Сибирский математический журнал
Июль—август, 2013. Том 54, № 4

УДК 517.954

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КЛАССЕ МЕДЛЕННО РАСТУЩИХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

А. Л. Павлов

Аннотация. Приведены достаточные условия существования решений общих краевых задач в полупространстве для однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с произвольными граничными данными из пространства медленно растущих обобщенных функций.

Ключевые слова: краевая задача, мультипликатор, регуляризация обобщенных функций, преобразование Фурье.

1. Введение

Рассматривается общая краевая задача для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве:

$$P(\partial_x, D_y)u(x,y) \equiv \sum_{k=0}^{m} P_k(D_y)\partial_x^k u(x,y) = 0, \quad x \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$B_j(\partial_x, D_y)u(x,y)|_{x=0} \equiv \sum_{k=0}^{m_j} B_{jk}(D_y)\partial_x^k u(x,y)|_{x=0} = g_j(y), \quad j = 1,\dots,r, \tag{1.2}$$

где $D_y = (D_{y_1},\dots,D_{y_n})$, $D_{y_k} = -i\frac{\partial}{\partial y_k}$, $P_k(\sigma), B_{jk}(\sigma)$ — многочлены, $m \in \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1,\dots,r$.

Имеется множество работ, посвященных задаче (1.1), (1.2) для определенных типов уравнений. В достаточной общности эта задача рассмотрена в [1–4]. В этих работах выделен класс регулярных уравнений, для которых рассмотрены некоторые краевые задачи в классе обобщенных функций, зависящих от параметра x, который состоит из квадратично интегрируемых функций и их обобщенных производных любого порядка, имеющих в этом пространстве определенное поведение при $x \to \infty$, а также в некоторых более широких классах. Классы единственности в пространствах степенного роста и убывания для рассматриваемой задачи описаны в [5]. Необходимые и достаточные условия корректности задачи (1.1), (1.2) в пространствах функций, быстро убывающих по касательным переменным и имеющих экспоненциальное поведение на бесконечности по выделенной переменной, содержатся в [6]. Там же на основе этих результатов получены достаточные условия разрешимости задачи (1.1), (1.2) в пространствах обобщенных функций медленного роста по касательным переменным для однородного и неоднородного уравнений.

Основным приемом исследования задачи (1.1), (1.2) является применение преобразования Фурье по переменной y, которое сводит данную задачу к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$P\left(\frac{d}{dx},\sigma\right)v(x)=0,\quad x\geq 0, \tag{1.3}$$

$$B_j\left(\frac{d}{dx},\sigma\right)v(x)\bigg|_{x=0}=h_j,\quad j=1,\dots,r. \tag{1.4}$$

Решение этой задачи иногда можно представить в виде

$$v(x,\sigma)=\sum_{i=1}^{r}q_i(x,\sigma)h_i(\sigma),\quad x\geq 0, \tag{1.5}$$

где функции $q_i(x,\sigma)$ являются решениями задачи (1.3), (1.4), соответствующими граничным данным $h_i=\delta_{ij}$, $i,j=1,\dots,r$. Их обратные преобразования Фурье $k_i(x,y)$ называют *ядрами Пуассона* [7].

В [6] указаны необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность функций $q_i(x,\sigma)$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, классу мультипликаторов пространства медленно растущих обобщенных функций S', соответствующим образом зависящих от x. Этими условиями являются регулярность уравнения, гладкая факторизация многочлена $P(\lambda,\sigma)$, соответствующая разбиению λ-корней уравнения $P(\lambda,\sigma)=0$ на группы в соответствии с условием регулярности, а также выполнение условия Лопатинского.

Указанным условиям не удовлетворяет задача Дирихле для уравнения Лапласа. Это связано с нерегулярностью в точке $\sigma=0$ касательного преобразования Фурье ядра Пуассона этой задачи. В данной работе рассматривается случай, когда функции $q_i(x,\sigma)$ сингулярны в конечном числе точек.

Для граничных данных из S' построено решение задачи (1.1), (1.2) с помощью процедуры регуляризации обобщенных функций методом вычитания.

2. Регулярные уравнения

Задача (1.1), (1.2) рассматривается для регулярных уравнений, которые являются аналогом корректных по Петровскому уравнений в теории задачи Коши [8].

Предположим, что $P_m(\sigma)\neq 0$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$. Тогда уравнение

$$P(\lambda,\sigma)\equiv\sum_{k=0}^{m}P_k(\sigma)\lambda^k=0 \tag{2.1}$$

при каждом $\sigma\in\mathbb{R}^n$ имеет m корней. Занумеруем λ-корни этого уравнения в порядке неубывания вещественной части:

$$\operatorname{Re}\lambda_1(\sigma)\leq\operatorname{Re}\lambda_2(\sigma)\leq\dots\leq\operatorname{Re}\lambda_i(\sigma)\leq\dots\leq\operatorname{Re}\lambda_m(\sigma).$$

Обозначим через G_k^a множество точек $\sigma\in\mathbb{R}^n$, для которых $\operatorname{Re}\lambda_k(\sigma)\leq a$. Уравнение (1.1) называется *регулярным*, если существуют такие $a\in\mathbb{R}$ и $r\in\mathbb{N}$, что $G_r^a = \mathbb{R}^n$, а $\operatorname{mes} G_{r+1}^a=0$. Число r естественно называть *порядком регулярности уравнения* (1.1), а уравнение — *a-регулярным порядка r*. Регулярные уравнения порядка m являются корректными по Петровскому.

Примерами регулярных уравнений, кроме уравнений корректных по Петровскому, являются уравнения

$$1)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\quad 2)\ \Delta u = qu,\ q>0;\quad 3)\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0;\quad 4)\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0;$$

$$5)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+P_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+P_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0,\quad P_0(\sigma)\le 0,\ P_1(\sigma)\in\mathbb{R},\ \sigma\in\mathbb{R}^n.$$

Каждому разделению λ-корней уравнения (2.1) на две группы $M_k^-(\sigma) = \{\lambda_1(\sigma),\dots,\lambda_k(\sigma)\}$ и $M_k^+(\sigma)=\{\lambda_{k+1}(\sigma),\dots,\lambda_m(\sigma)\}$ соответствует факторизация многочлена $P(\lambda,\sigma)$, т. е. представление его в виде $P(\lambda,\sigma)=P_k^-(\lambda,\sigma)P_k^+(\lambda,\sigma)$, где

$$P_k^-(\lambda,\sigma)\equiv\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j(\sigma))=\sum_{j=0}^{k}a_{kj}^-(\sigma)\lambda^j,$$

$$P_k^+(\lambda,\sigma)\equiv P_m(\sigma)\prod_{j=k+1}^{m}(\lambda-\lambda_j(\sigma))=P_m(\sigma)\sum_{j=0}^{m-k}a_{kj}^+(\sigma)\lambda^j.$$

Функции $a_{kj}^-(\sigma)$ являются симметрическими функциями группы корней $M_k^-(\sigma)$, а $a_{kj}^+(\sigma)$ — группы $M_k^+(\sigma)$. При этом $a_{kk}^-(\sigma)=a_{km-k}^+(\sigma)\equiv 1$.

Лемма 2.1. *Если уравнение* (1.1) *a-регулярно порядка r, то функции* $a_{rj}^-(\sigma)$, $j=0,\dots,r-1$, $a_{rj}^+(\sigma)$, $j=0,\dots,m-r-1$, *обладают следующими свойствами:*

(1) *являются аналитическими в области* $\mathbb{R}^n\setminus G_{r+1}^a$;

(2) *имеют рост не выше степенного, т. е. существуют числа* c_j,ν_j *такие, что*

$$\left|a_{rj}^{\pm}(\sigma)\right|\le c_j(1+|\sigma|)^{\nu_j},\quad \sigma\in\mathbb{R}^n\setminus G_{r+1}^a.$$

Доказательство. Справедливость (1) следует из того, что в $\mathbb{R}^n\setminus G_{r+1}^a$ группы корней $M_r^-(\sigma)$ и $M_r^+(\sigma)$ разделены, т. е. для всякой точки $\sigma\in\mathbb{R}^n\setminus G_{r+1}^a$ существует замкнутый контур в λ-плоскости, охватывающий корни $\lambda_1(s),\dots,\lambda_r(s)$ и не содержащий корней $\lambda_{r+1}(s),\dots,\lambda_m(s)$ внутри себя для всех s из достаточно малой комплексной окрестности точки σ. Здесь $\lambda_i(s)$ для s с ненулевой вещественной частью определены как непрерывные продолжения соответствующих корней $\lambda_i(s)$. По классической лемме Гурса [9] симметрические функции корней $\lambda_1(s),\dots,\lambda_r(s)$ голоморфны в точках множества $\mathbb{R}^n\setminus G_{r+1}^a$.

Справедливость (2) следует из аналогичных оценок для корней $\lambda_i(\sigma)$, которые доказываются с помощью теоремы Зайденберга — Тарского [5].

Если уравнение (1.1) a-регулярно порядка r и $G_{r+1}^a=\varnothing$, то коэффициенты многочленов $P_r^-(\lambda,\sigma)$ и $P_r^+(\lambda,\sigma)$ являются мультипликаторами в пространствах S и S'. В [6] показано, что это свойство коэффициентов указанных многочленов является необходимым условием корректной разрешимости задачи (1.1), (1.2) в пространствах S и S'.

Если же уравнение (1.1) a-регулярно порядка r, но $G_{r+1}^a\ne\varnothing$, то коэффициенты многочленов $P_r^-(\lambda,\sigma)$ и $P_r^+(\lambda,\sigma)$ не являются гладкими в общим случае. Простейшим примером может служить уравнение Лапласа, для которого $P_1^-(\lambda,\sigma)=\lambda+\sqrt{\sigma_1^2+\dots+\sigma_n^2}$, $P_1^+(\lambda,\sigma)=\lambda-\sqrt{\sigma_1^2+\dots+\sigma_n^2}$.

