Сибирский математический журнал
Июль—август, 2013. Том 54, № 4

УДК 517.977.5; 517.958

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СЛАБО КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ВОДНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ РАСТВОРОВ С ОБЪЕКТИВНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А. В. Звягин

Аннотация. Исследуется задача с обратной связью для математической модели движения слабо концентрированных водных полимерных растворов со сглаженной объективной производной Яуманна. Доказывается существование оптимального решения, дающего минимум заданному ограниченному и полунепрерывному снизу функционалу качества. Для доказательства существования оптимального решения используется аппроксимационно-топологический метод исследования задач гидродинамики.

Ключевые слова: оптимальное управление, аппроксимационно-топологический метод, априорная оценка, теория топологической степени многозначных отображений, слабо концентрированный водный полимерный раствор.

1. Введение

Задачам оптимального управления в механике жидкости посвящено большое число работ (см., например, [1] и имеющуюся там литературу). Однако в большинстве из них изучаются различные задачи оптимального управления для системы Навье — Стокса. Лишь в некоторых работах рассматриваются задачи для неньютоновских жидкостей, в том числе и задачи с обратной связью для подобных моделей движения жидкости (см., например, [2, 3]). В настоящей работе изучается задача оптимального управления с обратной связью для модели движения слабо концентрированных водных полимерных растворов с объективной производной.

Движение однородной несжимаемой жидкости с постоянной плотностью, равной единице, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, определяется системой дифференциальных уравнений в форме Коши (см., например, [4]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = \operatorname{Div} \sigma + f, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–31188, 13–01–00041).

где $\sigma = (\sigma_{ij})_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}$ — девиатор тензора напряжений, $v = (v_1, \dots, v_n)$ — скорость, p — давление жидкости, f — плотность внешних сил.

Формально система (1.1), (1.2) описывает течение всех видов жидкостей. Однако число неизвестных этой системы больше числа уравнений. Для корректной постановки систему (1.1), (1.2) дополняют реологическим соотношением, которое обычно связывает между собой σ-девиатор тензора напряжения и тензор скоростей деформации $\mathscr{E}(v) = (\mathscr{E}_{ij}(v))_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}$, $\mathscr{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\big)$. Один из способов определения реологического соотношения — метод механических моделей. Рассматриваемую среду моделируют с помощью пробирок, пружинок и т. д. и производят необходимые вычисления. Такой подход для вывода реологических соотношений использовался еще Кельвиным (см., например, [5]). Разумеется, разные среды имеют разные механические модели, и в результате расчетов получаются различные соотношения. Для вязкоупругих жидкостей типа Фойгта известно соотношение

$$\sigma = 2\nu\mathscr{E} + 2\varkappa\dot{\mathscr{E}}, \tag{1.3}$$

где $\nu > 0$ — вязкость жидкости, $\varkappa > 0$ — время ретардации (запаздывания), а $\dot{\mathscr{E}}$ — производная по времени тензора скоростей деформации. Это соотношение моделирует течение вязкой неньютоновой жидкости, которой требуется время, чтобы прийти в движение под действием внезапно приложенной силы. Однако метод механических моделей не указывает, какую производную (частную, полную или какую-то специальную) надо брать в реальных процессах, где наряду со временем участвуют и точки области.

В последние годы под влиянием идей рациональной механики [6] стали интересоваться такими реологическими соотношениями, которые не зависят от наблюдателя, т. е. не меняются при галилеевой замене переменных. Оказалось, что это связано с использованием объективной производной. Иными словами, нужно выяснить, меняется ли исходная тензорная функция при изменении системы отсчета по закону:

$$t^* = t + a \tag{1.4}$$

$$x^* = x_0^*(t) + Q(t)(t - t_0), \tag{1.5}$$

где a — значение времени, x_0 — точка в пространстве, x_0^* — функция времени со значениями в точках пространства, а Q — функция времени со значениями в множестве ортогональных тензоров. Оказалось, что в случае частной и полной производных реологические соотношения, вычисленные в разных системах отсчета, меняются. Необходимую связь обеспечивает объективная производная.

