Сибирский математический журнал
Июль—август, 2013. Том 54, № 4

УДК 517.54

ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ЧАСТИЧНЫХ СУММ НЕКОТОРЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

М. Обрадович, С. Поннусами, К.-Й. Виртс

Аннотация. Пусть $\mathscr{G}(\alpha)$ — класс локально однолистных нормированных аналитических функций f в единичном круге $|z| < 1$, удовлетворяющих условию:

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < 1 + \frac{\alpha}{2} \quad \text{при } |z| < 1$$

для некоторого $0 < \alpha \leq 1$. Доказаны точные оценки модулей коэффициентов a_n разложения $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ в ряд Тейлора. Установлены точные оценки функционала Фекете — Сегё для функций из $\mathscr{G}(\alpha)$ с комплексным параметром λ. Дана характеризация свертки для функций f из $\mathscr{G}(\alpha)$ и получены достаточные условия на коэффициенты, чтобы f принадлежала $\mathscr{G}(\alpha)$. Обсуждается почти выпуклость и звездообразность частичных сумм $f \in \mathscr{G}(\alpha)$. В частности, любая частичная сумма $s_n(z)$ функции $f \in \mathscr{G}(1)$ звездообразна в круге $|z| \leq 1/2$ при $n \geq 11$. Кроме того, $\mathrm{Re}(s_n'(z)) > 0$ в круге $|z| \leq 1/2$ для $n \geq 11$ при $f \in \mathscr{G}(1)$.

Ключевые слова: аналитическая функция, однолистная функция, звездообразная функция, почти выпуклая функция, выпуклая функция, коэффициентное неравенство, теорема площади, радиус однолистности, соподчинение, свертка, функционал Фекете — Сегё.

1. Введение

Пусть $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ для $r > 0$ и $\mathbb{D} := \mathbb{D}_1$ — открытый единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $\mathscr{A}$ — семейство всех аналитических в $\mathbb{D}$ функций f вида

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1}$$

Класс однолистных функций из $\mathscr{A}$ обычно обозначается через $\mathscr{S}$. Функция $f \in \mathscr{S}$ называется *звездообразной*, если $f(\mathbb{D})$ звездообразная (относительно начала координат), т. е. каждый отрезок, соединяющий начало координат с $w \in f(\mathbb{D})$, полностью лежит в $f(\mathbb{D})$. Класс всех звездообразных функций обозначается через $\mathscr{S}^*$, и функции $f \in \mathscr{S}^*$ характеризуются условием

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

В течение многих лет интенсивно исследуется класс $\mathscr{S}$ и его подклассы выпуклых и почти выпуклых отображений, которые обозначаются через $\mathscr{C}$ и $\mathscr{K}$

Работа первого автора поддержана грантом MNZZS (№ ON174017), Сербия.

соответственно. Эти классы вместе с классом типично-вещественных аналитических функций и классом функций, выпуклых в некотором направлении, хорошо изучены (см. [1, 2]).

Если $f \in \mathscr{S}$ вида (1) произвольна, то согласно принципу максимума модуля n-я *частичная сумма*/сечение $s_n(z) := z + \sum\limits_{k=2}^{n} a_k z^k$ функции f однолистна в каждом компактном подкруге $\overline{\mathbb{D}_r}$ круга $\mathbb{D}$ при условии, что n достаточно большое. Таким образом, можно получить однолистные полиномы в $\mathscr{S}$, полагая $p_n(z) = r^{-1}s_n(rz)$. Следовательно, множество всех однолистных полиномов плотно относительно топологии локально равномерной сходимости в классе $\mathscr{S}$. В 1928 г. Сегё [3] доказал, что если $f \in \mathscr{S}$, то любая частичная сумма $s_n(z)$ функции f однолистна в круге $\mathbb{D}_{1/4}$. Ясно, что частичные суммы $f \in \mathscr{S}$ не обязательно однолистны всюду в единичном круге $\mathbb{D}$, что показывает выпуклая однолистная функция $f(z) = z/(1-z)$. Кроме того, вторая частичная сумма $s_2(z) = z + 2z^2$ функции Кёбе $k(z) = z/(1-z)^2$ однолистная в $\mathbb{D}_{1/4}$, и радиус $1/4$ наилучший из возможных (см. [1, § 8.2, с. 241–246] и близкие вопросы в обзоре [4]). Радиус звездообразности частичной суммы $s_n(z)$ функции $f \in \mathscr{S}^*$ найден в [5].

Теорема A [5] (см. также [6, теорема 2, с. 1193]). *Если функция $f \in \mathscr{S}$ либо звездообразная, либо выпуклая, либо типично-вещественная, либо выпуклая в направлении мнимой оси, то найдется N такое, что для $n \geq N$ частичная сумма $s_n(z)$ обладает тем же свойством в $\mathbb{D}_r$, где $r \geq 1 - 3n^{-1}\log n$.*

Позже в [7] Рушвей доказал более сильный результат, что частичные суммы $s_n(z)$ функции f действительно звездообразны в $\mathbb{D}_{1/4}$ для f, принадлежащей не только $\mathscr{S}$, но и замкнутой выпуклой оболочке $\mathscr{S}$. Далее в [5] показано, что сечения функции Кёбе $k(z)$ однолистны в круге $|z| < 1 - 3n^{-1}\log n$ для $n \geq 5$ и константа 3 не может быть уменьшена. В [8] замечено, что в результате модификации доказательства Сегё [3] получается

$$r_n \geq 1 - (4+\epsilon)n^{-1}\log n$$

для любого $\epsilon > 0$ и всех больших n, так что $s_n(z)$ у функции $f \in \mathscr{S}$ однолистны в $|z| < r_n$. Функция Кёбе экстремальна для многих базовых функционалов на $\mathscr{S}$, поэтому представляет особый интерес. Однако в [9, с. 408] замечено, что функция Кёбе экстремальна не далее чем на радиус однолистности частичных сумм $f \in \mathscr{S}$. Нахождение точного (наибольшего) радиуса однолистности r_n функции $s_n(z)$ ($f \in \mathscr{S}$) остается нерешенной задачей (см. [1, § 8.2, с. 246; 10, § 6.4]). Тем не менее из результата работы [11] (см. также [12]) относительно свертки следует, что если f принадлежит $\mathscr{C}$, $\mathscr{S}^*$ или $\mathscr{K}$, то ее n-е сечение соответственно выпукло, звездообразно или почти выпукло в круге $|z| < 1 - 3n^{-1}\log n$, $n \geq 5$. Относительно класса $\mathscr{S}$ в [13] доказана следующая

Теорема B. *Пусть $f \in \mathscr{S}$. Тогда каждое сечение $s_n(z)$ функции f звездообразно в круге $|z| \leq 1/2$ для всех $n \geq 47$.*

В данной статье рассмотрим класс $\mathscr{G}(\alpha)$ и обсудим различные его свойства. Локально однолистная функция $f \in \mathscr{A}$ *принадлежит* $\mathscr{G}(\alpha)$ для некоторого $\alpha > 0$, если она удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < 1 + \frac{\alpha}{2}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2}$$

В [14] введен класс $\mathscr{G}(1) \equiv \mathscr{G}$ и доказано, что функции из $\mathscr{G}$ однолистны в $\mathbb{D}$. Затем в [15] рассмотрена обобщенная версия этого класса. Кроме того, доказано, что функции из $\mathscr{G}$ звездообразны в $\mathbb{D}$ (см., например, [16, пример 1, (16); 17, теорема 1], а также [18]). Таким образом, класс $\mathscr{G}(\alpha)$ содержится в $\mathscr{S}^*$ при $\alpha \in (0,1]$. Легко видеть, что функции из $\mathscr{G}(\alpha)$ не обязательно однолистны в $\mathbb{D}$, если $\alpha > 1$. Однако, насколько нам известно, нет точной оценки коэффициентов $|a_n|$ для функций из $\mathscr{G}(\alpha)$. В теореме 1 эта проблема решена методом Рогозинского [19].