Будем предполагать в дальнейшем, что выполняется следующее условие:

(R) $G_r^a = \mathbb{R}^n$, $G_{r+1}^a = \{0\}$, т. е. уравнение (1.1) a-регулярно порядка r и регулярность нарушается в точке $\sigma = 0$.

Из дальнейшего изложения будет видно, что в условии (R) можно предполагать конечность множества G_{r+1}^a. Ограничение случаем $G_{r+1}^a = \{0\}$ сделано для упрощения изложения.

Примеры уравнений, удовлетворяющих условию (R), показывают, что производные коэффициентов многочленов $P_r^-(\lambda, \sigma)$ и $P_r^+(\lambda, \sigma)$ имеют степенные особенности в нуле. Поэтому будем в дальнейшем также предполагать, что выполнено следующее условие:

(C) уравнение (1.1) удовлетворяет условию (R) и для любого мультииндекса α коэффициенты многочлена $P_r^-(\lambda, \sigma)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\partial^\alpha a_{rj}^-(\sigma)| \le c_{\alpha j}|\sigma|^{\rho_{\alpha j}}, \quad 0 < |\sigma| < 1,\ \rho_{\alpha j} \le 0,\ j = 0, \dots, r-1. \tag{2.2}$$

Ниже будут указаны достаточные условия, обеспечивающие следование условия (C) из (R). Если выполнено условие (R), то существует такое $p \in \mathbb{Z}_+$, что для всех $\sigma \in V \setminus \{0\}$, где V — окрестность нуля, имеют место неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda_{r-p-1}(\sigma) < \operatorname{Re}\lambda_{r-p}(\sigma) \le \dots \le \operatorname{Re}\lambda_r(\sigma) \le a < \operatorname{Re}\lambda_{r+1}(\sigma). \tag{2.3}$$

Если точка $\sigma = 0$ не является особой точкой алгебраической функции, определяемой уравнением $P(\lambda, \sigma) = 0$, то в некоторой ее окрестности существует m аналитический ветвей $\gamma_1(\sigma), \dots, \gamma_m(\sigma)$ этой функции. Их нумерация выбрана так, что для некоторой точки σ_0 из окрестности, в которой выполнены неравенства (2.3), она совпадает с нумерацией по возрастанию вещественной части корней. В силу непрерывности и условия (R) функции $\gamma_k(\sigma)$ будут в некоторой окрестности точки σ_0 удовлетворять неравенствам

$$\operatorname{Re}\gamma_i(\sigma) \le a,\ i \le r, \quad \operatorname{Re}\gamma_i(\sigma) > a,\ i > r. \tag{2.4}$$

Тогда в этой окрестности для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k(\sigma) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i^k(\sigma), \quad \sum_{i=r+1}^{m} \lambda_i^k(\sigma) = \sum_{i=r+1}^{m} \gamma_i^k(\sigma). \tag{2.5}$$

Пусть σ_1 — точка в окрестности нуля, где выполняются неравенства (2.3) и определены функции $\gamma_i(\sigma)$, $i = 1, \dots, m$, кривая $\sigma = \sigma(t)$, $0 \le t \le 1$, соединяет точки σ_0 и σ_1, лежит в этой окрестности и не проходит через точку $\sigma = 0$. Обозначим через $\gamma_1^*(\sigma), \dots, \gamma_m^*(\sigma)$ аналитические продолжения функций $\gamma_1(\sigma), \dots, \gamma_m(\sigma)$ вдоль кривой $\sigma(t)$. Для этих функций выполняются неравенства вида (2.4). В противном случае нашлась бы такая точка $\sigma^* = \sigma(t_0)$, для которой $\operatorname{Re}\lambda_{r+1}(\sigma^*) = a$, что противоречит условию (R). Следовательно, в окрестности точки σ_1 выполняются равенства (2.5).

В случае $n = 1$ нужно рассмотреть отдельно связные компоненты выколотой окрестности, а затем воспользоваться аналитичностью ветвей в окрестности точки $\sigma = 0$. Тем самым доказана

Лемма 2.2. *Если выполнено условие* (R) *и точка $\sigma = 0$ не является особой точкой алгебраической функции, определяемой уравнением $P(\lambda, \sigma) = 0$, то существует окрестность V этой точки такая, что на множестве $V \setminus \{0\}$ выполняются равенства* (2.5), *где $\gamma_i(\sigma)$, $i = 1, \dots, m$, — аналитические ветви рассматриваемой алгебраической функции, определенные в окрестности V.*

Из леммы 2.2 следует аналитичность функций

$$\Phi_{rk}^-(\sigma) = \lambda_1^k(\sigma) + \dots + \lambda_r^k(\sigma), \quad \Phi_{rk}^+(\sigma) = \lambda_{r+1}^k + \dots + \lambda_m^k(\sigma)$$

в окрестности неособой точки $\sigma = 0$. С помощью формул Ньютона [10] для многочленов $P_r^-(\lambda, \sigma)$, $P_r^+(\lambda, \sigma)$, выражающих связь между степенными суммами корней $\Phi_{rk}^-(\sigma)$ и $\Phi_{rk}^+(\sigma)$ и элементарными симметрическими функциями этих корней $a_{rk}^-(\sigma)$, $k = 0, \dots, r$, и $a_{rj}^+(\sigma)$, $j = 0, \dots, m-r$, устанавливается аналитичность коэффициентов многочленов $P_r^-(\lambda, \sigma)$ и $P_r^+(\lambda, \sigma)$ в окрестности не особой точки $\sigma = 0$. Тогда из леммы 2.1 следует, что эти коэффициенты являются мультипликаторами в пространствах S и S'. В этом случае имеют место все результаты из [6].

Предположим теперь, что $\sigma = 0$ является особой точкой рассматриваемой алгебраической функции, но существует m ее аналитических ветвей в некоторой выколотой (вещественной) окрестности $V \setminus \{0\}$. Если $n = 1$, то это выполняется всегда. Точка $\sigma = 0$ для уравнения $\lambda^2 - \left(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2\right) = 0$, $n > 1$, обладает этим свойством.

Пусть $\gamma(\sigma)$ — одна из указанных ветвей. Продифференцировав равенство $P(\gamma(\sigma), \sigma) = 0$, $\sigma \in V \setminus \{0\}$, по i-й переменной, получим формулу для производной $\partial_i \gamma(\sigma)$:

$$\partial_i \gamma(\sigma) = -\frac{\partial_i P(\lambda, \sigma)|_{\lambda=\gamma(\sigma)}}{\partial_\lambda P(\lambda, \sigma)|_{\lambda=\gamma(\sigma)}}, \quad \sigma \in V \setminus \{0\}. \tag{2.6}$$

Так как рассматриваемая точка $\sigma = 0$ особая, не исключено, что $\partial_\lambda P(\lambda, 0)|_{\lambda=\gamma(0)} = 0$ и производные $\gamma(\sigma)$ имеют особенности в нуле.

Лемма 2.3. *Если в некоторой окрестности V особой точки $\sigma = 0$ алгебраической функции, определяемой уравнением $P(\lambda, \sigma) = 0$, нет других ее особых точек и многочлен $P(\lambda, \sigma)$ не имеет кратных полиномиальных делителей, то в некоторой окрестности $V' \subset V$ особой точки $\sigma = 0$ справедливо неравенство*

$$|\partial_\lambda P(\lambda, \sigma)|_{\lambda=\gamma(\sigma)}| > c|\sigma|^\nu, \quad \sigma \in V' \setminus \{0\}, \tag{2.7}$$

где $c > 0$, $\nu \geq 0$ — некоторые числа, $\gamma(\sigma)$ — аналитическая ветвь алгебраической функции.

Доказательство. Из условия леммы следует, что дискриминант многочлена $P(\lambda, \sigma)$ не обращается в нуль на множестве $V \setminus \{0\}$. Тогда каждая точка этого множества имеет окрестность, в которой существует m аналитических ветвей алгебраической функции [11, добавление A]. Выбрав эти ветви в одной из точек и рассмотрев их аналитические продолжения вдоль кривых, лежащих в области $V \setminus \{0\}$, получим m аналитических ветвей $\gamma_1(\sigma), \dots, \gamma_m(\sigma)$ при $n > 1$. Если же $n = 1$, то речь идет о связных компонентах множества $V \setminus \{0\}$.

Рассмотрим функцию $d(\rho) = \inf\limits_{|\sigma|=\rho,\ 1 \leq i \leq m} |\partial_\lambda P(\lambda, \sigma)|_{\lambda=\gamma_i(\sigma)}|$ и систему полиномиальных уравнений и неравенств

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m} P_k(\sigma)\zeta^k = 0, & \zeta = \xi + i\eta, \\ d^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{m} k P_k(\sigma)\zeta^{k-1}\right)^2, & \sigma^2 = \rho^2,\ \rho > 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

которая эквивалентна системе полиномиальных уравнений и неравенств с вещественными коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^{n+4}$. По теореме Зайденберга — Тарского проекция множества решений системы (2.8) в пространстве $\mathbb{R}^{n+4}$ на пространство $\mathbb{R}^2 = \{(d; \rho)\}$ является полуалгебраическим множеством [11, добавление A]. Из предыдущих рассуждений вытекает, что $d(\rho) \neq 0$ и для каждого $\rho > 0$ существуют такие $\sigma(\rho)$ и k, что $d(\rho) = |d_\lambda P(\lambda, \sigma(\rho))|_{\lambda=\gamma_k(\sigma(\rho))}$. Следовательно, в каждой из конечных систем вещественных полиномиальных уравнений и неравенств, определяющих полученное полуалгебраическое множество, имеется уравнение. Поэтому существует такой многочлен $f(\rho, d)$, что $f(\rho, d(\rho)) = 0$. Значит, $d(\rho)$ является кусочно-алгебраической функцией и имеет место представление $d(\rho) = a\rho^\nu(1 + o(1))$, где $a \neq 0$, $o(1) \to 0$ при $\rho \to 0$ [11]. Так как $d(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, то $\nu > 0$. Из этого представления следует неравенство (2.7) с учетом того, что для конкретной ветви $\nu \geq 0$.