Определение. Пусть $T(t, x)$ — произвольная тензорнозначная функция, не зависящая от наблюдателя. Оператор вида

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + G(\nabla v(t,x), T(t,x)),$$

где G — некоторая матричнозначная функция двух матричных аргументов, называется *объективной производной*, если при любом изменении системы отсчета (1.4), (1.5) выполнено равенство

$$\frac{D^*T^*(t,x)}{Dt^*} = Q(t)\frac{DT(t,x)}{Dt}Q(t)^T$$

для всех возможных функций T.

Одним из примеров объективной производной является сглаженная производная Яуманна [7]:

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + T(t,x)W_\rho(t,x) - W_\rho(t,x)T(t,x),$$

$$W_\rho(v)(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y)W(t,y)\,dy,$$

где $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция с компактным носителем такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\,dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами; $W(v) = (W_{ij}(v))_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}$, $W_{ij}(v) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\big)$ — тензор завихренности.

Подставляя реологическое соотношение (1.3) со сглаженной производной Яуманна в систему уравнений движения несжимаемой жидкости в форме Коши (1.1), (1.2), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa\,\mathrm{Div}\left(v_k \frac{\partial \mathscr{E}(v)}{\partial x_k}\right)$$
$$- 2\varkappa\,\mathrm{Div}(\mathscr{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathscr{E}(v)) + \operatorname{grad} p = f, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \tag{1.6}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega. \tag{1.7}$$

Эта система является обобщением известной математической модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров (подробное описание см., например, в [3]) на случай независимости от галилеевой замены переменных. Для данной системы уравнений (1.6), (1.7) будет изучаться оптимальная задача с обратной связью с начальным условием

$$v(x,0) = a_*(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.8}$$

и граничным условием «прилипания»

$$v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{1.9}$$

2. Постановка задачи и основной результат

Через $C_0^\infty(\Omega)^n$ будем обозначать пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω. Для того чтобы ввести понятие слабого решения, потребуются определения некоторых пространств: $\mathscr{V} = \big\{v(x) = (v_1,\dots,v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\big\}$; $V^0 =$ замыкание $\mathscr{V}$ по норме $L_2(\Omega)^n$; $V^1 =$ замыкание $\mathscr{V}$ по норме $H^1(\Omega)^n$; $V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1$.

Будем также использовать хорошо известное разложение Вейля векторных полей из $L_2(\Omega)^n$ (см., например, [8, 9]): $L_2(\Omega)^n = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega)$, где $\nabla H^1(\Omega) = \{\nabla p : p \in H^1(\Omega)\}$, $\oplus$ — знак ортогональной суммы (пространства V^0 и $\nabla H^1(\Omega)$ ортогональны в $L_2(\Omega)^n$). Пусть $\pi : L_2(\Omega)^n \to V^0$ — проектор Лере. Рассмотрим в пространстве $\mathscr{V}$ оператор $A = -\pi\Delta$. Оператор A продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным (подробнее см., например, в [10]). Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Отметим, что если граница области Ω принадлежит классу C^∞, то $\{e_j\}$ — собственные функции оператора A — будут бесконечно дифференцируемыми.

Пусть $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots \le \lambda_k \le \dots$ — собственные значения оператора A. Обозначим через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, и пусть $m \in \mathbb{N}$,

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{m} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\}$$

— множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j. Определим пространство V^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{N}$. На пространстве V^α норма* (2.1) *эквивалентна норме $\|\cdot\|_{H^\alpha(\Omega)^n}$ пространства $H^\alpha(\Omega)^n$.*

Доказательство этой леммы см. в [1].

В дальнейшем будут необходимы пространство V^1 с эквивалентной нормой $\|v\|_{V^1} = \big(\int_\Omega (\nabla v) : (\nabla v)\, dx \big)^{1/2}$ и пространство V^3 с эквивалентной нормой $\|v\|_{V^3} = \big(\int_\Omega (\nabla \Delta v) : (\nabla \Delta v)\, dx \big)^{1/2}$. Здесь и ниже используется следующее обозначение: $\nabla v : \nabla \varphi = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ для $v = (v_1, \dots, v_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Также введем пространства, в которых будет доказана разрешимость изучаемой задачи и задачи, аппроксимирующей исходную:

$$E_1 = \{ v : v \in L_\infty(0,T;V^1),\ v' \in L_2(0,T;V^{-1}) \}$$

с нормой $\|v\|_{E_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$,

$$E_2 = \{ v : v \in C([0,T],V^3),\ v' \in L_2(0,T;V^3) \}$$

с нормой $\|v\|_{E_2} = \|v\|_{C([0,T],V^3)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Psi : E_1 \multimap L_2(0,T;V^{-1})$, которое будет использовано для определения обратной связи и задания ограничений на управление. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) отображение Ψ определено на пространстве E_1 и имеет непустые компактные выпуклые значения;

