущественный (существенный) на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$, то множество $(\rho, 1)$-неспециальных дивизоров степени g (степени $(g-1)$) всюду плотно в F_g (в F_{g-1}).*

Будем рассматривать (ρ, q)-дифференциалы на F. Заметим, что дивизор D (ρ, q)-специален на F при $q > 1$ для любого характера ρ, если $t = \deg D < (2q-1)(g-1)$, так как по теореме Римана — Роха для (ρ, q)-дифференциалов имеем $i_{\rho,q}(D) = (2q-1)(g-1) - \deg D + r\bigl(\frac{(f)Z^{q-1}}{D}\bigr) > 0$.

Теорема 4.4. *Для любого характера ρ и дивизора $D \geq 1$ такого, что $(2g-2)q - g \geq \deg D = t \geq 0$, на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ при $q > 1$ существует ненулевой голоморфный (ρ, q)-дифференциал τ на F такой, что $(\tau) \geq D$, а значит, дивизор D (ρ, q)-специален на F.*

Доказательство. Дифференциал τ будем искать в виде $\tau = \omega_0^q f$ для любого ρ, где ω_0 — голоморфный абелев дифференциал такой, что дивизоры D и (ω_0) не имеют общих точек. Таким образом, искомая функция f имеет дивизор $(f) = \frac{DD'}{(\omega_0)^q}$, где $D' = P_1 \dots P_{(2g-2)q-t} \geq 1$.

По теореме Абеля для характеров имеем равенство $\varphi(DD') = -2Kq + \psi(\rho)$ в многообразии Якоби $J(F)$. Перепишем его в виде

$$\varphi(P_1 \dots P_g) = -2Kq + \psi(\rho) - \varphi(D) - \varphi(P_{g+1} \dots P_{(2g-2)q-t}),$$

где точки $P_{g+1}, \dots, P_{(2g-2)q-t}$ выбираем произвольно на F. Кроме того, для фиксированного рода $g \geq 2$ имеем неравенство $(2g-2)q - g \geq t \geq 1$. Оно верно для любого $q \geq 2$, так как $(2g-2)2 - g \geq 1$ или $g \geq \frac{5}{3}$. Последнее неравенство выполняется для любого $g \geq 2$ (при $q \geq 2$).

Решая проблему Якоби для последнего уравнения, найдем точки $P_1, \dots, P_g$. Таким образом можно построить функцию f с указанным выше дивизором. Следовательно, построили искомый ненулевой голоморфный (ρ, q)-дифференциал $\tau = \omega_0^q f$ с условием $(\tau) \geq D$ на F. Теорема доказана.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ на F, состоящую из попарно различных точек. Составим последовательность дивизоров $D_0 = 1$, $D_{j+1} = D_j P_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$. Зададим произвольные (ρ, q). При $q > 1$ для любого характера ρ имеем $d = \dim \Omega_\rho^q(1) = (2q-1)(g-1)$, а при $q = 1$ будет $d = g-1$ для существенного характера ρ и $d = g$ для несущественного характера ρ. По любой базе $\omega_1, \dots, \omega_d$ в $\Omega_\rho^q(1)$ составим определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \omega_1(P) & \omega_2(P) & \dots & \omega_d(P) \\ \omega_1(P_1) & \omega_2(P_1) & \dots & \omega_d(P_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1(P_{d-1}) & \omega_2(P_{d-1}) & \dots & \omega_d(P_{d-1}) \end{pmatrix}.$$

Этот определитель — голоморфный (ρ, q)-дифференциал ω и $(\omega) \geq D_{d-1} = P_1 \dots P_{d-1}$ на F. Построим новый набор голоморфных (ρ, q)-дифференциалов, являющихся главными минорами этого определителя, на F:

$$\widetilde{\omega}_1(P)=\omega_1(P),\quad (\omega_1)\geq 1,$$

$$\widetilde{\omega}_2(P)=\det\begin{pmatrix}\omega_1(P) & \omega_2(P)\\ \omega_1(P_1) & \omega_2(P_1)\end{pmatrix},\quad (\widetilde{\omega}_2)\geq P_1=D_1;$$

$$\dots$$

$$\widetilde{\omega}_d=\omega(P),\quad (\widetilde{\omega}_d)\geq P_1\dots P_{d-1}=D_{d-1}.$$