Из леммы 2.3 и формулы (2.6) вытекает, что в выколотой окрестности особой точки $\sigma = 0$ для произвольной ветви $\gamma(\sigma)$ справедливо неравенство

$$|\partial_i \gamma(\sigma)| \leq c_i |\sigma|^\mu, \quad \mu \leq 0, \ i = 1, \dots, n. \tag{2.9}$$

Такие же оценки справедливы для производных любого порядка.

Пусть $P(\gamma(\sigma), \sigma) = 0$, $\sigma \in V \setminus \{0\}$ и $\partial^{\alpha'} = \partial^\alpha \partial_i$. Воспользовавшись формулой Лейбница, получим равенство

$$\partial_\sigma^{\alpha'}[P(\gamma(\sigma), \sigma)] = \partial_\sigma^\alpha(\partial_i P(\lambda, \sigma)|_{\lambda=\gamma(\sigma)}) + \sum_{\beta \leq \alpha} \partial_\sigma^{\alpha-\beta}(\partial_\lambda P(\lambda, \sigma)|_{\lambda=\gamma(\sigma)}) \partial_\sigma^\beta \partial_i \gamma(\sigma) = 0.$$

Выразим из него производную наивысшего порядка:

$$\partial_\sigma^{\alpha'} \gamma(\sigma) = -\frac{\partial_\sigma^\alpha(\partial_i P(\lambda, \sigma)|_{\lambda=\gamma(\sigma)}) + \sum\limits_{\beta < \alpha} \partial_\sigma^{\alpha-\beta}(\partial_\lambda P(\lambda, \sigma)|_{\lambda=\gamma(\sigma)}) \partial_\sigma^\beta \partial_i \gamma(\sigma)}{\partial_\lambda P(\lambda, \sigma)|_{\lambda=\gamma(\sigma)}}. \tag{2.10}$$

Числитель полученного равенства является многочленом относительно функции $\gamma(\sigma)$ и ее производных до порядка, меньшего $|\alpha'|$.

Лемма 2.4. *Если в некоторой окрестности V особой точки $\sigma = 0$ алгебраической функции, определяемой уравнением $P(\lambda, \sigma) = 0$, нет других ее особых точек и многочлен $P(\lambda, \sigma)$ не имеет кратных полиномиальных делителей, то для каждой аналитической ветви $\gamma(\sigma)$ этой функции, определенной в некоторой выколотой окрестности точки $\sigma = 0$, справедливы неравенства*

$$|\partial^\alpha \gamma^k(\sigma)| \leq c_{\alpha k} |\sigma|^{\nu_{\alpha k}}, \quad \nu_{\alpha k} \leq 0, \ k \in \mathbb{N}, \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{2.11}$$

Доказательство. При $|\alpha| = 1$ неравенство (2.11) доказано в (2.9). Предположим, что оно верно для всех α, $|\alpha| = p$. Тогда его справедливость для α', $|\alpha'| = p + 1$, следует из равенства (2.10), неравенства (2.7) и предположения. Значит, неравенство (2.11) выполняется для всех α.

Из леммы 2.4 вытекают достаточные условия выполнения условия (C).

Лемма 2.5. *Если выполнено условие* (R), *точка $\sigma = 0$ является изолированной особой точкой в $\mathbb{R}^n$ алгебраической функции, определяемой уравнением $P(\lambda, \sigma) = 0$, и многочлен $P(\lambda, \sigma)$ не имеет кратных полиномиальных делителей, то выполнено условие* (C).

Доказательство. Из формул Ньютона для многочлена $P_r^-(\lambda, \sigma)$ следует, что неравенство (2.2) в условии (C) будет выполняться, если справедливы аналогичные неравенства для производных функций $\Phi_{rk}^-(\sigma) = \lambda_1^k(\sigma) + \dots + \lambda_r^k(\sigma)$.

Из условия леммы вытекает существование m аналитических ветвей $\gamma_i(\sigma)$, $i = 1, \dots, m$, рассматриваемой аналитической функции, определенных в выколотой окрестности $V \setminus \{0\}$ точки $\sigma = 0$. Нумерацию ветвей выберем так, что в некоторой точке $\sigma_0 \in V \setminus \{0\}$ она совпадает с нумерацией корней по возрастанию их вещественных частей. Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 2.2, приходим к равенству (2.5) для $\sigma \in V \setminus \{0\}$. Применив неравенства (2.11), получим оценки для производных функций $\Phi^-_{rk}(\sigma)$.

Если $n = 1$, то особые точки алгебраической функции, определяемой уравнением $P(\lambda, \sigma) = 0$, изолированные. В этом случае можно показать, что условие (C) следует из условия (R).

3. Функциональные пространства и регуляризируемые мультипликаторы в них

Пространство медленно растущих обобщенных функций S' является пространством линейных непрерывных функционалов над основным пространством S, состоящим из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(y)$, для которых конечны полунормы

$$\|\varphi(y)\|_{l,k} = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \Big[(1+|y|)^l \sum_{|\alpha|\le k} \big|D_y^\alpha \varphi(y)\big|\Big], \quad l,k = 0,1,2,\dots.$$

Рассмотрим семейство подпространств S', зависящих от параметров s и l:

$$H_l^s = \left\{ f \in S' : \|f\|_l^s \equiv \left[\int (1+|\sigma|^2)^s |\mathscr{F}_y((1+|y|^2)^{l/2} f)|^2 \, d\sigma\right]^{1/2} < +\infty \right\},$$

где $\mathscr{F}_y g$ — преобразование Фурье обобщенной функции $g \in S'$. Это двупараметрическое семейство гильбертовых пространств обладает замечательными свойствами [8], в частности

1) сопряженное к пространству H_l^s изоморфно пространству H_{-l}^{-s};

2) пространства H_l^s и H_s^l двойственны относительно преобразования Фурье $\mathscr{F}$;

3) S' является индуктивным пределом семейства пространств H_l^s.

Через C_l^s, где $s \ge 0$ — целое, а l — произвольное числа, обозначим пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций с конечной нормой

$$|\varphi|_l^s = \sup_{y\in\mathbb{R}^n,\, |\alpha|\le s} |(1+|y|^2)^{l/2} D_y^\alpha \varphi(y)|.$$

Пространства C_l^s банаховы. Для любых $s \in \mathbb{Z}_+$ и $l \in \mathbb{R}$ имеют место неравенства [8]

$$\|\varphi\|_{l-p}^s \le c_1 |\varphi|_l^s \le c_2 \|\varphi\|_l^{s+q}, \quad p,q > \frac{n}{2}. \tag{3.1}$$

Через $C_{ap}^k\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s\big)$, где $k \in \mathbb{Z}_+$, $a,p \in \mathbb{R}$, обозначим пространство k раз непрерывно дифференцируемых отображений $v(x)$ замкнутой полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$ в гильбертово пространство H_l^s с конечной нормой:

$$|||v(x)|||_{C_{ap}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)} \equiv \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}_+,\, 0\le\nu\le k} \left[(1+x)^{-p} e^{-ax} \left\| \frac{d^\nu v(x)}{dx^\nu} \right\|_l^s \right]. \tag{3.2}$$

Пространство $C_{ap}^k\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s\big)$ банахово. Преобразование Фурье по y отображает изоморфно пространство $C_{ap}^k\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s\big)$ на $C_{ap}^k\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l\big)$.

Имеют место непрерывные вложения

$$C_{ap}^k\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s\big) \subset C_{ap'}^k\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{l'}^{s'}\big), \quad s \ge s',\ l \ge l',\ p \le p'.$$

Учитывая эти вложения, можно с помощью операции объединения построить пространства $C^k_{a\infty}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H^s_l\big)$. В топологии индуктивного предела эти пространства полные локально выпуклые. Пользуясь свойствами пространств H^s_l, можно определить пространство $C^k_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ как индуктивный предел этих пространств. Пространство $C^k_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ является полным локально выпуклым пространством, инвариантным относительно преобразования Фурье. Функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^k_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$, если существуют такие s, l и p, что $u(x) \in C^k_{ap}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H^s_l\big)$.

Аналогично определяется пространство $C^k_{a\infty}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, C^s_l\big)$.

Решения задачи (1.1), (1.2) будут рассматриваться в пространствах $C^k_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$, $C^k_{a\infty}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H^s_l\big)$ при $k \geq \overline{m} = \max\{m, m_1, \dots, m_r\}$. Граничные данные в (1.2) принадлежат соответственно пространствам S', H^s_l.

Если для любых s, l найдутся такие s', l' и p, что из принадлежности $g_j \in H^s_l$ следует принадлежность решения $u(x)$ пространству $C^k_{ap}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H^{s'}_{l'}\big)$ и выполняется неравенство

$$|||u(x)|||_{C^k_{ap}\left(\overline{\mathbb{R}}_+, H^{s'}_{l'}\right)} \leq c \sum_{j=1}^{r} \|g_j\|^s_l, \tag{3.3}$$

то имеет место непрерывная зависимость решения $u(x) \in C^k_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ от граничных данных $g_j \in S'$.