Для функций $f \in \mathscr{A}$ вида (1) классический коэффициентный функционал Фекете — Сегё

$$\Lambda_\lambda(f) = a_3 - \lambda a_2^2$$

играет важную роль в теории функций. Проблема максимизации абсолютной величины функционала $\Lambda_\lambda(f)$ называется *задачей Фекете — Сегё* (см. [20]). Например, если $f \in \mathscr{S}$ и $\lambda \in (0,1)$, то в силу теоремы Фекете — Сегё из [20] (см. также [1, теорема 3.8]) имеем

$$\left|a_3 - \lambda a_2^2\right| \le 1 + 2\exp(-2\lambda/(1-\lambda)) \quad \text{при } \lambda \in (0,1).$$

Равенство достигается для функции $f \in \mathscr{S}$ и вещественных коэффициентов. Полагая $\lambda \to 1-$, получаем элементарное неравенство $\left|a_3 - a_2^2\right| \le 1$ для $f \in \mathscr{S}$. Решению задачи Фекете — Сегё для различных подклассов $\mathscr{S}$ посвящены работы многих авторов (см. [21–25] и недавнюю работу [26] для класса вогнутых функций).

Статья организована следующим образом. Во-первых, докажем точные оценки для коэффициентов a_n разложения $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ в ряд Тейлора. Во-вторых, решим задачу Фекете — Сегё для функций класса $\mathscr{G}(\alpha)$ с комплексным параметром λ. В-третьих, представим характеризацию в терминах свертки принадлежности f классу $\mathscr{G}(\alpha)$. В разд. 4 представлены несколько лемм, которые далее в разд. 5 используются в рассуждениях о почти выпуклости и звездообразности сечений $f \in \mathscr{G}(\alpha)$.

2. Оценки коэффициентов и функционал Фекете — Сегё

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ для некоторого $0 < \alpha \le 1$ и $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Тогда*

$$|a_n| \le \frac{\alpha}{n(n-1)} \quad \text{\textit{при} } n \ge 2.$$

Равенство достигается для функции f_n такой, что $f_n'(z) = (1 - z^{n-1})^{\alpha/(n-1)}$, $n \ge 2$.

Доказательство. Пусть $g(z) = zf'(z)$, где $f \in \mathscr{G}(\alpha)$. Тогда в силу (2) необходимо рассмотреть функции g, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) < \gamma = 1 + \frac{\alpha}{2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

что равносильно тому, что

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\gamma - \frac{zg'(z)}{g(z)}}{\gamma - 1}\right) > 0, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3}$$

Поскольку у рассматриваемой функции вещественная часть нормирована так, что ее значение в начале координат равно 1, существует аналитическая функция $\omega : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ такая, что

$$\frac{\gamma - \frac{zg'(z)}{g(z)}}{\gamma - 1} = \frac{1 + z\omega(z)}{1 - z\omega(z)}. \tag{4}$$

В результате несложных вычислений получаем

$$zg'(z) - g(z) = z\omega(z)(zg'(z) + (1 - 2\gamma)g(z)). \tag{5}$$

Пусть

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n.$$

Тогда $b_n = na_n$ при $n \geq 1$, где $a_1 = 1$. Этого достаточно, чтобы найти границы оценки модулей коэффициентов Тейлора b_n, $n \geq 2$. Для этого используем теорему 2.2 из [27] (ср. также [19, 28, 29]), согласно которой с учетом (5) для любого $N \geq 2$ верно неравенство

$$\sum_{k=2}^{N} |(k-1)b_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{N-1} |(k-1-\alpha)b_k|^2, \quad \alpha = 2(\gamma - 1).$$

Поскольку $b_1 = 1$, по индукции получаем

$$|b_n| \leq \frac{\alpha}{n-1} \tag{6}$$

для любого $n \geq 2$. Равенство в (6) может быть достигнуто, если и только если $b_m = 0$, $m = 1, \dots, n-1$. Учтя это в (5) и предположив равенство в (6), замечаем, что $\omega(z) = z^{n-2}$, $n \geq 2$. Таким образом, верхняя граница достигается для функции

$$g_n(z) = zf_n'(z) = z(1 - z^{n-1})^{\alpha/(n-1)}, \quad n \geq 2.$$

Теорема доказана. $\square$

Для локально однолистной аналитической функции f из $\mathbb{D}$ пре-шварцева производная T_f функции f определяется так: $T_f = f''/f'$. Определим норму T_f по правилу

$$\|T_f\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)|T_f(z)|.$$

Это действительно норма относительно операций Хорнича (см. [30]). Известно, что если $\|T_f\| \leq 1$, то f однолистна в $\mathbb{D}$. С другой стороны, любая однолистная функция $f \in \mathscr{S}$ обязательно удовлетворяет условию $\|T_f\| \leq 6$, и оценка 6 точная (см. [31]).

Из теоремы 1 следует, что можно установить точное множество значений функционала $(1 - |z|^2)T_f(z)$, $f \in \mathscr{G}(\alpha)$, что дает точную верхнюю границу для пре-шварцевой нормы $\|T_f\|$.

Следствие 1. *Пусть $\alpha \in (0, 1]$ фиксировано. Тогда множеством значений функционала $(1 - |z|^2)T_f(z)$, $f \in \mathscr{G}(\alpha)$, является замкнутый круг с центром в начале координат и радиусом 2α.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{G}(\alpha)$. Ввиду (3) или (4) для функций $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ (при $g = zf'$) имеем

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{\alpha\omega(z)}{1 - z\omega(z)}.$$

Отсюда в силу условия $|\omega(z)| \le 1$ приходим к оценке

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \le \frac{\alpha}{1-|z|},$$

стало быть,

$$(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \le \alpha(1+|z|) < 2\alpha.$$

Граница 2α точная, что показывает функция $f(z)$, для которой $f'(z) = (1-z)^\alpha$. $\square$

В частности, следствие 1 показывает, что любая $f \in \mathscr{G}$ обязательно удовлетворяет точному неравенству $\|T_f\| \le 2$.

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ для некоторого $0 < \alpha \le 1$ и $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Тогда*

$$\left|a_3 - \lambda a_2^2\right| \le \begin{cases} \frac{\alpha}{6}\left|1-\alpha-\frac{3}{2}\alpha\lambda\right| & \text{при } \left|\lambda - \frac{2}{3\alpha}(1-\alpha)\right| \ge \frac{2}{3\alpha}, \\ \frac{\alpha}{6} & \text{при } \left|\lambda - \frac{2}{3\alpha}(1-\alpha)\right| < \frac{2}{3\alpha}. \end{cases}$$

Равенство в функционале Фекете — Сегё достигается в любом случае.