(Ψ2) отображение Ψ полунепрерывно сверху (т. е. для каждого $v \in E_1$ и открытого множества $V \subset L_2(0,T;V^{-1})$ такого, что $\Psi(v) \subset V$, существует окрестность $U(v)$ такая, что $\Psi(U(v)) \subset V$) и компактно (т. е. образ Ψ относительно компактен в $L_2(0,T;V^{-1})$);

(Ψ3) отображение Ψ глобально ограничено, т. е. существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} := \sup\{ \|u\|_{L_2(0,T;V^{-1})} : u \in \Psi(v) \} \le M \quad \text{для всех } v \in E_1;$$

(Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле:

если $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset E_1$, $v_l \rightharpoonup v_0$, $u_l \in \Psi(v_l)$ и $u_l \to u_0$ в $L_2(0,T;V^{-1})$, то $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Будем рассматривать слабую постановку задачи оптимального управления с обратной связью для начально-краевой задачи (1.6)–(1.9). Под обратной связью понимаем условие

$$f \in \Psi(v). \tag{2.2}$$

Будем предполагать, что начальное условие a_* принадлежит пространству V^1.

Определение 2.1. Пара функций $(v, f) \in E_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$ называется *слабым решением задачи оптимального управления с обратной связью* (1.6)–(1.9), (2.2), если она для любого $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0, T)$ удовлетворяет условию обратной связи (2.2), тождеству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \nu\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx + \varkappa\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx$$
$$- \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx - \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx$$
$$+ 2\varkappa\int\limits_\Omega (\mathscr{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathscr{E}(v)) : \nabla\varphi\,dx = \langle f, \varphi\rangle, \quad (2.3)$$

а также начальному условию

$$v(0) = a_*. \quad (2.4)$$

Первым результатом настоящей работы является

Теорема 2.1. *Пусть отображение Ψ удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4). *Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи* (1.6)–(1.9), (2.2).

Доказательство будет приведено в разд. 4.

Обозначим через $\Sigma \subset E_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (1.6)–(1.9), (2.2). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Φ1) существует число γ такое, что $\Phi(v, f) \geq \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$,

(Φ2) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в E_1 и $f_m \to f_*$ в $L_2(0, T; V^{-1})$, то

$$\Phi(v_*, f_*) \leq \varliminf_{m\to\infty} \Phi(v_m, f_m).$$

В качестве примера такого функционала можно привести следующий функционал качества:

$$\Phi(v, f) = \int\limits_0^T \|v(t) - u_*(t)\|^2_{V^1}\,dt + \int\limits_0^T \|f(t)\|^2_{V^{-1}}\,dt.$$

Здесь u_* — некоторое заданное поле скоростей. Данный функционал характеризует отклонение имеющейся скорости от требуемой. Его минимум дает минимальное отклонение скорости от заданной при минимальном управлении.

Основным результатом работы является

Теорема 2.2. *Если отображение Ψ удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4), *а функционал Φ — условиям* (Φ1), (Φ2), *то задача* (1.6)–(1.9), (2.2) *имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что $\Phi(v_*, f_*) = \inf\limits_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f)$.*

Доказательство приведено в разд. 5.

3. Аппроксимационная задача

На протяжении этого раздела будем предполагать, что $a_* \in V^3$. Для изучения разрешимости задачи (1.6)–(1.9), (2.2) будет использоваться аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Таким образом, будем рассматривать следующую аппроксимационную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$.