Построение решения задачи (1.3), (1.4) в классе функций $C^k_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ основано на построении регуляризации функции $q(x,\sigma)h$, где $h \in S'$, а функция $q(x,\sigma)$ для любых мультииндекса β и $k \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет неравенствам

$$\left|\partial^k_x \partial^\beta_\sigma q(x,\sigma)\right| \leq c_{\beta k}(1+x)^{\nu_{\beta k}} e^{ax}(1+|\sigma|)^{\mu_{\beta k}} |\sigma|^{\rho_{\beta k}}, \quad x \geq 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{3.4}$$

где $c_{\beta k}, \nu_{\beta k}, \mu_{\beta k}, \rho_{\beta k} \leq 0$ — некоторые числа. Для произвольной функции $h \in S'$ обозначим через $[q(x,\sigma)h]_j$ регуляризацию обобщенной функции $q(x,\sigma)h \in D'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, определенную равенством

$$([q(x,\sigma)h]_j, \varphi) = (h, q(x,\sigma)\varphi_j), \tag{3.5}$$

где $\varphi \in S$, $\varphi_j(\sigma) = \varphi(\sigma) - \mu(\sigma)\big(\sum\limits_{|\alpha| \leq j-1} \varphi^\alpha(0)\frac{\sigma^\alpha}{\alpha!}\big)$, $\mu(\sigma) \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, $\mu(\sigma) = 1$ при $|\sigma| \leq \varepsilon$. Возможность построения указанной регуляризации основана на следующем утверждении.

Лемма 3.1. *Если функция $q(x,\sigma)$ удовлетворяет неравенствам* (3.4), *то для любых $s \in \mathbb{R}$, $l, k \in \mathbb{Z}_+$ существует $j \in \mathbb{N}$ такое, что $q(x,\sigma)\varphi_j \in C^k_{a\infty}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, C^l_s\big)$ и соответствующее отображение $Q_j : S \to C^k_{a\infty}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, C^l_s\big)$ непрерывно.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\sup_{\sigma\in\mathbb{R}^n} \left[(1+|\sigma|)^s \left|\partial^k_x \partial^\beta_\sigma (q(x,\sigma)\varphi_j(\sigma))\right|\right] \\ \leq C(1+x)^{\tau_{\beta k}} e^{ax} \sup_{\sigma\in\mathbb{R}^n} \Big[(1+|\sigma|)^{s_j} \sum_{|\gamma|\leq l_j} |\varphi^\gamma(\sigma)|\Big], \tag{3.6}$$

где $x \geq 0$, $C > 0$, $\tau_{\beta k}, s_j, l_j$ — некоторые числа, выбор j зависит от $q(x,\sigma)$.

Для доказательства неравенства (3.6) воспользуемся формулой Лейбница и неравенствами (3.4). Имеем

$$(1+|\sigma|)^s \left|\partial^k_x \partial^\beta_\sigma (q(x,\sigma)\varphi_j(\sigma))\right| \\ \leq c_\beta \sum_{\gamma\leq\beta} c_{\gamma k}(1+x)^{\nu_{\gamma k}} e^{ax}(1+|\sigma|)^{s+\mu_{\gamma k}} |\sigma|^{\rho_{\gamma k}} \left|\partial^{\beta-\gamma}_\sigma \varphi_j(\sigma)\right|. \tag{3.7}$$

Здесь запись $\gamma \le \beta$ означает, что $\beta_i - \nu_i \ge 0$, $i = 1, \dots, n$. Чтобы из него получить неравенство (3.6), нужно оценить множитель $|\sigma|^{\rho_{\gamma k}} |\partial^{\beta-\gamma}\varphi_j(\sigma)|$. Для этого воспользуемся равенством $\partial^{\beta-\gamma}\varphi_j(\sigma) = (1-\nu(\sigma))\partial^{\beta-\gamma}\varphi_j(\sigma) + \nu(\sigma)\partial^{\beta-\gamma}\varphi_j(\sigma)$, где $\nu(\sigma) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\nu(\sigma) = 1$ при $|\sigma| \le \delta$, $\nu(\sigma)\mu(\sigma) = \nu(\sigma)$. Первое слагаемое в этом представлении функции $\partial^{\beta-\gamma}\varphi_j(\sigma)$ принадлежит пространству S и равно нулю в некоторой окрестности точки $\sigma = 0$. Поэтому справедливы неравенства

$$|\sigma|^{\rho_{\gamma k}} |(1-\nu(\sigma))\partial^{\beta-\gamma}\varphi_j(\sigma)| \le c''_{\gamma k}\Big(|\partial^{\beta-\gamma}\varphi(\sigma)| + \sum_{|\alpha|\le j-1} |\varphi^\alpha(0)|\Big). \tag{3.8}$$

Для оценки выражения, связанного со вторым слагаемым в указанном представлении, воспользуемся равенством

$$|\nu(\sigma)\partial^{\beta-\gamma}\varphi_j(\sigma)| = \big|\nu(\sigma)\partial^{\beta-\gamma}R_j^\varphi(\sigma)\big|,$$

где $R_j^\varphi(\sigma)$ — остаточный член в формуле Тейлора. Здесь мы воспользовались конструкцией функции $\varphi_j(\sigma)$ и тем, что $\nu(\sigma)\mu(\sigma) = \nu(\sigma)$. Используя формулу остаточного члена $R_j^\varphi(\sigma)$ в интегральной форме, имеем равенства

$$\big|\nu(\sigma)\partial^{\beta-\gamma}R_j^\varphi(\sigma)\big| = \left|\nu(\sigma)\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{j-1}}{(j-1)!} \sum_{|\alpha|=j}\sum_{\rho<\beta-\gamma} \varphi^{\alpha+\rho}(t\sigma)P_{\alpha\rho}(\sigma,t)\,dt\right|,$$

где $P_{\alpha\rho}(\sigma,t)$ — многочлены, слагаемые которых по σ имеют степень не ниже $j - |\beta-\gamma|$, а по t — не выше $|\beta-\gamma|$.

Предполагая, что $t\,\mathrm{supp}\,\nu \subset \mathrm{supp}\,\nu$, $0 \le t \le 1$, имеем

$$|\sigma|^{\rho_{\gamma k}}\big|\nu(\sigma)\partial^{\beta-\gamma}R_j^\varphi(\sigma)\big| \\ \le \tilde{c}_{\gamma k} \sup_{\sigma\in\mathrm{supp}\,\nu}\Big[\sum_{|\alpha|=j}\sum_{\rho<\beta-\gamma}|\varphi^{\alpha+\rho}(\sigma)|\Big] \sup_{\sigma\in\mathrm{supp}\,\nu}|\sigma|^{j-|\beta-\gamma|+\rho_{\gamma k}}. \tag{3.9}$$

За счет выбора j показатели $j - |\beta-\gamma| + \rho_{\gamma k}$ можно сделать положительными для всех $\gamma \le \beta$ и всех k, не превосходящих фиксированного числа. Для такого значения j из неравенств (3.8) и (3.9) следует неравенство

$$||\sigma|^{\rho_{\gamma k}}\partial^{\beta-\gamma}\varphi_j(\sigma)| \le \hat{c}_{\gamma k}\Big(|\partial^{\beta-\gamma}\varphi(\sigma)| + \sum_{|\alpha|\le j-1}|\varphi^\alpha| \\ + \sup_{\sigma\in\mathrm{supp}\,\nu}\Big[\sum_{|\alpha|=j}\sum_{\rho<\beta-\gamma}|\varphi^{\alpha+\rho}(\sigma)|\Big]\Big).$$

Подставляя эту оценку в правую часть неравенства (3.7) и беря сначала верхнюю грань по $\sigma \in \mathbb{R}^n$ правой части полученного неравенства, а затем — левой, получим неравенство (3.6), откуда

$$|||q(x,\sigma)\varphi_j(\sigma)|||_{C^k_{ap}\left(\overline{\mathbb{R}}_+, C_s^l\right)} \le c|\varphi|_{s'}^{l'}, \tag{3.10}$$

где $l \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{R}$ — произвольно выбранные числа, l', s', p — некоторые числа, зависящие от l, s, j. Из этого неравенства следует непрерывность указанного в лемме отображения.

Из описания структуры пространства S' получим, что для любой $h \in S'$ существуют такие l и s, что $h \in H_s^l$. В силу леммы 3.1 указанная в (3.5) регуляризация существует. Тогда имеет место неравенство

$$([q(x,\sigma)h]_j, \varphi) \le \|h\|_s^l \|q(x,\sigma)\varphi_j\|_{-s}^{-l}.$$

Если $l \le 0$, то из (3.1) и (3.6) следуют неравенства

$$\|q(x,\sigma)\varphi_j\|_{-s}^{-l} \le c_1 |q(x,\sigma)\varphi_j|_{-s+\frac{n}{2}+\varepsilon}^{[-l]+1} \le c_2(1+x)^{\nu_j} e^{ax} |\varphi|_{s_j}^{l_j}$$
$$\le c_3(1+x)^{\nu_j} e^{ax} \|\varphi\|_{s_j}^{l_j+\frac{n}{2}+\delta},$$

где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, ν_j, l_j, s_j — некоторые числа, $[a]$ — целая часть числа a. В этом случае имеем

$$|([q(x,\sigma)h]_j, \varphi)| \le c_4(1+x)^{\nu_j} e^{ax} \|h\|_s^l \|\varphi\|_{s_j}^{l_j'}. \tag{3.11}$$

Такой же вывод можно сделать и при $l > 0$, учитывая вложение $H_{-s}^0 \subset H_{-s}^{-l}$.