Заметим, что общее число нулей для голоморфного (ρ,q)-дифференциала ω на F равно $(2g-2)q\geq d$ при $g\geq 2$, $q\geq 1$. Нетрудно видеть, что $\widetilde{\omega}_j\neq 0$, $j=1,\dots,d$, так как главные миноры не равны нулю из-за линейной независимости $\omega_1,\dots,\omega_d$, а значит, линейно независимы элементы в первой строке нашего определителя. Кроме того, по построению имеются условия на дивизоры $(\widetilde{\omega}_j)\geq D_{j-1}$, $j=1,2,\dots,d$.

Теорема 4.5. *Для любой последовательности $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$, состоящей из попарно различных точек на компактной римановой поверхности F рода $g\geq 2$, любого характера ρ и $q\geq 1$, $q\in\mathbb{N}$, существует набор (ρ,q)-дифференциалов $\widetilde{\omega}_1,\dots,\widetilde{\omega}_d$ из пространства $\Omega^q_\rho(1)$ на F, $d=\dim\Omega^q_\rho(1)$, такой, что*

(1) *$\widetilde{\omega}_j\neq 0$, $j=1,\dots,d$;*

(2) *$(\widetilde{\omega}_j)\geq D_{j-1}$, $j=1,2,\dots,d$, и дивизоры $D_{j-1}, j=1,2,\dots,d$, (ρ,q)-специальны на F;*

(3) *для любых фиксированных $q\geq 1$ и $j=1,\dots,d-1$ множество всех целых дивизоров степени j из попарно различных точек образует открытое и всюду плотное подмножество в F_j, состоящее из (ρ,q)-специальных дивизоров на F;*

(4) *если дополнительно предположим, что $\widetilde{\omega}_j(P_j)\neq 0$, $j=1,\dots,d$, то $\widetilde{\omega}_1,\dots,\widetilde{\omega}_d$ — базис в $\Omega^q_\rho(1)$, адаптированный к произвольной последовательности $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$, т. е. удовлетворяющий неравенству из* (2).

Доказательство. Осталось доказать только утверждение (4). Предположим, что есть линейная комбинация $\alpha_1\widetilde{\omega}_1+\alpha_2\widetilde{\omega}_2+\dots+\alpha_d\widetilde{\omega}_d=0$ на F с некоторыми ненулевыми коэффициентами. Последовательно подставляя точки $P_1,\dots,P_d$ в это равенство, получим систему из d линейных уравнений с d неизвестными $\alpha_1,\dots,\alpha_d$. Легко видеть, что она имеет нижнетреугольную матрицу:

$$\alpha_1\widetilde{\omega}_1(P_1)=0,$$

$$\alpha_1\widetilde{\omega}_1(P_2)+\alpha_2\widetilde{\omega}_2(P_2)=0,$$

$$\dots$$

$$\alpha_1\widetilde{\omega}_1(P_j)+\alpha_2\widetilde{\omega}_2(P_j)+\dots+\alpha_j\widetilde{\omega}_j(P_j)=0,$$

$$\dots$$

$$\alpha_1\widetilde{\omega}_1(P_d)+\alpha_2\widetilde{\omega}_2(P_d)+\dots+\alpha_d\widetilde{\omega}_d(P_d)=0.$$

По условию все диагональные элементы матрицы этой системы не равны нулю, а значит, матрица невырожденная. Поэтому наша система имеет только нулевое решение и набор $\widetilde{\omega}_1,\dots,\widetilde{\omega}_d$ — базис в $\Omega^q_\rho(1)$ на F. Теорема доказана.