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{G}(\alpha)$, $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, где $a_1 = 1$, $zf'(z) = g(z)$ и $\gamma = 1 + (\alpha/2)$. Тогда (4) верно и равносильно

$$z^2 f''(z) = z\omega(z)(z^2 f''(z) - \alpha z f'(z)).$$

Полагая в этом равенстве $\omega(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ и сравнивая коэффициенты при z^2 и z^3, получим $2a_2 = -c_0\alpha$, $3a_3 = -\frac{c_1}{2}\alpha + c_0(1-\alpha)a_2$. С учетом первого равенства второе принимает вид

$$3a_3 = -\frac{c_1}{2}\alpha - \frac{c_0^2}{2}\alpha(1-\alpha).$$

С помощью этих двух выражений функционал Фекете — Сегё для семейства $\mathscr{G}(\alpha)$ приобретает вид

$$\left|a_3 - \lambda a_2^2\right| = \frac{1}{6}\alpha\left|c_1 + \mu c_0^2\right|$$

где $\mu = (1-\alpha) - \frac{3}{2}\alpha\lambda$. Известно, что $|c_0| \le 1$ и $|c_1| \le 1 - |c_0|^2$. В силу второго неравенства, которое точное, получим

$$\left|a_3 - \lambda a_2^2\right| \le \frac{\alpha}{6}(1 - |c_0|^2 + |\mu||c_0|^2).$$

Тем самым верно точное неравенство

$$\left|a_3 - \lambda a_2^2\right| \le \frac{\alpha}{6}|\mu|, \quad \text{если } |\mu| \ge 1,$$

и равенство в последнем неравенстве достигается для $f'(z) = (1 - ze^{i\theta})^\alpha$, $\theta \in [0, 2\pi]$. В другом случае имеем

$$\left|a_3 - \lambda a_2^2\right| \le \frac{\alpha}{6}, \quad \text{если } |\mu| < 1,$$

где равенство достигается для $f'(z) = (1 - z^2 e^{i\theta})^{\alpha/2}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Наконец, нетрудно убедиться, что $|\mu| < 1$, если и только если $\left|\lambda - \frac{2}{3\alpha}(1-\alpha)\right| < \frac{2}{3\alpha}$. Теорема доказана. $\square$

Для $\alpha = 1$ получаем

Следствие 2. *Если* $f \in \mathscr{G}$ *и* $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, *то*

$$\left|a_3 - \lambda a_2^2\right| \leq \begin{cases} \frac{\lambda}{4} & \text{для } |\lambda| \geq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{6} & \text{для } |\lambda| < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Равенство в функционале Фекете — Сегё достигается в любом случае. В частности, имеем точное неравенство $\left|a_3 - a_2^2\right| \leq 1/4$ *для* $f \in \mathscr{G}$.

3. Характеризация с использованием свертки

Если f, g аналитические в $\mathbb{D}$ и

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

то произведение Адамара (или свертка) функций f и g определяется по правилу

$$(f \star g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

Ясно, что $f \star g$ аналитическая в $\mathbb{D}$. Охарактеризуем функции класса $\mathscr{G}(\alpha)$ с помощью свертки Адамара.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha \leq 1$. *Тогда* $f \in \mathscr{G}(\alpha)$, *если и только если*

$$\frac{f(z)}{z} \star \frac{1 - ((2/\alpha)(x+1)+1)z}{(1-z)^3} \neq 0 \tag{7}$$

для всех $|z| < 1$ *и* x, $|x| = 1$, *или, что равносильно,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{n-1} \neq 0 \quad (z \in \mathbb{D},\ |x| = 1), \tag{8}$$

где $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *и*

$$A_n = n a_n (1 - ((x+1)/\alpha)(n-1)) \quad (n \geq 1,\ a_1 = 1).$$

Доказательство. Напомним, что $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} P(z) > 0$ в $\mathbb{D}$, где

$$P(z) = 1 - \frac{2}{\alpha} \frac{z f''(z)}{f'(z)}.$$

Заметим, что P аналитическая в $\mathbb{D}$ и $P(0) = 1$. Таким образом, включение $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ равносильно тому, что

$$P(z) \neq \frac{x-1}{x+1} \quad (z \in \mathbb{D},\ |x| = 1,\ x \neq -1)$$

или после упрощений

$$(x+1)g'(z) - (\alpha + x + 1)\frac{g(z)}{z} \neq 0, \tag{9}$$

где $g(z) = z f'(z)$. В силу того, что

$$\frac{g(z)}{z} = \frac{g(z)}{z} \star \frac{1}{1-z}, \quad z g'(z) = g(z) \star \frac{z}{(1-z)^2}, \quad g(z) = z f'(z),$$

из неравенства (9) вытекает, что $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ тогда и только тогда, когда

$$f'(z) \star \left((x+1)\frac{1}{(1-z)^2} - (\alpha + x + 1)\frac{1}{1-z} \right) \neq 0.$$

Таким образом, (9) равносильно тому, что

$$\frac{1}{z}\left[zf'(z) \star \left((x+1)\frac{z}{(1-z)^2} - (\alpha + x + 1)\frac{z}{1-z} \right) \right] \neq 0.$$

Поскольку $zf'(z)\star\phi(z) = f(z)\star z\phi'(z)$, можно переписать последнее соотношение в виде

$$\frac{1}{z}\left[f(z) \star \left((x+1)\frac{z(1+z)}{(1-z)^3} - (\alpha + x + 1)\frac{z}{(1-z)^2} \right) \right] \neq 0,$$

что после упрощений приводится к эквивалентной форме записи (7), т. е.

$$\frac{f(z)}{z} \star \frac{q(z)}{z} \neq 0, \quad q(z) = \frac{\alpha z - (2(x+1)+\alpha)z^2}{(1-z)^3}.$$

Чтобы переформулировать это в виде ряда, достаточно заметить, что

$$q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n((x+1)n - (\alpha + x + 1))z^n. \quad \square$$

Теорема 4. *Пусть* $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *для некоторого* $\alpha \in (0,1]$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(2(n-1)-\alpha)|a_n| \le \alpha$,

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |n(n-1-\alpha)a_n - (n-1)(n-2-\alpha)a_{n-1}| + (n-1)|na_n - (n-2)a_{n-1}| \le \alpha$,

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |n(n-1-\alpha)a_n - (n-2)(n-3-\alpha)a_{n-2}| + |(n-1)na_n - (n-3) \times (n-2)a_{n-2}| \le \alpha$.

Тогда $f \in \mathscr{G}(\alpha)$.

Доказательство. Согласно критерию для свертки функций из $\mathscr{G}(\alpha)$ в обозначениях теоремы 4 достаточно показать, что

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^{n-1} \neq 0 \tag{10}$$

в $\mathbb{D}$ при $|x| = 1$. Здесь $A_n = -\frac{na_n}{\alpha}(n - (1+\alpha) + (n-1)x)$ $(n \ge 2)$.