Задача 3.1. *Найти пару функций $(v, f) \in E_2 \times L_2(0, T; V^{-1})$, удовлетворяющих для любого $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0, T)$ условию обратной связи* (2.2), *тождеству*

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx + \varkappa \int_\Omega \nabla\Big(\frac{\partial v}{\partial t}\Big) : \nabla\varphi\, dx$$
$$+ \varepsilon \int_\Omega \nabla\Big(\Delta\Big(\frac{\partial v}{\partial t}\Big)\Big) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx$$
$$- \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx + 2\varkappa \int_\Omega (\mathscr{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathscr{E}(v)) : \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle \tag{3.1}$$

и начальному условию

$$v(0) = a_*. \tag{3.2}$$

Отметим, что (3.1) отличается от (2.3) наличием члена

$$\varepsilon \int_\Omega \nabla\Big(\Delta \frac{\partial v}{\partial t}\Big) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx.$$

Далее будет доказано существование решения этой аппроксимационной задачи и показано, что из последовательности ее решений можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению задачи (1.6)–(1.9), (2.2) при стремлении параметра аппроксимации ε к нулю.

3.1. Операторная трактовка аппроксимационной задачи. Определим операторы с помощью следующих равенств:

$$N : V^3 \to V^{-3}, \quad \langle Nv, \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx, \quad v, \varphi \in V^3;$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^{-1}, \quad \langle B_1(v), \varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n,\ \varphi \in V^1;$$

$$B_2 : V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_2(v), \varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V^1,\ \varphi \in V^3;$$

$$B_3 : V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_3(v), \varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V^1,\ \varphi \in V^3;$$

$$D : V^1 \to V^{-3},\ \langle D(v), \varphi\rangle = \int_\Omega (\mathscr{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathscr{E}(v)) : \nabla\varphi\, dx,\ v \in V^1,\ \varphi \in V^3;$$

$$J : V^3 \to V^{-3}, \quad \langle Jv, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega v\varphi\, dx, \quad v, \varphi \in V^3.$$

Поскольку в равенстве (3.1) функция $\varphi \in V^3$ произвольна, оно эквивалентно в $L_2(0,T;V^{-3})$ следующему операторному уравнению:

$$Jv' - B_1(v) + \nu Av + \varepsilon Nv' + \varkappa Av' - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v) = f, \qquad (3.3)$$

где $A : V^1 \to V^{-1}$, $\langle Av, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx$.

Таким образом, задача существования слабого решения аппроксимационной задачи эквивалентна задаче существования решения $v \in E_2$ следующего операторного включения:

$$Jv' - B_1(v) + \nu Av + \varepsilon Nv' + \varkappa Av' - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v) = f \in \Psi(v), \quad (3.4)$$

удовлетворяющего начальному условию (3.2).

Введем операторы

$$L : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \varepsilon N + \varkappa A)v', v|_{t=0});$$

$$K : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3,$$

$$K(v) = (\nu Av - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v), 0).$$

Тогда уравнение (3.3), удовлетворяющее начальному условию (3.2), эквивалентно операторному уравнению

$$L(v) + K(v) = (f, a). \qquad (3.5)$$

3.2. Свойства операторов из уравнений (3.3) и (3.5). Чтобы не увеличивать числа обозначений, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функциональных пространствах, но определяемых одним и тем же соотношением. Для операторов A, N, $J + \varepsilon N + \varkappa A$, $J + \varkappa A$, B_1, B_2, B_3, D, L и K имеют место следующие свойства (3.1)–(3.6) (см., например, [3]).

Свойство 3.1. *Для любой функции $v \in E_2$ функция Av принадлежит $L_2(0,T;V^{-3})$, оператор $A : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ вполне непрерывен и имеет место оценка*

$$\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \le C_1\|v\|_{C([0,T],V^1)}. \qquad (3.6)$$

Свойство 3.2. *Для любой функции $v \in L_2(0,T;V^3)$ функция Nv принадлежит $L_2(0,T;V^{-3})$, оператор $N : L_2(0,T;V^3) \to L_2(0,T;V^{-3})$ непрерывен и имеет место оценка*

$$\|Nv\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \le \|v\|_{L_2(0,T;V^3)}.$$

Свойство 3.3. *Для любой функции $v \in L_2(0,T;V^3)$ функция $(J + \varepsilon N + \varkappa A)v$ принадлежит $L_2(0,T;V^{-3})$, оператор $(J + \varepsilon N + \varkappa A) : L_2(0,T;V^3) \to L_2(0,T;V^{-3})$ непрерывен, обратим и для него имеет место оценка*

$$\varepsilon\|v\|_{L_2(0,T;V^3)} \le \|(J + \varepsilon N + \varkappa A)v\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \le (C_2 + \varepsilon + \varkappa C_3)\|v\|_{L_2(0,T;V^3)}. \quad (3.7)$$

Кроме того, обратный оператор $(J + \varepsilon N + \varkappa A)^{-1} : L_2(0,T;V^{-3}) \to L_2(0,T;V^3)$ также непрерывен.