§ 5. Векторные расслоения дифференциалов Прима над пространством Тейхмюллера

Обозначим через $\Omega^q_\rho\big(\frac{1}{R_1^{\alpha_1}\dots R_m^{\alpha_m}}; F_\mu\big)$ векторное пространство, состоящее из (ρ,q)-дифференциалов, кратных дивизору $\frac{1}{R_1^{\alpha_1}\dots R_m^{\alpha_m}}$, а через $\Omega^q_\rho(1;F_\mu)$ — векторное пространство голоморфных (ρ,q)-дифференциалов на F_μ [9].

Теорема 5.1. *Векторное расслоение*

$$E_5=\bigcup_{[\mu],\rho}\Omega^q_\rho\left(\frac{1}{R_1^{\alpha_1}\dots R_m^{\alpha_m}};F_\mu\right)/\Omega^q_\rho(1;F_\mu)$$

над $\mathbb{T}_g\times(\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash L_g)$ *(над* $\mathbb{T}_g\times(L_g\setminus\{1\})$*) является голоморфным векторным расслоением ранга* $\alpha_1+\dots+\alpha_m$ *при условии* $q>1$, $q\in\mathbb{N}$, $\alpha_j\geq 1$, $\alpha_j\in\mathbb{N}$, $j=1,\dots,m$, $m\geq 1$, *причем набор из* $\alpha_1+\dots+\alpha_m$ *классов смежности* (ρ,q)*-дифференциалов* $\tau^{(1)}_{\rho,q,R_1},\dots,\tau^{(\alpha_1)}_{\rho,q,R_1},\dots,\tau^{(1)}_{\rho,q,R_m},\dots,\tau^{(\alpha_m)}_{\rho,q,R_m}$ *— базис локально голоморфных сечений этого расслоения.*

Доказательство. Известно, что для любого характера $\rho\in\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$ при $q>1$ имеем равенство $\dim\Omega^q_\rho(1;F_\mu)=(g-1)(2q-1)$. По теореме Римана — Роха для (ρ,q)-дифференциалов найдем размерность

$$i_{\rho,q}\left(\frac{1}{R_1^{\alpha_1}\dots R_m^{\alpha_m}}\right)=(g-1)(2q-1)-\deg\left(\frac{1}{R_1^{\alpha_1}\dots R_m^{\alpha_m}}\right)\\ +r\big((f[\mu])Z^{q-1}\cdot R_1^{\alpha_1}\dots R_m^{\alpha_m}\big).$$

При $\alpha_j\geq 1$, $q>1$ имеем $r\big((f[\mu])Z^{q-1}R_1^{\alpha_1}\dots R_m^{\alpha_m}\big)=0$, так как

$$\deg\big((f[\mu])Z^{q-1}R_1^{\alpha_1}\dots R_m^{\alpha_m}\big)\geq\alpha_1>0.$$

Таким образом,

$$\dim\Omega^q_\rho\left(\frac{1}{R_1^{\alpha_1}\dots R_m^{\alpha_m}};F_\mu\right)/\Omega^q_\rho(1;F_\mu)=\alpha_1+\dots+\alpha_m.$$

Покажем, что набор классов смежности дифференциалов $\tau^{(1)}_{\rho,q,R_1},\dots,\tau^{(\alpha_1)}_{\rho,q,R_1}$, $\dots,\tau^{(1)}_{\rho,q,R_m},\dots,\tau^{(\alpha_m)}_{\rho,q,R_m}$, локально голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ [8, теорема 2.1], линейно независим над $\mathbb{C}$ при $\rho\neq 1$. Составим линейную комбинацию вида

$$C_1^{(1)}\tau^{(1)}_{\rho,q,R_1}+\dots+C_1^{(\alpha_1)}\tau^{(\alpha_1)}_{\rho,q,R_1}+\dots+C_m^{(1)}\tau^{(1)}_{\rho,q,R_m}+\dots+C_m^{(\alpha_m)}\tau^{(\alpha_m)}_{\rho,q,R_m}=\omega,$$

где ω — голоморфный (ρ,q)-дифференциал на F_μ. Так как в правой части нет особенностей, все коэффициенты равны нулю.