Пусть сначала выполнено (a). Заметим, что условие (10), очевидно, выполнено, если $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |A_n| \le 1$. Действительно, при $|x| = 1$ из неравенства треугольника вытекает, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} |A_n| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n|a_n|}{\alpha}(n - (1+\alpha) + (n-1)) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|(2n-2-\alpha),$$

а из условия (a) следует, что $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |A_n| \le 1$.

Пусть верно (b). После умножения (10) на отличный от нуля множитель $1-z$, $z\in\mathbb{D}$, из неравенства $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|A_n-A_{n-1}|\le 1$ следует, что $f\in\mathscr{G}(\alpha)$. Ясно, что для всех $|x|=1$ имеем

$$\alpha|A_n-A_{n-1}|\le |na_n(n-(1+\alpha))-(n-1)a_{n-1}(n-1-(1+\alpha))| \\ +(n-1)|na_n-(n-2)a_{n-1}|,$$

стало быть, утверждение теоремы верно и при условии (b).

В последнем случае требуемое получается аналогично после умножения неравенства (10) на $1-z^2$. Действительно,

$$(1-z^2)\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}A_nz^{n-1}\right)=1+\sum_{n=2}^{\infty}(A_n-A_{n-2})z^{n-1}$$

и

$$\alpha|A_n-A_{n-2}|\le |n(n-1-\alpha)a_n-(n-2)(n-3-\alpha)a_{n-2}| \\ +|(n-1)na_n-(n-3)(n-2)a_{n-2}|.$$

Вычисления показывают, что из условия (c) вытекает неравенство

$$\sum_{n=2}^{\infty}|A_n-A_{n-2}|\le 1,$$

тем самым $f\in\mathscr{G}(\alpha)$. $\square$

Заметим, что можно получить несколько новых достаточных условий, если умножить неравенство (10) на подходящие отличные от нуля полиномы в $\mathbb{D}$ такие, как $(1-z)^2$ и $1+z+z^2$, и воспользоваться вышеуказанным методом. Случай $\alpha=1$ в теореме 4 опишем в следующем простом виде.

Следствие 3. *Пусть $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(2n-3)|a_n|\le 1$,

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|n(n-2)a_n-(n-1)(n-3)a_{n-1}|+(n-1)|na_n-(n-2)a_{n-1}|\le 1$,

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|n(n-2)a_n-(n-2)(n-4)a_{n-2}|+|(n-1)na_n-(n-3)(n-2)a_{n-2}|\le 1$.

Тогда $f\in\mathscr{G}$.

4. Некоторые леммы

Лемма 1. *Пусть $f\in\mathscr{G}(\alpha)$ и*

$$\frac{1}{f'(z)}=1+d_1z+d_2z^2+\dots \tag{11}$$

с комплексными коэффициентами d_n. Тогда неравенство

$$|d_n|\le(-1)^n\binom{-\alpha}{n}=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha+k-1) \tag{12}$$

верно для любого $n \in \mathbb{N}$. *Равенство достигается при* $f'(z) = (1-z)^{\alpha}$.

Доказательство. Как и ранее, пусть $g(z) = zf'(z)$. Рассмотрим функцию u, определенную по правилу

$$u(z) = \frac{z^2}{g(z)} = \frac{z}{f'(z)} = z + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{k+1}.$$

Поскольку

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zu'(z)}{u(z)}\right) = \operatorname{Re}\left(2 - \frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 1 - \frac{\alpha}{2}$$

для $f \in \mathscr{G}(\alpha)$, как и при доказательстве теоремы 1, получаем существование такой аналитической функции $\omega : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$, что

$$\frac{1}{\alpha}\left(2\frac{zu'(z)}{u(z)} - 2 + \alpha\right) = \frac{1 + z\omega(z)}{1 - z\omega(z)}.$$

Отсюда после очевидных вычислений имеем

$$zu'(z) - u(z) = z\omega(z)(zu'(z) - (1-\alpha)u(z)).$$

Использование метода доказательства теоремы 1 приводит к неравенствам

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 |d_k|^2 \le \alpha^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+\alpha)^2 |d_k|^2$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Последнее неравенство эквивалентно тому, что

$$n^2 |d_n|^2 \le \alpha^2 + \alpha \sum_{k=1}^{n-1} (2k+\alpha)|d_k|^2,$$

по индукции приходим к (12). $\square$

Для доказательства леммы потребуется следующий результат, доказательство которого ввиду простоты опущено.

Лемма 2. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$ *и* $1 \le i \le k$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, i$, *таковы, что* $\sum\limits_{j=1}^{i} n_j = k$. *Тогда* $\prod\limits_{j=1}^{i} (n_j + 1) \ge k + 1$.

Лемма 3. *Пусть* $h'(z) = (1-z)^{\alpha}$ *для* $\alpha \in (0,1)$. *Если*

$$\frac{z}{h(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n z^n,$$

то

$$0 < \delta_n \le \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha + k - 1) \le \frac{\alpha}{n+1} \tag{13}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Третье неравенство в (13) очевидно, поэтому докажем первое и второе. Для $\alpha \in (0,1)$ рассмотрим

$$h'(z) = (1-z)^{\alpha} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n,$$

где $\gamma_n = (-1)^{n-1}\binom{\alpha}{n} > 0$. После интегрирования получим

$$h(z) = z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n+1} z^{n+1},$$

так что

$$\frac{z}{h(z)} = \frac{1}{1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n+1} z^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n z^n.$$

Для доказательства (13), введя обозначения

$$h'(z) = 1 - F(z), \quad \frac{h(z)}{z} = 1 - G(z),$$

получим

$$\frac{1}{h'(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} F(z)^k = 1 + \sum_{n=1} d_n z^n, \quad \frac{z}{h(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} G(z)^k.$$

Из этих представлений видно, что d_n могут быть вычислены как полиномы с положительными коэффициентами от γ_n, где мономы имеют вид $\prod\limits_{j=1}^{i} \gamma_{n_j}$. Здесь i и n_j, $j = 1, \dots, i$, должны быть выбраны, как в лемме 2. Если вычислять δ_n таким образом для функции G, то получим аналогичные полиномы, но для мономов вида $\prod\limits_{j=1}^{i} \frac{\gamma_{n_j}}{n_j+1}$. Тем самым первое неравенство в (13) доказано. Из леммы 2 следует

$$\prod_{j=1}^{i} \frac{\gamma_{n_j}}{n_j+1} \le \frac{1}{k+1} \prod_{j=1}^{i} \gamma_{n_j},$$

что доказывает второе неравенство.

Сравнивая эти разложения с разложением $1/h'$, получаем (13) для любого $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in (0,1]$ и $s_n(z)$ — ее n-я частичная сумма. Предположим, что $|1/f'(z)| \le M$ в $\mathbb{D}$ для некоторого $M > 1$. Тогда для любого $n \ge 2$*

$$\left| \frac{s_n'(z)}{f'(z)} - 1 \right| \le |z|^n \left(\frac{\alpha}{n} + A_n \frac{|z|}{1-|z|} \right), \quad |z| = r < 1,$$

где $A_n = \left(\frac{\alpha\pi}{\sqrt{6}} + 1\right)\sqrt{M^2 - 1}$.