Свойство 3.4. *Для любой функции $v \in L_2(0,T;V^{-1})$ функция $(J+\varkappa A)v$ принадлежит $L_2(0,T;V^{-3})$, оператор $(J+\varkappa A) : L_2(0,T;V^{-1}) \to L_2(0,T;V^{-3})$ непрерывен и имеет место оценка*

$$C_4\|v\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \le \|(J+\varkappa A)v\|_{L_2(0,T;V^{-3})}. \tag{3.8}$$

Свойство 3.5. *Для любой функции $v \in E_2$ функция $B_1(v)$ принадлежит $L_2(0,T;V^{-3})$, отображение $B_1 : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ вполне непрерывно и для него имеет место оценка*

$$\|B_1(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \le C_5\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}. \tag{3.9}$$

Свойство 3.6. *Для $i=2,3$ и любой функции $v \in E_2$ функция $B_i(v)$ принадлежит $L_2(0,T;V^{-3})$, отображение $B_i : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ вполне непрерывно и для него имеет место оценка*

$$\|B_i(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \le C_6\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}. \tag{3.10}$$

Сформулируем и докажем необходимые свойства оператора D.

Свойство 3.7. *Для оператора D имеют место следующие свойства.*

1. *Оператор $D : V^1 \to V^{-3}$ непрерывен, и для любой функции $v \in V^1$ имеет место оценка*

$$\|D(v)\|_{V^{-3}} \le C_{12}\|v\|^2_{V^1}. \tag{3.11}$$

2. *Для любой функции $v \in L_4(0,T;V^1)$ функция $D(v)$ принадлежит $L_2(0,T;V^{-3})$ и отображение $D : L_4(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-3})$ непрерывно.*

3. *Для любой функции $v \in E_2$ функция $D(v)$ принадлежит $L_2(0,T;V^{-3})$, отображение $D : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ вполне непрерывно и для него имеет место оценка*

$$\|D(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \le C_{16}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}. \tag{3.12}$$

Доказательство. 1. Получим необходимые оценки для тензоров $\mathscr{E}$ и W_ρ:

$$\|\mathscr{E}(v)\|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}} = \sum_{i,j=1}^n \|\mathscr{E}_{ij}(v)\|^2_{L_2(\Omega)} \le C_7 \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 dx$$

$$= C_7 \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) dx$$

$$= C_7 \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx - 2C_7 \sum_{i=1}^n \int_\Omega v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) dx + C_7 \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,dx$$

$$= C_7\left[\int_\Omega \nabla v : \nabla v\,dx + \int_\Omega \nabla v : \nabla v\,dx\right] = 2C_7\|v\|^2_{V^1},$$

$$\|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} = \sum_{i,j=1}^n \|(W_\rho)_{ij}(v)\|_{L_2(\Omega)} \le C_8 \sum_{i,j=1}^n \|(W_\rho)_{ij}(v)\|_{L_\infty(\Omega)}$$

$$= \frac{1}{2}C_8 \sum_{i,j=1}^n \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \left| \int_\Omega \rho(x-y)\left(\frac{\partial v_i(t,y)}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j(t,y)}{\partial y_i}\right) dy \right|$$

$$= \frac{1}{2}C_8 \sum_{i,j=1}^n \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \left| \int_\Omega -\frac{\partial \rho(x-y)}{\partial y_j} v_i(t,y) + \frac{\partial \rho(x-y)}{\partial y_i} v_j(t,y)\,dy \right|$$

$$\le C_9\|\operatorname{grad}\rho\|_{L_2(\Omega)^n}\|v(t)\|_{L_2(\Omega)^n} \le C_{10}\|\operatorname{grad}\rho\|_{L_2(\Omega)^n}\|v(t)\|_{V^1}.$$

Далее для любых $v \in V^1$, $\varphi \in V^3$ в силу определения оператора D

$$|\langle D(v), \varphi\rangle| = \left| \int\limits_\Omega (\mathscr{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathscr{E}(v)) : \nabla\varphi\, dx \right|$$
$$\leq C_{11}[\|\mathscr{E}(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|\mathscr{E}(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}] \|\nabla\varphi\|_{C(\Omega)^n}$$
$$\leq C_{12}\|v\|_{V^1}^2 \|\varphi\|_{V^3}.$$

Отсюда следует требуемая оценка (3.11).