Все эти дифференциалы голоморфно зависят от $[\mu]$, ρ и от дивизоров R_1, $\dots,R_m$, которые являются локально голоморфными сечениями расслоения целых дивизоров степени m над пространством Тейхмюллера $\mathbb{T}_g$ рода g.

Следовательно, данный набор задает базис локально голоморфных сечений нашего расслоения. Теорема доказана.

Рассмотрим пространство $\Omega_\rho\big(\frac{1}{R_1^{\alpha_1}\dots R_s^{\alpha_s}R_{s+1}\dots R_m};F_\mu\big)$, где $\alpha_1\geq 2,\dots,\alpha_s\geq 2$, $m\geq s\geq 1$. Используя формулу Римана — Роха для любого характера, найдем размерность $\Omega_\rho\big(\frac{1}{R_1^{\alpha_1}\dots R_s^{\alpha_s}R_{s+1}\dots R_m};F_\mu\big)$. Имеем

$$r_{\rho^{-1}}\big(R_1^{\alpha_1}\dots R_m\big)=\deg\left(\frac{1}{R_1^{\alpha_1}\dots R_m}\right)-g+1+i_\rho\left(\frac{1}{R_1^{\alpha_1}\dots R_m}\right).$$

Предположим, что существует $f \neq 0$, $f \in L_{\rho^{-1}}\big(R_1^{\alpha_1} \dots R_m\big)$, т. е. f для ρ^{-1} такая, что $(f) \geq R_1^{\alpha_1} \dots R_m$. Тогда $0 = \deg(f) \geq \alpha_1 + \dots + \alpha_s + m - s > 0$; противоречие. Поэтому $r_{\rho^{-1}}\big(R_1^{\alpha_1} \dots R_m\big) = 0$ и $i_\rho\big(\frac{1}{R_1^{\alpha_1} \dots R_m}\big) = g + \alpha_1 + \dots + \alpha_s + m - s - 1$. Обозначим через $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$ пространство голоморфных мультипликативно точных дифференциалов на F_μ.

Теорема 5.2. *Векторное расслоение*

$$E_6 = \bigcup_{[\mu],\rho} \Omega_\rho\bigg(\frac{1}{R_1^{\alpha_1} \dots R_s^{\alpha_s} R_{s+1} \dots R_m}; F_\mu\bigg) / \Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $g + \alpha_1 + \dots + \alpha_s + m - s - 2$ над $\mathbb{T}_g \times (L_g \backslash \{1\})$, где $m \geq s > 1$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \geq 2$, $j = 1, \dots, s$. При этом набор классов смежности дифференциалов

$$f_0\zeta_1, \dots, \widehat{f_0\zeta_k}, \dots, f_0\zeta_g, \tau^{(2)}_{\rho,R_1}, \tau^{(3)}_{\rho,R_1}, \dots, \tau^{(\alpha_1)}_{\rho,R_1}, \tau^{(2)}_{\rho,R_2}, \tau^{(3)}_{\rho,R_2}, \dots, \tau^{(\alpha_2)}_{\rho,R_2}, \dots,$$
$$\tau^{(2)}_{\rho,R_s}, \tau^{(3)}_{\rho,R_s}, \dots, \tau^{(\alpha_s)}_{\rho,R_s}, \tau_{\rho,R_2R_1}, \dots, \tau_{\rho,R_mR_1} \qquad (*)$$

будет базисом локально голоморфных сечений этого векторного расслоения.