Доказательство. Будем следовать методу доказательства из [13] с необходимыми изменениями. Для $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ положим $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$, так что $s_n(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n$. Поскольку $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ однолистная (и звездообразная) в $\mathbb{D}$, $f'(z)$ отлична от нуля в $\mathbb{D}$, значит, $1/f'(z)$ может быть представлена в виде (11), так что

$$(1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots)(1 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots) \equiv 1.$$

Поскольку $2a_2 = -d_1$, в силу последнего соотношения видим, что

$$\sum_{k=1}^{m-1} (m-k) a_{m-k} d_k + m a_m = 0 \quad (m = 2, 3, \dots;\ a_1 = 1).$$

Используя представление частичной суммы $s_n(z)$, получим

$$\frac{s_n'(z)}{f'(z)} \equiv 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots,$$

где $c_n = na_n d_1 + (n-1)a_{n-1}d_2 + \dots + a_1 d_n$.

Из предыдущего соотношения при $m = n+1$ имеем $c_n = -(n+1)a_{n+1}$ и, далее,

$$c_m = na_n d_{m-n+1} + (n-1)a_{n-1}d_{m-n+2} + \dots + 2a_2 d_{m-1} + d_m$$

при $m = n+1, n+2, \dots$. В силу теоремы 1 верно неравенство $|a_n| \le \alpha/(n(n-1))$ для всех $n \ge 2$, стало быть, при $m \ge n+1$ получаем

$$|c_m - d_m| \le \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|d_{m-n+k}|}{n-k} = \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|d_{m-k}|}{k}. \tag{14}$$

В силу предположения имеем $|1/f'(z)| \le M$ для $z \in \mathbb{D}$. Значит, при $0 < r < 1$ из представления $1/f'(z)$ в виде ряда вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{f'(re^{i\theta})} \right|^2 d\theta = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^2 r^{2k} \le M^2,$$

откуда при $r \to 1^-$ следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^2 \le M^2 - 1. \tag{15}$$

Ввиду (15) и неравенства Коши — Шварца соотношение (14) принимает вид

$$|c_m - d_m| \le \alpha \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} |d_{m-k}|^2 \right)^{1/2} \le \alpha \sqrt{(\pi^2/6)(M^2-1)}$$

при $m \ge n+1$. Кроме того, с учетом (15) $|d_k| \le M^2 - 1$ для любых $k \ge 1$. Тем самым последнее неравенство влечет

$$|c_m| \le \left(\frac{\alpha\pi}{\sqrt{6}} + 1 \right) \sqrt{M^2 - 1} = A_n$$

при $m \ge n+1$, откуда в силу того, что $|c_n| = |(n+1)a_{n+1}| \le \alpha/n$ (по теореме 1), вытекает, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{s_n'(z)}{f'(z)} - 1 \right| &= |c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots| \\ &\le |c_n|\,|z|^n + |c_{n+1}|\,|z|^{n+1} + \dots \le |z|^n \left(\frac{\alpha}{n} + A_n \frac{|z|}{1-|z|} \right) \end{aligned}$$

при $|z| = r < 1$ для $n \ge 2$. Лемма 4 доказана. $\square$

Лемма 5. *Пусть $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in (0,1]$ и $s_n(z)$ — ее n-я частичная сумма. Тогда для любых $r \in (0,1)$ и $n \geq 2$*

$$\left|\frac{s_n'(z)}{f'(z)} - 1\right| < |z|^n\left(\frac{\alpha}{n} + \left(\frac{\alpha\pi}{\sqrt{6}} + 1\right)\frac{\sqrt{1-(1-r)^{2\alpha}}}{(1-r)^\alpha r^n}\frac{|z|}{r-|z|}\right) \quad \text{для } |z| < r. \qquad (16)$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{G}(\alpha)$. Тогда

$$\frac{1}{f'(z)} \prec \frac{1}{(1-z)^\alpha}, \quad z \in \mathbb{D},$$

где $\prec$ обозначает обычное отношение порядка $[1, 27]$. Следовательно,

$$\left|\frac{1}{f'(z)}\right| \leq \frac{1}{(1-r)^\alpha} =: M(r) \quad \text{при } |z| = r < 1. \qquad (17)$$

Аналогично лемме 4 имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^2 r^{2k} \leq M(r)^2 - 1, \qquad (18)$$

стало быть, неравенство (14) может быть записано в виде

$$|c_m - d_m| \leq \alpha\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|d_{m-k}|}{k} = \alpha\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{kr^{m-k}}\right)(|d_{m-k}|r^{m-k})$$

для произвольного фиксированного $r \in (0,1)$. Таким образом, в силу неравенства Коши — Шварца получаем

$$\begin{aligned}|c_m - d_m|^2 &\leq \alpha^2\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2 r^{2(m-k)}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1}|d_{m-k}|^2 r^{2(m-k)}\right)\\ &\leq \alpha^2\left(\frac{1}{r^{2m}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\right)(M(r)^2-1) \leq \frac{\alpha^2}{r^{2m}}\frac{\pi^2}{6}(M(r)^2-1)\end{aligned}$$

для любого фиксированного $r \in (0,1)$ при $m \geq n+1$. Далее, поскольку (см. (18))

$$|d_k|r^k \leq \sqrt{M(r)^2 - 1} \quad \text{для любого } k \geq 1,$$

из последнего неравенства следует, что

$$|c_m| \leq |d_m| + \frac{\alpha}{r^m}\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{M(r)^2-1} \leq \frac{1}{r^m}\left(\frac{\alpha\pi}{\sqrt{6}} + 1\right)\sqrt{M(r)^2-1}$$

при $m \geq n+1$. Как и при доказательстве леммы 4, используя полученную выше оценку, имеем

$$\left|\frac{s_n'(z)}{f'(z)} - 1\right| < |z|^n\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{r^n}\left(\frac{\alpha\pi}{\sqrt{6}} + 1\right)\sqrt{M(r)^2-1}\frac{|z|/r}{1-(|z|/r)}\right)$$

при $|z| < r$. Завершим доказательство, подставив в последнее выражение $M(r) = (1-r)^{-\alpha}$ (см. (17)). $\square$

Пусть для комплексных чисел a, b и числа $c \neq 0, 1, 2, \ldots$

$$F(a,b;c;z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{D},$$

обозначает гауссову гипергеометрическую функцию, где $(a)_k$ — символ Почхаммера $(a)_0 = 1$, $(a)_k := a(a+1)\dots(a+k-1)$ для $k \in \mathbb{N}$. Для неотрицательного целого a по определению гамма-функции запишем $(a)_k = \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)}$. Далее воспользуемся известной формулой

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0,$$

и тем, что функция $F(a,b;c;z)$ ограничена, если $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$.