Докажем непрерывность оператора D. Для произвольных $v^m, v^0 \in V^1$ имеем

$$|\langle D(v^m), \varphi\rangle - \langle D(v^0), \varphi\rangle| = \left| \int\limits_\Omega (\mathscr{E}(v^m)W_\rho(v^m) - W_\rho(v^m)\mathscr{E}(v^m)) : \nabla\varphi\, dx \right.$$
$$\left. - \int\limits_\Omega (\mathscr{E}(v^0)W_\rho(v^0) - W_\rho(v^0)\mathscr{E}(v^0)) : \nabla\varphi\, dx \right| \leq C_{13} \int\limits_\Omega |\mathscr{E}(v^m)W_\rho(v^m)$$
$$- W_\rho(v^m)\mathscr{E}(v^m) - \mathscr{E}(v^0)W_\rho(v^0) + W_\rho(v^0)\mathscr{E}(v^0)|\, dx \|\varphi\|_{V^3}$$
$$\leq C_{13} \int\limits_\Omega |(\mathscr{E}(v^m)(W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0)) + (\mathscr{E}(v^m) - \mathscr{E}(v^0))$$
$$\times W_\rho(v^0) - W_\rho(v^m)(\mathscr{E}(v^m) - \mathscr{E}(v^0)) - (W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0))\mathscr{E}(v^0)|\, dx \|\varphi\|_{V^3}$$
$$\leq C_{13}[\|(\mathscr{E}(v^m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|(W_\rho(v^m - v^0))\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \|(\mathscr{E}(v^m - v^0))\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}$$
$$\times \|W_\rho(v^0)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} + \|W_\rho(v^m)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|(\mathscr{E}(v^m - v^0))\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}$$
$$+ \|(W_\rho(v^m - v^0))\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \|\mathscr{E}(v^0)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}] \|\varphi\|_{V^3} \leq C_{14}[\|v^m\|_{V^1} \|v^m - v^0\|_{V^1}$$
$$+ \|v^m - v^0\|_{V^1} \|v^0\|_{V^1} + \|v^m\|_{V^1} \|v^m - v^0\|_{V^1} + \|v^m - v^0\|_{V^1} \|v^0\|_{V^1}] \|\varphi\|_{V^3}$$
$$\leq C_{15}(\|v^m\|_{V^1} + \|v^0\|_{V^1}) \|v^m - v^0\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^3}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|D(v^m) - D(v^0)\|_{V^{-3}} \leq C_{15}(\|v^m\|_{V^1} + \|v^0\|_{V^1}) \|v^m - v^0\|_{V^1}. \tag{3.13}$$

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset V^1$ сходится к некоторой предельной функции $v^0 \in V^1$. Тогда непрерывность отображения $D : V^1 \to V^{-3}$ следует из последнего неравенства.

2. Пусть $v \in L_4(0, T; V^1)$. Тогда из (3.11) при почти всех $t \in (0, T)$ получим оценку $\|D(v)(t)\|_{V^{-3}} \leq C_{12}\|v(t)\|_{V^1}^2$. Возводя эту оценку в квадрат и интегрируя по t от 0 до T, получим

$$\int\limits_0^T \|D(v)(t)\|_{V^{-3}}^2\, dt \leq C_{12}^2 \int\limits_0^T \|v(t)\|_{V^1}^4\, dt = C_{12}^2 \|v\|_{L_4(0,T;V^1)}^4.$$

Отсюда следует, что $D(v) \in L_2(0, T; V^{-3})$. Докажем непрерывность отображения $D : L_4(0, T; V^1) \to L_2(0, T; V^{-3})$.