Доказательство. Пусть ρ — несущественный характер и $\rho \neq 1$. Тогда существует мультипликативная единица f_0, т. е. $(f_0) = 1$, такая, что $0 \neq df_0 \in \Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$. Покажем, что нет других базисных элементов, кроме cdf_0, $c \neq 0$, в $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$. Предположим противное: пусть существует $\omega \neq 0$, $\omega \neq cdf_0$, принадлежащий $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$. Тогда $\omega = df$ — мультипликативно точный голоморфный дифференциал. Поэтому существует голоморфная функция f для ρ и $\deg(f) = 0$. Так как у f нет полюсов, нет и нулей, и f — мультипликативная единица для ρ на F_μ. Поделив f на f_0, получим функцию $g = \frac{f}{f_0}$ такую, что $(g) = \big(\frac{f}{f_0}\big) = (f) = 1$, где g — однозначная голоморфная функция на F_μ, а значит, g — константа, отличная от нуля. Тогда $f = cf_0$ и $\omega = df = cdf_0$, $c \neq 0$; противоречие. Поэтому $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu) = \langle df_0 \rangle$ и $\dim \Omega_{e,\rho}(1; F_\mu) = 1$. Отсюда получаем, что

$$\dim \Omega_\rho\Big(\frac{1}{R_1^{\alpha_1} \dots R_m}; F_\mu\Big) / \Omega_{e,\rho}(1; F_\mu) = g + \alpha_1 + \dots + \alpha_s + m - s - 2.$$

Для несущественного характера ρ построим базис в этом фактор-пространстве. Вместо одного из дифференциалов $f_0\zeta_1, \dots, f_0\zeta_g$ можно взять df_0, который представляет нулевой класс смежности. Действительно, если $\rho_0 \neq 1$ на F_{μ_0}, то существует $A_k \in \Gamma_{\mu_0}$ такое, что $\exp 2\pi i c_k = \rho_0(A_k) \neq 1$. Поэтому $c_k \neq 0$ для любого ρ из достаточно малой окрестности $U(\rho_0) \subset L_g \backslash \{1\}$ и для любого $[\mu] \in U[\mu_0]$. Так как $df_0 = 2\pi i c_1 f_0\zeta_1 + \dots + 2\pi i c_g f_0 \zeta_g$, то $f_0\zeta_k$ выражается линейно через остальные.

Покажем, что (сокращенный) набор $(*)$ классов смежности для дифференциалов линейно независим над $\mathbb{C}$. Предположим, что существует линейная комбинация с коэффициентами, которые не все равны нулю, вида

$$C_1 f_0\zeta_1 + \dots + \widehat{C_k f_0\zeta_k} + \dots + C_g f_0\zeta_g + \widetilde{C}_1^{(2)} \tau^{(2)}_{\rho,R_1} + \dots + \widetilde{C}_1^{(\alpha_1)} \tau^{(\alpha_1)}_{\rho,R_1}$$
$$+ \dots + \widetilde{C}_s^{(2)} \tau^{(2)}_{\rho,R_s} + \dots + \widetilde{C}_s^{(\alpha_s)} \tau^{(\alpha_s)}_{\rho,R_s} + C_2' \tau_{\rho,R_2R_1} + \dots + C_m' \tau_{\rho,R_mR_1} = df$$

на F_μ, где f — голоморфная мультипликативная функция на F_μ. Тогда $\widetilde{C}_1^{(2)} = \dots = \widetilde{C}_s^{(\alpha_s)} = C_2' = \dots = C_m' = 0$, так как дифференциалы в правой и левой частях имеют разные особые точки.

Оставшееся равенство влечет, что f является мультипликативной единицей и $f = C_1' f_0$. Если $C_1' = 0$, то $\zeta_1, \dots, \widehat{\zeta_k}, \dots, \zeta_g$ линейно зависимы на F_μ; противоречие.

Если $C_1' \neq 0$, то $C_1' df_0 = df = \sum\limits_{j \neq k} C_j f_0 \zeta_j$. Для $\rho_0 \neq 1$, $\rho_0(A_k) \neq 1$, имеем $C_1' df_0 = \big(\sum\limits_{j \neq k} C_1' 2\pi i c_j f_0 \zeta_j\big) + C_1' 2\pi i c_k f_0 \zeta_k$ на F_μ, где $C_1' c_k \neq 0$. Отсюда получаем на F_μ равенство вида $\big(\sum\limits_{j \neq k} (C_1' 2\pi i c_j - C_j)\zeta_j\big) + C_1' 2\pi i c_k \zeta_k = 0$; противоречие с линейной независимостью абелевых дифференциалов $\zeta_1, \dots, \zeta_g$. Поэтому $C_j = 0$ для всех $j \neq k$.