Лемма 6. *Пусть $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in (0,1]$ и $s_n(z)$ — ее n-я частичная сумма. Тогда для любого $n \geq 2$ имеем*

(1) *при* $\alpha = 1$

$$\left|\frac{s_n(z)}{f(z)} - 1\right| < |z|^n \left(\frac{1}{n(n+1)} + R\frac{|z|}{1-|z|}\right), \quad |z| = r < 1,$$

где $R = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{3\sqrt{30}}$;

(2) *при* $\alpha \in (0,1)$

$$\left|\frac{s_n(z)}{f(z)} - 1\right| < |z|^n \left(\frac{\alpha}{n(n+1)} + R(\alpha)\frac{|z|}{1-|z|}\right), \quad |z| = r < 1,$$

где

$$R(\alpha) = \left(1 + \frac{\alpha\pi^2}{3\sqrt{10}}\right)\frac{\sqrt{F(\alpha-1,\alpha-1;1;1) - (\alpha-1)^2 - 1}}{1-\alpha}.$$

Доказательство. Как при доказательстве леммы 4, положим $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$, так что $s_n(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots + a_nz^n$. Поскольку функции из $\mathscr{G}(\alpha)$, $\alpha \in (0,1]$, однолистные, любая $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ может быть записана в виде

$$\frac{z}{f(z)} = 1 + b_1z + b_2z^2 + \dots \tag{19}$$

с некоторыми комплексными коэффициентами b_n $(n \geq 1)$. Отсюда и из другого вида функции f следует, что

$$(1 + a_2z + a_3z^2 + \dots)(1 + b_1z + b_2z^2 + \dots) \equiv 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим

$$\sum_{k=1}^{m-1} b_k a_{m-k} + a_m = 0 \quad (m = 2,3,\dots;\ a_1 = 1). \tag{20}$$

Используя представление частичной суммы $s_n(z)$ функции f и (19), имеем

$$\frac{s_n(z)}{f(z)} = (1 + a_2z + a_3z^2 + \dots + a_nz^{n-1})(1 + b_1z + b_2z^2 + \dots)$$
$$\equiv 1 + c_nz^n + c_{n+1}z^{n+1} + \dots,$$

где

$$c_n = b_1a_n + b_2a_{n-1} + \dots + b_na_1. \tag{21}$$

Ввиду (20) коэффициенты при z^k в последнем разложении для $k = 1,2,\dots,n-1$ обращаются в нуль. В силу (20) $c_n = -a_{n+1}$ при $m = n+1$, а также

$$c_m = b_{m-n+1}a_n + b_{m-n+2}a_{n-1} + \dots + b_ma_1 \tag{22}$$

при $m = n+1, n+2, \dots$. В силу теоремы 1 $|a_n| \le \alpha/(n(n-1))$ для всех $n \ge 2$, тем самым при $m \ge n+1$ имеем

$$|c_m - b_m| \le \frac{\alpha}{n(n-1)}|b_{m-n+1}| + \frac{\alpha}{(n-1)(n-2)}|b_{m-n+2}| + \dots + \frac{\alpha}{2}|b_{m-1}|.$$

Используя неравенство Коши — Шварца, при $m \ge n+1$ получаем

$$|c_m - b_m|^2 \le \alpha^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n+1-k)^2(n-k)^2} \right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} |b_{m-n+k}|^2 \right) = \alpha^2 AB,$$

где

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2 k^2} \quad \text{и} \quad B = \sum_{k=1}^{n-1} |b_{m-n+k}|^2.$$

Для $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ имеем $f'(z) \prec (1-z)^\alpha$, что, в свою очередь, влечет

$$\frac{f(z)}{z} \prec \frac{1-(1-z)^{\alpha+1}}{z(\alpha+1)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Когда f имеет вид (19), удобно записать последнее отношение так:

$$\frac{z}{f(z)} \prec \frac{z(\alpha+1)}{1-(1-z)^{\alpha+1}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k. \tag{23}$$

Пользуясь теоремой Рогозинского (см. [1, теорема 6.2]), получим

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n} |d_k|^2. \tag{24}$$

Случай 1. Пусть $\alpha = 1$. Тогда (23) принимает вид

$$\frac{z}{f(z)} \prec \frac{1}{1-(1/2)z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} z^k,$$

так что $d_k = 2^{-k}$ при $k \ge 1$. Стало быть, (24) сводится к

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n} |d_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right),$$

откуда

$$B \le \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \le \frac{1}{3}.$$

Таким образом, $B \le 1/3$, а также $|b_m| \le 1/\sqrt{3}$ для любого $m \ge 1$. С другой стороны, для сумм A заметим, что

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2 k^2} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^4} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Тем самым при $m \ge n+1$ имеем

$$|c_m - b_m| \le \sqrt{AB} < \frac{\pi^2}{\sqrt{270}} \quad \text{для } m \ge n+1,$$

так что
$$|c_m| \le |b_m| + \frac{\pi^2}{\sqrt{270}} \le \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{3\sqrt{30}} = R \quad \text{для } m \ge n+1.$$
В силу этого неравенства и того, что $|c_n| = |a_{n+1}| \le \frac{1}{(n+1)n}$ (в случае $\alpha = 1$), при $|z| = r < 1$ имеем
$$\begin{aligned}\left|\frac{s_n(z)}{f(z)} - 1\right| &\le |c_n||z|^n + |c_{n+1}||z|^{n+1} + \dots \\ &< \frac{1}{(n+1)n}|z|^n + R(|z|^{n+1} + |z|^{n+2} + \dots) = |z|^n\left(\frac{1}{(n+1)n} + R\frac{|z|}{1-|z|}\right)\end{aligned}$$
для $n \ge 2$. Доказательство случая 1 завершено.

Случай 2. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Тогда $f'(z) \prec h'(z) = (1-z)^\alpha$. В силу леммы 3 соотношение (23) принимает вид
$$\frac{z}{f(z)} \prec \frac{z}{h(z)} = 1 + \sum_{n=1}^\infty \delta_n z^n,$$
где δ_n удовлетворяет неравенству (13) для $n \ge 1$, т. е. $\delta_n \le \frac{(\alpha)_n}{(n+1)!}$. Как и в случае 1, отсюда
$$B \le \sum_{k=1}^\infty |b_k|^2 \le \sum_{k=1}^\infty |\delta_k|^2,$$
где
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^\infty |\delta_k|^2 \le \sum_{k=1}^\infty \frac{(\alpha)_k(\alpha)_k}{(1)_{k+1}(1)_{k+1}} &= \frac{1}{(\alpha-1)^2}\sum_{k=2}^\infty \frac{(\alpha-1)_k(\alpha-1)_k}{(1)_k(1)_k} \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)^2}[F(\alpha-1,\alpha-1;1;1) - (\alpha-1)^2 - 1].\end{aligned}$$
Таким образом,
$$B \le \frac{1}{(\alpha-1)^2}[F(\alpha-1,\alpha-1;1;1) - (\alpha-1)^2 - 1]. \tag{25}$$

Для $\alpha \in (0,1)$ имеем $\frac{(\alpha)_k}{(k+1)!} \le \frac{\alpha}{k+1}$, тем самым приходим к оценке
$$B \le \alpha^2 \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+1)^2} = \alpha^2\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right),$$
которая здесь использована не будет. Однако с помощью (25) и оценки $A < \pi^4/(90)$ получаем
$$|c_m - b_m| \le \alpha\sqrt{AB} < \left(\frac{\sqrt{F(\alpha-1,\alpha-1;1;1) - (\alpha-1)^2 - 1}}{1-\alpha}\right)\frac{\alpha\pi^2}{\sqrt{90}}$$
для $m \ge n+1$. Кроме того, из (25) вытекает
$$|b_m| \le \frac{\sqrt{F(\alpha-1,\alpha-1;1;1) - (\alpha-1)^2 - 1}}{1-\alpha},$$
тем самым для $m \ge n+1$ имеем
$$|c_m| \le |b_m| + \alpha\sqrt{AB} < \left(1 + \frac{\alpha\pi^2}{3\sqrt{10}}\right)\frac{\sqrt{F(\alpha-1,\alpha-1;1;1) - (\alpha-1)^2 - 1}}{1-\alpha}.$$
Требуемое неравенство получается, как при доказательстве случая 1. $\square$