Из (3.11) следует, что функция $[q(x,\sigma)h]_j$ при всех $x \ge 0$ принадлежит пространству $H_{-s_j}^{-l_j'}$. Непрерывная зависимость от x, возможно, в более широком пространстве вытекает из равенства

$$([q(x+\Delta x,\sigma)h]_j, \varphi) - ([q(x,\sigma)h]_j, \varphi) = (h, q_x(x+\theta\Delta x,\sigma)\varphi_j(\sigma))\Delta x, \quad 0 \le \theta \le 1. \tag{3.12}$$

Следовательно, найдутся такие s', l', p', что $[q(x,\sigma)h]_j \in C_{ap}^0\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{l'}\big)$ и справедливо неравенство

$$|||[q(x,\sigma)h_j]|||_{C_{ap}^0\left(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{l'}\right)} \le c\|h\|_s^l.$$

Из (3.12) следует также равенство

$$\frac{d}{dx}[q(x,\sigma)h]_j = [q_x(x,\sigma)h]_j. \tag{3.13}$$

Для этого достаточно показать, что функция $q_x(x+\theta\Delta x,\sigma)\varphi_j$ стремится к функции $q_x(x,\sigma)\varphi_j$ в пространстве C_s^l для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ при достаточно большом j. Оценим норму разности этих функций в пространстве C_s^l:

$$|q_x(x+\theta\Delta x,\sigma)\varphi_j - q_x(x,\sigma)\varphi_j|_s^l \le c\Delta x \sup_{|\alpha|\le l,\, \sigma\in\mathbb{R}^n} \big[(1+|\sigma|)^s \big|\partial_\sigma^\alpha q_{xx}(x+\theta_1\Delta x,\sigma)\varphi_j\big|\big].$$

Ограниченность выражения, стоящего под знаком sup, следует из неравенств (3.4) для функции $q(x,\sigma)$ и доказательства леммы 3.1. Следовательно, указанная выше норма разности функций стремится к нулю при $\Delta x \to 0$.

Используя приведенные рассуждения, можно обеспечить принадлежность функций $[q(x,\sigma)h]_j$ некоторому пространству $C_{ap}^k\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{l'}\big)$ для всех функций $h \in H_s^l$ за счет выбора параметра j и тем самым справедливость утверждения, которое будет в основе всех дальнейших построений.

Лемма 3.2. *Если функция $q(x,\sigma)$ удовлетворяет неравенствам* (3.4), *то для любой обобщенной функции $h \in H_s^l$ и любого $k \in \mathbb{N}$ существуют такие числа j, l', s' и p, что $[q(x,\sigma)h]_j \in C_{ap}^k\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{l'}\big)$ и*

$$|||[q(x,\sigma)h]_j|||_{C_{ap}^k\left(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{l'}\right)} \le C\|h\|_s^l. \tag{3.14}$$

В лемме 3.2 утверждается, что умножение обобщенной функции из S' на функцию допускает продолжение до функции из S', хотя функция не является мультипликатором в S' из-за нерегулярности в нуле. Такие функции естественно называть *регуляризируемыми мультипликаторами*.

Применение леммы 3.2 для построения решения краевой задачи (1.3), (1.4) будет связано с переходом от уравнения вида (1.3) к его матричной записи

$$\frac{dV}{dx} = \mathscr{P}(\sigma)V(x), \quad x \ge 0, \tag{3.15}$$

где $V(x) = \big(v(x), \dots, \frac{d^{m-1}v(x)}{dx^{m-1}}\big)^T$, а матрица $\mathscr{P}(\sigma)$ составлена по уравнению.

Лемма 3.3. *Если собственные числа $\lambda(\sigma)$ матрицы $\mathscr{P}(\sigma)$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda(\sigma) \le a$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, а ее элементы $p_{ij}(\sigma)$ — неравенствам*

$$|\partial^\alpha p_{ij}(\sigma)| \le c_\alpha (1+|\sigma|)^{\mu_\alpha} |\sigma|^{\rho_\alpha}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ i,j = 1,\dots,r, \tag{3.16}$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\mu_\alpha, \rho_\alpha \le 0$ — некоторые числа, то элементы матрицы $e^{x\mathscr{P}(\sigma)}$ являются регуляризируемыми мультипликаторами в S', гладко зависящими от параметра x, и справедливо неравенство

$$\left\|\partial_x^p \partial_\sigma^\beta e^{x\mathscr{P}(\sigma)}\right\| \le c_{\beta k}(1+x)^{\nu_{\beta k}} e^{ax} (1+|\sigma|)^{\mu_{\beta k}} |\sigma|^{\rho_{\beta k}}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ x \ge 0, \tag{3.17}$$

где $c_{\beta k} > 0$, $\nu_{\beta k}, \mu_{\beta k}, \rho_{\beta k} \le 0$ — некоторые числа.

Доказательство. Пользуясь оценкой матричной экспоненты (см, например, [12]), неравенствами $\operatorname{Re}\lambda(\sigma) \le a$ и (3.16), имеем при $x \ge 0$ неравенство

$$\|e^{x\mathscr{P}(\sigma)}\| \le c_0 (1+x)^{r-1} e^{ax} (1+|\sigma|)^{\mu_0} |\sigma|^{\rho_0}.$$

С помощью формулы Лейбница, неравенств (3.16) и полученной оценки можно доказать неравенства (3.17) для производных матричной функции.

Из неравенств (3.17) и леммы 3.2 следует, что элементы матрицы $e^{x\mathscr{P}(\sigma)}$ являются регуляризируемыми мультипликаторами в S', которые порождают непрерывные отображения из H_s^l в пространства $C_{ap}^k\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{l'}\big)$.

4. Построение решения краевой задачи

Разрешимость задачи (1.1), (1.2) в пространстве $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$, $k \ge \max\{m, m_1, \dots, m_r\}$, эквивалентна разрешимости задачи (1.3), (1.4) в этом же пространстве. Будем предполагать, что уравнение (1.1) удовлетворяет условию (C) разд. 2, а граничные условия (1.2) — условию, которое является одной из форм условия Лопатинского:

(L) для любого $\sigma \in \mathbb{R}^n$ задача (1.3), (1.4) разрешима в $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Обозначим через $B_j'(\lambda,\sigma)$ остаток от деления λ-многочлена $B_j(\lambda,\sigma)$ на λ-многочлен $P^-_{\nu_a(\sigma)}(\lambda,\sigma)$, где $\nu_a(\sigma)$ — число λ-корней уравнения $P(\lambda,\sigma) = 0$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\lambda(\sigma) \le a$. Степень $B_j'(\lambda,\sigma)$ равна $\nu_a(\sigma) - 1$:

$$B_j'(\lambda,\sigma) = \sum_{i=1}^{\nu_a(\sigma)} B_{ji}'(\sigma)\lambda^{i-1}.$$

Лемма 4.1. *Задача* (1.3), (1.4) *для данного $\sigma \in \mathbb{R}^n$ разрешима для любых $h_1(\sigma), \dots, h_r(\sigma)$ в пространстве $C_{a\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\operatorname{rank}(B_{ji}'(\sigma)) = r. \tag{4.1}$$

Доказательство. Всякое решение $v(x,\sigma)$ задачи (1.3), (1.4) из пространства $C_{ap}^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$ является решением задачи

$$P^-_{\nu_a(\sigma)}\left(\frac{d}{dx},\sigma\right) v(x,\sigma) = 0, \quad x \ge 0, \tag{4.2}$$

$$B_j'\left(\frac{d}{dx},\sigma\right) v(x,\sigma)\Big|_{x=0} = h_j(\sigma), \quad j = 1,\dots,r. \tag{4.3}$$

Справедливость этого утверждения следует из представления всякого решения уравнения (1.3) в виде $v(x,\sigma) = v^-(x,\sigma) + v^+(x,\sigma)$, где слагаемые $v^-(x,\sigma)$ и $v^+(x,\sigma)$ удовлетворяют условиям

$$P^-_{\nu_a(\sigma)}\left(\frac{d}{dx},\sigma\right)v^-(x,\sigma) = 0, \quad P^+_{\nu_a(\sigma)}\left(\frac{d}{dx},\sigma\right)v^+(x,\sigma) = 0.$$

Указанное представление вытекает из равенства

$$P^-_{\nu_a(\sigma)}(\lambda,\sigma)R^-_{\nu_a(\sigma)}(\lambda,\sigma) + P^+_{\nu_a(\sigma)}(\lambda,\sigma)R^+_{\nu_a(\sigma)}(\lambda,\sigma) = 1,$$

где $R^-_{\nu_a(\sigma)}(\lambda,\sigma), R^+_{\nu_a(\sigma)}(\lambda,\sigma)$ — λ-многочлены. Это равенство можно получить при помощи алгоритма Евклида для взаимно простых многочленов $P^-_{\nu_a(\sigma)}(\lambda,\sigma)$ и $P^+_{\nu_a(\sigma)}(\lambda,\sigma)$. Из принадлежности $v(x,\sigma)$ пространству $C^k_{ap}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ следует, что $v^+(x,\sigma) = 0$ [6]. Значит, решение задачи (1.3), (1.4) из пространства $C^k_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ является решением задачи (4.2), (4.3).

Если условие (4.1) не выполнено, то одна из строк матрицы $(B'_{ji}(\sigma))$ является линейной комбинацией других. Следовательно, в граничных условиях (4.3) правые части $h_1(\sigma),\dots,h_r(\sigma)$ не могут быть произвольными.