Таким образом, набор $(*)$ классов смежности дифференциалов будет базисом в нашем фактор-пространстве для несущественного характера $\rho \neq 1$, который голоморфно зависит от $[\mu] \in U[\mu_0]$ и от $\rho \in U(\rho_0)$. Теорема доказана.

В [4] доказано, что существует базис $\widetilde{\zeta}_1, \dots, \widetilde{\zeta}_{g-1}$ в $\Omega_\rho(1, F_\mu)$, локально голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ.

Теорема 5.3. *Векторное расслоение*

$$E_7 = \bigcup_{[\mu],\rho} \Omega_\rho\left(\frac{1}{R_1^{\alpha_1} \dots R_m^{\alpha_m}}; F_\mu\right) / \Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $g + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1$ *над* $\mathbb{T}_g \times (\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash L_g)$, *где* $m \geq 1$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \geq 1$, $j = 1, \dots, m$. *При этом набор классов смежности дифференциалов*

$$\widetilde{\zeta}_1, \dots, \widetilde{\zeta}_{g-1}, \tau_{\rho,R_1}^{(1)}, \tau_{\rho,R_1}^{(2)}, \dots, \tau_{\rho,R_1}^{(\alpha_1)}, \tau_{\rho,R_2}^{(1)}, \tau_{\rho,R_2}^{(2)}, \dots, \tau_{\rho,R_2}^{(\alpha_2)}, \dots, \tau_{\rho,R_m}^{(1)}, \tau_{\rho,R_m}^{(2)}, \dots, \tau_{\rho,R_m}^{(\alpha_m)} \qquad (**)$$

будет базисом локально голоморфных сечений этого векторного расслоения.

Доказательство. Пусть ρ — существенный характер. Рассмотрим пространство $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$. Предположим, что существует $\omega \neq 0$, $\omega \in \Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$, тогда $\omega = df$ — голоморфный мультипликативно точный дифференциал для ρ. Следовательно, f — (глобальная) голоморфная мультипликативная функция для существенного характера ρ на F_μ. Известно, что $\deg(f) = 0$, поэтому f — мультипликативная единица для ρ, а значит, ρ — несущественный характер; противоречие. Поэтому $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu) = \{0\}$.

Таким образом,

$$\dim \Omega_\rho\left(\frac{1}{R_1^{\alpha_1} \dots R_m^{\alpha_m}}; F_\mu\right) / \Omega_{e,\rho}(1; F_\mu) = \dim \Omega_\rho\left(\frac{1}{R_1^{\alpha_1} \dots R_m^{\alpha_m}}; F_\mu\right) = g + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1.$$

Линейная независимость дифференциалов из набора $(**)$ доказывается, как в доказательстве предыдущей теоремы. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gunning R. C.* On the period classes of Prym differentials // J. Reine Angew. Math. 1980. V. 319. P. 153–171.
2. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 6. С. 180–208.
3. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer-Verl., 1992. (Grad. Texts Math.; V. 71).

4. *Чуешев В. В.* Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Кемерово: КемГУ, 2003. Ч. 2.

5. *Чуешев В. В., Якубов Э. Х.* Мультипликативные точки Вейерштрасса на компактной римановой поверхности // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1408–1429.

6. *Альфорс Л. В., Берс Л.* Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

7. *Earle C. J.* Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties // Ann. Math. 1978. V. 107. P. 255–286.

8. *Головина М. И.* Дивизоры дифференциалов Прима на римановой поверхности // Тр. междунар. шк.-конф. по геометрии и анализу. Кемерово, 2011. С. 193–199. (Вестн. КемГУ; № 3/1).

9. *Казанцева А. А., Чуешев В. В.* Дифференциалы Прима на конечной римановой поверхности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 89–106.

Статья поступила 15 октября 2012 г.

Тулина Марина Ивановна
Горно-Алтайский гос. университет,
ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
aniram.ru@googlemail.com