5. Инъективность и звездообразность частичных сумм функции из $\mathscr{G}(\alpha)$

Теорема 5. *Пусть $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in (0,1]$ и $s_n(z)$ — ее n-я частичная сумма. Тогда $\mathrm{Re}\{s_n'(z)\} > 0$ в круге $|z| < 1/2$ для $n \geq N$, где N — наименьшее натуральное число такое, что $\sin^{-1}(K_\alpha) \leq (3-\alpha)\pi/6$, где*

$$K_\alpha = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\alpha}{n} + \left(\frac{\alpha\pi}{\sqrt{6}} + 1\right) 3\sqrt{9^\alpha - 1}\left(\frac{3}{2}\right)^n\right). \tag{26}$$

Здесь натуральное N зависит от значений α.

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{G}(\alpha)$. Тогда если в (16) положим $r = 2/3$, то из (16) следует

$$\left|\frac{s_n'(z)}{f'(z)} - 1\right| < |z|^n\left(\frac{\alpha}{n} + \left(\frac{\alpha\pi}{\sqrt{6}} + 1\right)\sqrt{9^\alpha - 1}\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{3|z|}{2-3|z|}\right) \quad \text{при } |z| < \frac{2}{3}. \tag{27}$$

Неравенство (27) при $|z| = 1/2$ вместе с принципом максимума модуля дает

$$\left|\frac{s_n'(z)}{f'(z)} - 1\right| < K_\alpha \quad \text{при } |z| < 1/2,$$

откуда легко получаем

$$\max_{|z|=1/2}\left|\arg\frac{s_n'(z)}{f'(z)}\right| \leq \sin^{-1}(K_\alpha). \tag{28}$$

Кроме того, поскольку $f'(z) \prec (1-z)^\alpha$, имеем

$$\max_{|z|=1/2}|\arg f'(z)| \leq \alpha\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha\pi}{6}. \tag{29}$$

Неравенства (28) и (29) вместе с принципом максимума модуля приводят к соотношению

$$|\arg s_n'(z)| \leq |\arg f'(z)| + \left|\arg\frac{s_n'(z)}{f'(z)}\right| < \frac{\alpha\pi}{6} + \sin^{-1}(K_\alpha) \quad \text{при } |z| < \frac{1}{2},$$

стало быть, неравенство $|\arg s_n'(z)| < \pi/2$ верно, если $\sin^{-1}(K_\alpha) \leq (3-\alpha)\pi/6$. Требуемое утверждение получается простыми вычислениями. $\square$

Случай $\alpha = 1$ упрощается до следующего результата.

Следствие 4. *Пусть $f \in \mathscr{G}$ и $s_n(z)$ — ее n-я частичная сумма. Тогда $\mathrm{Re}\{s_n'(z)\} > 0$ в круге $|z| < 1/2$ для $n \geq 11$. В частности, $s_n'(z)$ почти выпукла (тем самым однолистна) при $|z| < 1/2$ для $n \geq 11$.*

Доказательство. Положим в теореме 5 $\alpha = 1$. Тогда $\mathrm{Re}\, s_n'(z) > 0$ для $|z| < 1/2$, когда верно неравенство $\sin^{-1}(K_1) \leq \pi/3$, где K_1 определено в (26). Однако последнее неравенство очевидно верно для всех $n \geq 11$, стало быть, $s_n(z)$ почти выпукла при $|z| < 1/2$. $\square$

Следствие 4 улучшает результат из [32], доказанный для $n \geq 13$. Далее, значения $N = N(\alpha)$ в теореме 5 при разном выборе α из интервала $(0,1)$ могут быть вычислены с помощью пакета Mathematica. Например, для $\alpha = 5/6$, $4/5$, $3/4$, $2/3$, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$ соответственные значения $N = N(\alpha)$ равны $N(\alpha) = 10, 10, 9, 9, 7, 6, 5, 4, 4$.

Подготовимся к доказательству следующих двух результатов. Если $f \in \mathscr{G}(\alpha)$, то (см., например, [17, теорема 1])

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec g(z) = \frac{(1+\alpha)(1-z)}{1+\alpha-z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Видим, что функция g однолистна в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ на круг

$$\left| w - \frac{\alpha+1}{\alpha+2} \right| < \frac{\alpha+1}{\alpha+2}.$$

Далее, легко убедиться, что g отображает окружность $|z| = r$ на окружность

$$\left| w - \frac{(\alpha+1)(\alpha+1-r^2)}{(\alpha+1)^2 - r^2} \right| = \frac{(\alpha+1)\alpha r}{(\alpha+1)^2 - r^2},$$

стало быть, для $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ получаем

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \le \sin^{-1}\left(\frac{\alpha r}{\alpha+1-r^2} \right) \quad \text{при } |z| = r < 1.$$

В частности,

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \le \sin^{-1}\left(\frac{2\alpha}{4\alpha+3} \right) \quad \text{при } |z| \le 1/2. \tag{30}$$

Теорема 6. *Пусть $f \in \mathscr{G}$. Тогда для $n \ge 11$ каждое сечение $s_n(z)$ функции f звездообразно в круге $|z| < 1/2$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{G}$. Неравенство (30) при $\alpha = 1$ дает

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \le \sin^{-1}\left(\frac{2}{7} \right) \quad \text{при } |z| \le 1/2. \tag{31}$$

Как и при доказательстве теоремы 5, из случая 1 леммы 6 получаем

$$\left| \frac{s_n(z)}{f(z)} - 1 \right| < \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{3\sqrt{30}} \right) =: N_2 \quad \text{при } |z| \le 1/2,$$

так что

$$\max_{|z|=1/2} \left| \arg \frac{s_n(z)}{f(z)} \right| \le \sin^{-1}(N_2). \tag{32}$$

Из неравенства (32) наряду с (28) и (31) видно, что

$$\begin{aligned} \left| \arg \frac{zs_n'(z)}{s_n(z)} \right| &\le \left| \arg \frac{s_n'(z)}{f'(z)} \right| + \left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| + \left| \arg \frac{f(z)}{s_n(z)} \right| \\ &< \sin^{-1}(K_1) + \sin^{-1}\left(\frac{2}{7} \right) + \sin^{-1}(N_2) \end{aligned}$$

при $|z| < 1/2$. Стало быть,

$$\left| \arg \frac{zs_n'(z)}{s_n(z)} \right| < \frac{\pi}{2},$$

когда

$$\sin^{-1}(K_1) + \sin^{-1}\left(\frac{2}{7} \right) + \sin^{-1}(N_2) \le \frac{\pi}{2}.$$

Однако последнее неравенство, очевидно, верно для всех $n \ge 11$. Таким образом, $s_n(z)$ звездообразно при $|z| < 1/2$ для $n \ge 11$. $\square$

В [32] теорема 6 доказана для $n \ge 12$. Как и для теоремы 5, может быть сформулировано обобщение теоремы 6.