При выполнении условия (4.1) система линейных уравнений

$$(B'_{ji}(\sigma))W(\sigma) = H(\sigma),$$

где $W(\sigma) = (w_1(\sigma),\dots,w_{\nu_a(\sigma)}(\sigma))^T$, $H(\sigma) = (h_1(\sigma),\dots,h_r(\sigma))^T$, разрешима для любых $h_1(\sigma),\dots,h_r(\sigma)$. При этом решение системы можно выбрать непрерывно зависящим от $h_1(\sigma),\dots,h_r(\sigma)$. По данным Коши $w_1(\sigma),\dots,w_{\nu_a(\sigma)}(\sigma)$ однозначно определяется решение $v(x,\sigma)$ уравнения (4.2), которое принадлежит пространству $C^k_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ и непрерывно зависит от $w_1(\sigma),\dots,w_{\nu_a(\sigma)}(\sigma)$, а следовательно, и от $h_1(\sigma),\dots,h_r(\sigma)$.

Рассмотрим функции $q_i(x,\sigma)$, $i = 1,\dots,r$, являющиеся решениями задачи (1.3), (1.4) с граничными данными $h_j = \delta_{ji}$, $i,j = 1,\dots,r$, и принадлежащие при фиксированном σ пространству $C^k_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Из доказательства леммы 4.1 следует, что при выполнении условия (R) такие решения удовлетворяют уравнению

$$P^-_r\left(\frac{d}{dx},\sigma\right)q(x,\sigma) = 0, \quad x \ge 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{4.4}$$

Граничные условия (1.4) можно записать в следующем виде:

$$B'_j\left(\frac{d}{dx},\sigma\right)q(x,\sigma)\bigg|_{x=0} = \delta_{ji}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ i,j = 1,\dots,r. \tag{4.5}$$

Условие (L) в точках множества $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ принимает вид

$$\det(B'_{ji}(\sigma)) \ne 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{4.6}$$

По лемме 4.1 при каждом $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существуют функции $q_i(x,\sigma)$, принадлежащие пространству $C^k_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Лемма 4.2. *Если выполнены условия* (C) *и* (L), *то для функций* $q_i(x,\sigma)$, $i = 1,\dots,r$, *справедливы неравенства*

$$\left|\partial^p_x\partial^\alpha_\sigma q_i(x,\sigma)\right| \le C_{\alpha p}(1+x)^{\nu_{\alpha p}}e^{ax}(1+|\sigma|)^{\mu_{\alpha p}}|\sigma|^{\rho_{\alpha p}}, \quad x \ge 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{4.7}$$

где $C_{\alpha p} > 0$, $\nu_{\alpha p}, \mu_{\alpha p}, \rho_{\alpha p} \leq 0$ — *некоторые числа.*

Доказательство. Запишем уравнение (4.4) и граничные условия (4.5) в матричном виде:

$$\frac{dQ(x,\sigma)}{dx} = \mathscr{P}_r^-(\sigma)Q(x,\sigma), \quad x \geq 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{4.8}$$

$$\mathscr{B}'(\sigma)Q(0,\sigma) = \Omega_i, \quad i = 1,\dots,r,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{4.9}$$

где $Q(x,\sigma) = \big(q(x,\sigma),\dots,\frac{d^{r-1}q(x,\sigma)}{dx^{r-1}}\big)^T$, $\Omega_i = (\delta_{1i},\delta_{2i},\dots,\delta_{ri})^T$, матрица $\mathscr{P}_r^-(\sigma)$ составлена по уравнению (4.4), $\mathscr{B}'(\sigma) = (B'_{ji}(\sigma))$.

Из леммы 2.1 следует, что элементы матриц $\mathscr{P}_r^-(\sigma), \mathscr{B}'(\sigma)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Из условия (4.6) вытекает существование матрицы $\mathscr{B}'(\sigma)^{-1}$, обратной к матрице $\mathscr{B}'(\sigma)$, элементы которой также бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда условия (4.9) равносильны заданию начальных данных $Q_i(\sigma) = \mathscr{B}'(\sigma)^{-1}\Omega_i$:

$$Q(0,\sigma) = Q_i(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ i = 1,\dots,r. \tag{4.10}$$

Решения $Q_i(x,\sigma)$, $i = 1,\dots,r$, задачи (4.8), (4.10) можно представить в виде

$$Q_i(x,\sigma) = e^{x\mathscr{P}_r^-(\sigma)}Q_i(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ x \geq 0.$$

Из приведенных выше утверждений следует, что функции $Q_i(x,\sigma)$ являются бесконечно дифференцируемыми по x и по σ на множестве $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Используя формулу Лейбница, для любых $p \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем неравенства

$$\big\|\partial_x^p\partial_\sigma^\alpha Q_i(x,\sigma)\big\| \leq c_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} \big\|\partial_\sigma^\beta\partial_x^p e^{x\mathscr{P}_r^-(\sigma)}\big\|\big\|\partial_\sigma^{\alpha-\beta}Q_i(\sigma)\big\|, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Из условия (С) вытекает, что матрица $\mathscr{P}_r^-(\sigma)$ удовлетворяет условию леммы 3.3. Поэтому для матричной экспоненты $e^{x\mathscr{P}_r^-(\sigma)}$ справедливы неравенства вида (3.17). Если для вектор-функции $Q_i(\sigma)$ верны неравенства

$$\|\partial^\gamma Q_i(\sigma)\| \leq c_\gamma(1+|\sigma|)^{\tau_\gamma}|\sigma|^{\mu_\gamma}, \tag{4.11}$$

где $\tau_\gamma, \mu_\gamma \leq 0$ — некоторые числа, то имеем неравенства

$$\big\|\partial_x^p\partial_\sigma^\alpha Q_i(x,\sigma)\big\| \leq C'_{\alpha p}(1+x)^{\nu'_{\alpha p}}e^{ax}(1+|\sigma|)^{\mu'_{\alpha p}}|\sigma|^{\rho'_{\alpha p}}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ x \geq 0.$$

Из этих неравенств следует, что функции $q_i(x,\sigma)$ как элементы вектор-функций $Q_i(x,\sigma)$ удовлетворяют неравенствам (4.7).

Докажем справедливость неравенств (4.11). Из построения матрицы $\mathscr{B}'(\sigma)$ и свойств функций $a_{ri}^-(\sigma)$ при выполнении условия (С) следует, что элементы матрицы $\mathscr{B}'(\sigma)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\partial^\alpha B'_{ji}(\sigma)| \leq c_\alpha(1+|\sigma|)^{\tau_\alpha}|\sigma|^{\rho_\alpha}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{4.12}$$

где $c_\alpha, \tau_\alpha, \rho_\alpha \leq 0$ — некоторые числа. Справедливость аналогичных неравенств для элементов матрицы $\mathscr{B}'(\sigma)^{-1}$ получим из неравенства

$$|\det\mathscr{B}'(\sigma)| > C(1+|\sigma|)^\omega|\sigma|^\tau, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{4.13}$$

где $C > 0$, $\omega, \tau \leq 0$ — некоторые числа. Положим

$$d(\rho) = \inf_{|\sigma|=\rho}|\det(B'_{ji}(\sigma))|, \quad \rho > 0.$$

Обозначим через $R_{ji}(\sigma,\zeta_1,\dots,\zeta_r)$ коэффициент при λ^{i-1} остатка от деления многочлена $B_j(\lambda,\sigma)$ на многочлен $\prod\limits_{k=1}^{r}(\lambda-\zeta_k)$. Рассмотрим систему полиномиальных уравнений и неравенств

$$\begin{cases} -P_{m-1}(\sigma)=P_m(\sigma)(\zeta_1+\dots+\zeta_m), \\ P_{m-2}(\sigma)=P_m(\sigma)(\zeta_1\zeta_2+\zeta_1\zeta_3+\dots+\zeta_{m-1}\zeta_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (-1)^m P_0(\sigma)=P_m(\sigma)\zeta_1\dots\zeta_m, \\ \zeta_1=\xi_1+i\eta_1,\dots,\zeta_m=\xi_m+i\eta_m, \quad \xi_1\le\dots\le\xi_r<\xi_{r+1}\le\dots\le\xi_m, \\ \sigma_1^2+\dots+\sigma_n^2=\rho^2,\ \rho>0, \quad \det{}^2(R_{ji}(\sigma,\zeta_1,\dots,\zeta_r))=d^2. \end{cases}$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве леммы 2.3, приходим к существованию такого многочлена $f(\rho,d)$, что $f(\rho,d(\rho))=0$, $\rho>0$. Значит, имеют место представления [11]

$$d(\rho)=a\rho^{\tau}(1+o(1)), \quad \text{где } a\ne0,\ o(1)\to0 \text{ при } \rho\to0,\ \tau>0,$$

$$d(\rho)=b\rho^{\mu}(1+o(1)), \quad \text{где } b\ne0,\ o(1)\to0 \text{ при } \rho\to\infty.$$

Из этих представлений следует неравенство (4.13).