Теорема 7. *Пусть $f \in \mathscr{G}(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$. Тогда сечение $s_n(z)$ функции f звездообразно в круге $|z| < 1/2$ для $n \geq N$, где N — наименьшее натуральное число такое, что*

$$\sin^{-1}(K_\alpha) + \sin^{-1}\left(\frac{2\alpha}{4\alpha+3}\right) + \sin^{-1}(N_\alpha) \leq \frac{\pi}{2},$$

где K_α определено в (26), $N_\alpha = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\alpha}{n(n+1)} + R(\alpha)\right)$, $R(\alpha)$ определено в лемме 6(2). Здесь N зависит от α.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 6, пусть $f \in \mathscr{G}(\alpha)$. Тогда в силу случая 2 леммы 6 имеем

$$\left|\frac{s_n(z)}{f(z)} - 1\right| < N_\alpha \quad \text{при } |z| \leq 1/2,$$

откуда в силу (28) и (30) легко следует, что

$$\left|\arg \frac{zs_n'(z)}{s_n(z)}\right| < \sin^{-1}(K_\alpha) + \sin^{-1}\left(\frac{2\alpha}{4\alpha+3}\right) + \sin^{-1}(N_\alpha)$$

при $|z| < 1/2$. Требуемое заключение легко вытекает из условий. $\square$

Закончим статью следующим замечанием. Для $\alpha = 5/6, 4/5, 3/4, 2/3, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6$ соответственные значения $N = N(\alpha)$ в теореме 7, полученные с помощью пакета Mathematica, равны $N(\alpha) = 10, 10, 9, 9, 7, 6, 5, 4, 4$. Они совпадают со значениями, полученными для теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Duren P. L.* Univalent functions. New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verl., 1983. (Grundlehren Math. Wiss.; V. 259).

2. *Goodman A. W.* Univalent functions. Tampa, FL: Mariner Publ. Co, 1983. V. I, II.

3. *Szegö G.* Zur Theorie der schlichten Abbildungen // Math. Ann. 1928. V. 100, N 1. P. 188–211.

4. *Iliev L.* Classical extremal problems for univalent functions // Complex analysis. Warsaw: Banach Center Publ., 1979. V. 11. P. 89–110.

5. *Robertson M. S.* The partial sums of multivalently star-like functions // Ann. Math. 1941. V. 42, N 2. P. 829–838.

6. *Silverman H.* Radii problems for sections of convex functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 104, N 4. P. 1191–1196.

7. *Ruscheweyh S.* Extension of G. Szegö's theorem on the sections of univalent functions // SIAM J. Math. Anal. 1988. V. 19, N 6. P. 1442–1449.

8. *Jenkins J. A.* On an inequality of Goluzin // Amer. J. Math. 1951. V. 73. P. 181–185.

9. *Bshouty D., Hengartner W.* Criteria for the extremality of the Koebe mapping // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 111. P. 403–411.

10. *Prokhorov D. V.* Bounded univalent functions // Handbook of complex analysis: geometric function theory / Ed. by Kühnau. Amsterdam: Elsevier, 2005. V. 1, Chapter 8. P. 207–228.

11. *Ruscheweyh St., Sheil-Small T. Hadamard products of schlicht functions and the Pólya-Schoenberg conjecture* // Comment. Math. Helv. 1973. V. 48. P. 119–135.

12. *Ruscheweyh St.* Convolutions in geometric function theory // Les Presses de l'Université de Montréal. Montréal, 1982.

13. *Obradović M., Ponnusamy S.* Starlikeness of sections of univalent functions // Rocky Mt. J. Math. (To appear).

14. *Ozaki S.* On the theory of multivalent functions. II // Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku. Sect. A. 1941. V. 4. P. 45–87.

15. *Umezawa T.* Analytic functions convex in one direction // J. Math. Soc. Japan. 1952. V. 4. P. 194–202.

16. *Ponnusamy S., Rajasekaran S. New sufficient conditions for starlike and univalent functions* // Soochow J. Math. 1995. V. 21, N 2. P. 193–201.

17. *Jovanović I., Obradović M.* A note on certain classes of univalent functions // Filomat. 1995. N 9, part 1. P. 69–72.
18. *Ponnusamy S., Vasudevarao A.* Region of variability of two subclasses of univalent functions // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 332, N 2. P. 1322–1333.
19. *Rogosinski W. W. On the coefficients of subordinate functions* // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.
20. *Fekete M., Szegö G. Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen* // J. London Math. Soc. 1933. V. 8. P. 85–89.
21. *Koepf W.* On the Fekete–Szegö problem for close-to-convex functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 101. P. 89–95.
22. *Koepf W.* On the Fekete–Szegö problem for close-to-convex functions. II // Arch. Math. 1987. V. 49. P. 420–433.
23. *London R. R.* Fekete–Szegö inequalities for close-to convex functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 117. P. 947–950.
24. *Pfluger A.* The Fekete–Szegö inequality by a variational method // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I Math. 1985. V. 10. P. 447–454.
25. *Pfluger A. The Fekete–Szegö inequality for complex parameters* // Complex Variables Theory Appl. 1986. V. 7, N 1–3. P. 149–160.
26. *Bhowmik B., Ponnusamy S., Wirths K.-J.* On the Fekete–Szegö problem for concave univalent functions // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 373. P. 432–438.
27. *Pommerenke Ch.* Univalent functions. Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1975.
28. *Clunie J. G.* On meromorphic schlicht functions // J. London Math. Soc. 1958. V. 34. P. 215–216.
29. *Robertson M. S.* Quasi-subordination and coefficient conjectures // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. V. 76. P. 1–9.
30. *Hornich H.* Ein Banachraum analytischer Funktionen in Zusammenhang mit den schlichten Funktionen // Monatsh. Math. 1969. Bd 73. S. 36–45.
31. *Becker J., Pommerenke Ch.* Schlichtheitskriterien und Jordangebiete // J. Reine Angew. Math. 1984. Bd 354. S. 74–94.
32. *Obradović M., Ponnusamy S.* Injectivity and starlikeness of sections of a class of univalent functions // Complex analysis and dynamical systems. V. (Israel Math. Conf. Proc. (IMCP)). Amer. Math. Soc. 2013 (to appear). (Contemp. Math.; V. 9).

Статья поступила 20 сентября 2012 г.

Milutin Obradović (Обрадович Милутин)
Department of Mathematics,
Faculty of Civil Engineering,
Bulevar Kralja Aleksandra 73,
11000 Belgrade, Serbia
obrad@grf.bg.ac.rs

Saminathan Ponnusamy (Поннусами Саминасан)
Indian Statistical Institute (ISI), Chennai Centre,
SETS (Society for Electronic Transactions and Security),
MGR Knowledge City, CIT Campus, Taramani, Chennai 600113 India
samy@isichennai.res.in, samy@iitm.ac.in

Karl-Joachim Wirths (Виртс Карл-Йоахим)
Institut für Analysis und Algebra, TU Braunschweig,
Braunschweig 38106 Germany
kjwirths@tu-bs.de