Рассмотрим $v_j(x)=\sum\limits_{i=1}^{r}[q_i(x,\sigma)h_i]_j$, где $h_i\in H_s^l$. При сделанных предположениях о краевой задаче (1.3), (1.4) и вытекающих из них свойств функций $q_i(x,\sigma)$ можно утверждать на основании леммы 3.2, что $v_j(x)\in C_{ap}^k(\overline{\mathbb{R}}_+,H_{s'}^{l'})$, где параметры p,l',s' зависят от s,l и показателей в неравенствах (4.7) для функций $q_i(x,\sigma)$ и справедливо неравенство

$$|||v_j(x)|||_{C_{ap}^k(\overline{\mathbb{R}}_+,H_{s'}^{l'})}\le C\sum_{i=1}^{r}\|h_i\|_s^l. \tag{4.14}$$

Так как в $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ верны равенства

$$v_j(x)=\sum_{i=1}^{r}q_i(x,\sigma)h_i \quad \text{и} \quad P\left(\frac{d}{dx},\sigma\right)q_i(x,\sigma)h_i=0,\ i=1,\dots,r,$$

из описания обобщенных функций, сосредоточенных в точке, имеем

$$P\left(\frac{d}{dx},\sigma\right)v_j(x)=\sum_{|\alpha|\le\nu_0}a_\alpha(x)(-1)^{|\alpha|}\delta^\alpha, \tag{4.15}$$

где параметр ν_0 зависит от выбора регуляризации $v_j(x)$. Из (4.15) следует равенство $a_{\alpha_0}(x)=\big(P\big(\frac{d}{dx},\sigma\big)v_j(x),\varphi_{\alpha_0}\big)$, где $\varphi_{\alpha_0}\in S$, $\partial^{\alpha_0}\varphi_{\alpha_0}(0)=1$, $\partial^\alpha\varphi_{\alpha_0}(0)=0$, $\alpha\ne\alpha_0$, $|\alpha|\le\nu_0$. Это равенство можно записать в виде

$$a_{\alpha_0}(x)=\sum_{i=1}^{r}\left(h_i,\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial^k q_i(x,\sigma)}{\partial x^k}\left(P_k(\sigma)\varphi_{\alpha_0}(\sigma)-\mu(\sigma)\left(\sum_{|\alpha|\le j-1}\frac{\sigma^\alpha}{\alpha!}(P_k\varphi_{\alpha_0})^\alpha(0)\right)\right)\right).$$

Из этого представления функций $a_\alpha(x)$ и рассуждений, приведенных в доказательстве лемм 3.1 и 3.2, следует, что за счет выбора параметра j при построении регуляризации $v_j(x)$ можно обеспечить принадлежность функций $a_\alpha(x)$ пространству $C_{aq}^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$, где $q\in\mathbb{R}$, и справедливость неравенств

$$\|a_\alpha(x)\|_{C_{aq}^k(\overline{\mathbb{R}}_+)}\le C_\alpha\sum_{i=1}^{r}\|h_i\|_s^l. \tag{4.16}$$

Аналогично равенству (4.15) устанавливается равенство

$$B_i\left(\frac{d}{dx},\sigma\right)v_j(x)\Big|_{x=0} = h_i + \sum_{|\alpha|\le\nu_i} h_{i\alpha}(-1)^{|\alpha|}\delta^\alpha, \quad h_{i\alpha}\in\mathbb{R},\ i=1,\dots,r. \tag{4.17}$$

Так как функция $v_j(x)$ является решением задачи (1.3), (1.4) в $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, решение $\tilde v_j(x)$ этой задачи во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ будем искать в виде $\tilde v_j(x) = v_j(x)+w_j(x)$. Из равенств (4.15) и (4.17) следует, что функция $\tilde v_j(x)$ — решение задачи (1.3), (1.4) тогда и только тогда, когда функция $w_j(x)$ является решением задачи

$$P\left(\frac{d}{dx},\sigma\right)w(x) = -\sum_{|\alpha|\le\nu_0} a_\alpha(x)(-1)^{|\alpha|}\delta^\alpha, \quad x\ge 0, \tag{4.18}$$

$$B_i\left(\frac{d}{dx},\sigma\right)w(x)\Big|_{x=0} = -\sum_{|\alpha|\le\nu_i} h_{i\alpha}(-1)^{|\alpha|}\delta^\alpha, \quad i=1,\dots,r. \tag{4.19}$$

Будем искать решение этой задачи среди функций вида

$$w(x) = \sum_{|\alpha|\le\nu} w_\alpha(x)(-1)^{|\alpha|}\delta^\alpha, \quad w_\alpha\in C^k_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+),\ \nu=\max\{\nu_0,\dots,\nu_r\}.$$

Подставив функцию $w(x)$ в левую часть уравнения (4.18), преобразовав ее и воспользовавшись линейной независимостью обобщенных функций δ^α, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{\beta\le\alpha}^{|\alpha|=\nu} C_\alpha^\beta\left(\sum_{i=0}^m \partial^{\alpha-\beta}P_i(0)\frac{d^i w_\alpha(x)}{dx^i}\right) = \tilde a_\beta(x) = \begin{cases} -a_\beta(x) & \text{при } |\beta|\le\nu_0,\\ 0 & \text{при } \nu_0<|\beta|\le\nu,\end{cases} \tag{4.20}$$

где $C_\alpha^\beta = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$. Аналогичное рассмотрение для граничных условий (4.19) приводит к системе граничных условий для функций $w_\alpha(x)$

$$\sum_{\beta\le\alpha}^{|\alpha|=\nu} C_\alpha^\beta\left(\sum_{k=0}^{m_i} \partial^{\alpha-\beta}B_{ik}(0)\frac{d^k w_\alpha(x)}{dx^k}\right) = \tilde h_{i\beta} = \begin{cases} -h_{i\beta} & \text{при } |\beta|\le\nu_i,\\ 0 & \text{при } \nu_i<|\beta|\le\nu.\end{cases} \tag{4.21}$$

Разрешимость задачи (4.18), (4.19) сведено к разрешимости системы краевых задач (4.20), (4.21). Рассмотрим сначала уравнения из (4.20) и условия из (4.21), соответствующие мультииндексам β, модуль которых равен ν. Тогда $\alpha=\beta$ и соответствующие краевые задачи имеют вид

$$\sum_{i=0}^m P_i(0)\frac{d^i w_\alpha(x)}{dx^i} = \tilde a_\alpha(x), \quad x\ge 0,\ |\alpha|=\nu, \tag{4.22}$$

$$\sum_{k=0}^{m_i} B_{ik}(0)\frac{d^k w_\alpha(x)}{dx^k}\Big|_{x=0} = \tilde h_{i\alpha}, \quad i=1,\dots,r,\ |\alpha|=\nu. \tag{4.23}$$

Разрешимость этих задач в пространстве $C^k_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ является одним из условий существования решения задачи (4.18), (4.19).

Лемма 4.3. *Для любой функции $a(x) \in C^p_{b\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $b \le a$, существует решение уравнения $P\big(\frac{d}{dx},0\big)w(x) = a(x)$, принадлежащее пространству $C^{p+m}_{a\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ и непрерывно зависящее в нем от $a(x)$.*

Доказательство. По предположению справедливы неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda_1(0) \le \dots \le \operatorname{Re}\lambda_{r'}(0) \le a,\ r' > r, \quad \operatorname{Re}\lambda_{r'+1}(0) = a+\varepsilon,\ \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$P^-_{r'}\left(\frac{d}{dx},0\right)w(x) = v(x), \quad x \ge 0, \tag{4.24}$$

$$P^+_{r'}\left(\frac{d}{dx},0\right)v(x) = a(x), \quad x \ge 0. \tag{4.25}$$

Перейдем к матричной записи уравнения (4.25):

$$\frac{dV(x)}{dx} = \mathscr{P}^+_{r'}(0)V(x) + A(x), \quad x \ge 0, \tag{4.26}$$

где $V(x) = \big(v(x), \frac{dv(x)}{dx}, \dots, \frac{d^{m-r'-1}v(x)}{dx^{m-r'-1}}\big)^T$, $A(x) = \big(0,\dots,0,\frac{1}{P_m(0)}a(x)\big)^T$, а матрица $\mathscr{P}^+_{r'}(0)$ составлена по уравнению (4.25). Одним из решений этого уравнения будет вектор-функция

$$V(x) = -\int\limits_x^\infty e^{(x-t)\mathscr{P}^+_{r'}(0)}A(t)\,dt, \quad x \ge 0.$$

Для подынтегральной матричной функции справедлива оценка

$$\|e^{(x-t)\mathscr{P}^+_{r'}(0)}\| \le c(1+t-x)^\tau e^{(a+\varepsilon)(x-t)}, \quad t \ge x.$$

Пользуясь этой оценкой и принадлежностью функции $a(x)$ некоторому пространству $C^p_{bq}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, получим оценку для нормы вектор-функции $V(x)$:

$$\|V(x)\| \le C_1(1+x)^\tau a^{(a+\varepsilon)x}\int\limits_x^\infty (1+t)^{\tau+q}e^{(b-a+\varepsilon)t}\,dt\|a(t)\|_{C^0_{bq}(\overline{\mathbb{R}}_+)}.$$

Так как по условию $b < a+\varepsilon$, интеграл в правой части полученного неравенства можно оценить так:

$$\int\limits_x^\infty (1+t)^{\tau+q}e^{(b-a+\varepsilon)t}\,dt \le C_2e^{(b-a-\varepsilon)x}(1+x)^{\tau+q+1}.$$

Следовательно, вектор-функция $V(x)$, $x \ge 0$, корректно определена, и для нее справедливо неравенство

$$\|V(x)\| \le C_3(1+x)^{2\tau+q+1}e^{bx}\|a(x)\|_{C^0_{bq}(\overline{\mathbb{R}}_+)}.$$

Аналогичные оценки справедливы и для производных $V(x)$ по x. Их можно получить, дифференцируя равенство (4.26) по x и пользуясь тем, что $a(x) \in C^p_{bq}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Из этих оценок следует неравенство

$$\|v(x)\|_{C^{p+m-r'}_{bq'}(\overline{\mathbb{R}}_+)} \le C_4\|a(x)\|_{C^p_{bq}(\overline{\mathbb{R}}_+)}. \tag{4.27}$$

Рассмотрим теперь уравнение (4.24) в матричном виде

$$\frac{dW(x)}{dx} = \mathscr{P}^-_{r'}(0)W(x) + \widetilde{V}(x), \quad x \geq 0,$$

где $W(x) = (w(x), \ldots, \frac{d^{r'-1}w(x)}{dx^{r'-1}})^T$, $\widetilde{V}(x) = (0, \ldots, 0, v(x))^T$, а матрица $\mathscr{P}^-_{r'}(0)$ составлена по уравнению (4.24). Одним из решений этого уравнения будет вектор-функция

$$W(x) = \int\limits_0^x e^{(x-t)\mathscr{P}^-_{r'}(0)}\widetilde{V}(t)\,dt, \quad x \geq 0.$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, получим неравенство

$$\|w(x)\|_{C^{p+m}_{a\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+)} \leq C_5\|v(x)\|_{C^{p+m-r'}_{bq'}(\overline{\mathbb{R}}_+)}. \tag{4.28}$$

Функция $w(x) \in C^{p+m}_{a\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ является решением данного уравнения и удовлетворяет неравенству

$$\|w(x)\|_{C^{p+m}_{a\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+)} \leq C\|a(x)\|_{C^p_{bq}(\overline{\mathbb{R}}_+)}. \tag{4.29}$$

Это следует из уравнений (4.24), (4.25) и неравенств (4.27), (4.28).

Применение леммы 4.3 сводит построение решения задачи (4.22), (4.23) к построению решения этой же задачи, но при $\tilde{a}_\alpha(x) = 0$ и граничных данных

$$h'_{i\alpha} = \tilde{h}_{i\alpha} - B_i\left(\frac{d}{dx}, 0\right)w_{\alpha H}(x)\Big|_{x=0},$$

где через $w_{\alpha H}(x)$ обозначено решение неоднородного уравнения (4.22), построенное в лемме 4.3.

По построению граничные данные $h'_{i\alpha}$, $|\alpha| = \nu$, являются непрерывными полилинейными функционалами от обобщенных функций $h_1, \ldots, h_r$. Это свойство функционалов $\tilde{h}_{i\alpha}$ следует из равенств

$$\tilde{h}_{i\alpha_0} = \left(B_i\left(\frac{d}{dx}, \sigma\right)v_j(x)\Big|_{x=0} - h_i, \varphi_{\alpha_0}\right), \tag{4.30}$$

где $\varphi_{\alpha_0} \in S$, $\partial^{\alpha_0}\varphi_{\alpha_0}(0) = 1$, $\partial^\alpha\varphi_{\alpha_0}(0) = 0$, $\alpha \neq \alpha_0$, $|\alpha| \leq \nu_i$. Пользуясь леммой 3.2, равенством (3.13) и неравенством (4.14), нетрудно получить оценки

$$\left\|B_i\left(\frac{d}{dx}, \sigma\right)v_j(x)\Big|_{x=0}\right\|^{l'}_{s''} \leq C_1\sum_{i=1}^r \|h_i\|^l_s.$$

Из равенств (4.30) и приведенных оценок следуют неравенства

$$|\tilde{h}_{i\alpha}| \leq C_2\sum_{i=1}^r \|h_i\|^l_s. \tag{4.31}$$

Оценим теперь второе слагаемое в выражении для $h'_{i\alpha}$. Функции $a_\alpha(x) = \big(P\big(\frac{d}{dx}, \sigma\big)v_j, \varphi_\alpha\big)$ принадлежат $C^k_{aq}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, и для них справедливы неравенства (4.16). Используя (4.29), можно получить оценки

$$\left|B_i\left(\frac{d}{dx}, 0\right)w_{\alpha H}(x)\Big|_{x=0}\right| \leq C_3\|a(x)\|_{C^k_{aq}(\overline{\mathbb{R}}_+)}.$$

Следовательно, справедливы неравенства

$$\left| B_i\left(\frac{d}{dx}, 0\right) w_{\alpha H}(x)\Big|_{x=0} \right| \le C_4 \sum_{i=1}^{r} \|h_i\|_s^l.$$

Используя их и (4.31), получим неравенства

$$|h'_{i\alpha}| \le C_5 \sum_{i=1}^{r} \|h_i\|_s^l, \tag{4.32}$$

из которых следует непрерывная зависимость $h'_{i\alpha}$ от функций $h_1, \dots, h_r$.

Если выполнено условие (L), то существует решение задачи (4.22), (4.23) в случае, когда уравнение (4.22) однородное. Воспользовавшись приведенными рассуждениями и неравенствами, можно утверждать, что для всех мультииндексов α, $|\alpha| = \nu$, существуют решения $w_\alpha(x) \in C^k_{aq}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ краевых задач (4.22), (4.23) и для них справедливы неравенства

$$\|w_\alpha(x)\|_{C^k_{aq}(\overline{\mathbb{R}}_+)} \le C \sum_{i=1}^{r} \|h_i\|_s^l. \tag{4.33}$$

Рассмотрим уравнения из (4.20) и условия из (4.21), соответствующие мультииндексам β, модуль которых равен $\nu - 1$:

$$\sum_{i=0}^{m} P_i(0) \frac{d^i w_\beta(x)}{dx^i} + \sum_{j=1}^{n} C^\beta_{\beta_j} \sum_{i=0}^{m} \partial_j P_i(0) \frac{d^i w_{\beta_j}(x)}{dx^i} = \tilde{a}_\beta(x), \quad x \ge 0, \tag{4.34}$$

$$\sum_{k=0}^{m_i} B_{ik}(0) \frac{d^k w_\beta(x)}{dx^k}\Big|_{x=0} + \sum_{j=1}^{n} C^\beta_{\beta_j} \sum_{k=0}^{m_i} \partial_j B_{ik}(0) \frac{d^k w_{\beta_j}(x)}{dx^k} = \tilde{h}_{i\beta}(x), \quad i = 1, \dots, r, \tag{4.35}$$

где $\beta_j = \beta + (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{nj})$. Так как $|\beta_j| = \nu$, вторые слагаемые в левых частях равенств (4.34), (4.35) уже определены. Тогда функции $w_\beta(x)$, $|\beta| = \nu - 1$, являются решениями краевых задач вида (4.22), (4.23). Совершенно аналогично рассмотренному выше находятся эти решения, удовлетворяющие неравенствам вида (4.33). К аналогичным выводам приводит рассмотрение мультииндексов порядка $\nu - 2, \nu - 3, \dots, 0$.

Теорема. *Если уравнение* (1.1) *удовлетворяет условию* (C), *а граничные условия* (1.2) — *условию* (L), *то для любых обобщенных функций* $g_j \in H^s_l$, $j = 1, \dots, r$, *существует решение* $u(x)$ *задачи* (1.1), (1.2), *принадлежащее пространству* $C^k_{aq}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H^{s'}_{l'}\big)$, *где* $k \ge \max\{m, m_1, \dots, m_r\}$, s', l', q — *некоторые числа и это решение удовлетворяет неравенству*

$$|||u(x)|||_{C^k_{aq}\left(\overline{\mathbb{R}}_+, H^{s'}_{l'}\right)} \le C \sum_{i=1}^{r} \|g_i\|_l^s. \tag{4.36}$$

Доказательство. Задача (1.1), (1.2) эквивалентна задаче (1.3), (1.4). При выполнении условий (C) и (L) задача (1.3), (1.4) имеет решение

$$\tilde{v}_j(x) = \sum_{i=1}^{r} [q_i(x, \sigma) h_i]_j + w_j(x),$$

где параметр j зависит от $h_i, q_i(x,\sigma)$, а функция $w_j(x)$ является решением задачи (4.18), (4.19). По построению

$$\sum_{i=1}^{r}[q_i(x,\sigma)h_i]_j \in C^k_{aq}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H^{l''}_{s''}\big), \quad w_j(x) \in C^k_{aq}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H^{l_\nu}_0\big),$$

где $l_\nu = -\nu - \frac{n}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при соответствующем выборе параметров l'', s'', q. Пользуясь для функций $w_\beta(x)$ оценками вида (4.33), имеем неравенство

$$|||w_j(x)|||_{C^k_{aq}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^{l_\nu}_0)} \le C_1 \sum_{|\beta|\le\nu} \|w_\beta(x)\|_{C^k_{aq}(\overline{\mathbb{R}}_+)} \le C_2 \sum_{i=1}^{r} \|h_i\|^l_s.$$

Из этого неравенства и (4.14) следует неравенство

$$|||\tilde{v}_j(x)|||_{C^k_{aq}\left(\overline{\mathbb{R}}_+, H^{l'}_{s'}\right)} \le C \sum_{i=1}^{r} \|h_i\|^l_s,$$

где $l' = \min\{l'', l_\nu\}$, $s' = \min\{s'', 0\}$. Это неравенство равносильно неравенству (4.36).

Аналогично работе [6] может быть рассмотрена разрешимость краевой задачи (1.1), (1.2) в случае, когда уравнение (1.1) неоднородно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дикополов Г. В., Шилов Г. Е.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24. С. 380–396.
2. *Дикополов Г. В., Шилов Г. Е.* О корректных краевых задачах в полупространстве для уравнений в частных производных с правой частью // Сиб. мат. журн. 1960. Т. 1, № 1. С. 45–61.
3. *Паламодов В. П.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24. С. 381–386.
4. *Дикополов Г. В.* О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве // Мат. сб. 1962. Т. 59. С. 215–228.
5. *Павлов А. Л.* Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве // Мат. сб. 1977. Т. 103, № 3. С. 367–391.
6. *Павлов А. Л.* Корректность общих краевых задач в полупространстве для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классах функций степенного роста и убывания // Укр. мат. вестн. 2010. Т. 7, № 1. С. 73–118.
7. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. Ч. 1.
8. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 4. С. 65–143.
9. *Гурса Э.* Курс математического анализа. М.; Л.: Гостехиздат, 1933. Т. II.
10. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
11. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1986.
12. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994. Т. 1. Краевые задачи.

Статья поступила 10 августа 2012 г.

Павлов Александр Леонидович
Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 83001, Украина
alex4909@gmail.com