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset L_4(0, T; V^1)$ сходится к $v^0 \in L_4(0, T; V^1)$. Возведем неравенство (3.13) в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T. В силу неравенства Гёльдера получим

$$\int_0^T \|D(v^m)(t) - D(v^0)(t)\|^2_{V^{-3}}\, dt$$

$$\leq C_{15}^2 \int_0^T (\|v^m(t)\|_{V^1} + \|v^0(t)\|_{V^1})^2 \|v^m(t) - v^0(t)\|^2_{V^1}\, dt$$

$$\leq C_{15}^2 \left(\int_0^T (\|v^m(t)\|_{V^1} + \|v^0(t)\|_{V^1})^4\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|v^m(t) - v^0(t)\|^4_{V^1}\, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_{15}^2 \|v^m - v^0\|_{L_4(0,T;V^1)} \left(\sum_{i=0}^{4} \frac{4!}{i!(4-i)!} \|v^m\|^i_{L_4(0,T;V^1)} \|v^0\|^{4-i}_{L_4(0,T;V^1)} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $m \to +\infty$, стремится к нулю и левая часть. Отсюда следует, что отображение $D : L_4(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-3})$ непрерывно.

3. Для доказательства утверждения этого пункта воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 3.1 [11]. *Пусть $X \subset E \subset Y$ — банаховы пространства, причем вложение $X \subset E$ вполне непрерывно, а вложение $E \subset Y$ непрерывно. Пусть $F \subset L_p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$. Будем предполагать, что для любого $f \in F$ его обобщенная производная в пространстве $D'(0,T;Y)$ принадлежит $L_r(0,T;Y)$, $1 \leq r \leq \infty$. Далее, пусть 1) множество F ограничено в $L_p(0,T;X)$; 2) множество $\{f' : f \in F\}$ ограничено в $L_r(0,T;Y)$. Тогда при $p < \infty$ множество F относительно компактно в $L_p(0,T;E)$, а при $p = \infty$ и $r > 1$ множество F относительно компактно в $C([0,T],E)$.*

В данном случае $X = V^3$, $E = V^1$, $Y = V^0$, $F = \{v : v \in L_4(0,T;V^3);\ v' \in L_2(0,T;V^0)\}$. Вложение $V^3 \subset V^1$ компактно, поэтому пространство F вложено в $L_4(0,T;V^1)$ компактно. Из непрерывности вложений $C([0,T],V^3) \subset L_4(0,T;V^3)$, $L_2(0,T;V^3) \subset L_2(0,T;V^0)$ следует, что $E_2 \subset F$, причем вложение непрерывно. В силу п. 2 этой теоремы отображение $D : L_4(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-3})$ непрерывно. В итоге $E_2 \subset F \subset L_4(0,T;V^1) \xrightarrow{D} L_2(0,T;V^{-3})$. Здесь первое вложение непрерывно, второе вложение вполне непрерывно, а отображение D непрерывно. Таким образом, для любой функции $v \in E_2$ получим, что $D(v) \in L_2(0,T;V^{-3})$, а отображение $D : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ вполне непрерывно.

Покажем оценку (3.12). В силу неравенства (3.11) при всех $t \in [0,T]$ имеет место оценка $\|D(v)(t)\|_{V^{-3}} \leq C_{12}\|v(t)\|^2_{V^1}$. Возводя ее в квадрат и интегрируя по t от 0 до T, получим

$$\int_0^T \|D(v)(t)\|^2_{V^{-3}}\, dt \leq C_{12}^2 \int_0^T \|v(t)\|^4_{V^1} dt \leq C_{12}^2 T \|v\|^4_{C([0,T],V^1)},$$

откуда следует требуемая оценка (3.12) с константой $C_{16} = C_{12}\sqrt{T}$. □

Свойство 3.8. *Для операторов L и K имеют место следующие свойства.*

1. *Оператор $L : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ обратим, и обратный оператор непрерывен.*

2. *Оператор* $K : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. 1. Утверждение п. 1 известно [3].

2. Вполне непрерывность оператора $K : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$, $K(v) = (\nu Av - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v), 0)$, следует из вполне непрерывности операторов: $A : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ (свойство 3.1); $B_1 : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ (свойство 3.5); $B_2 : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ (свойство 3.6); $B_3 : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ (свойство 3.6); $D : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ (свойство 3.7 п. 3). $\square$

3.3. Априорная оценка. Введем оператор $\mathscr{Y} : E_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$, $\mathscr{Y}(v) = (\Psi(v), a_*)$. Тогда в силу последнего свойства задача существования решения $(v,f) \in E_2 \times L_2(0,T;V^{-1})$ задачи (3.4), (3.2) эквивалентна задаче существования решения $v \in E_2$ для следующего операторного включения:

$$v \in \mathscr{M}(v), \quad \text{где } \mathscr{M}(v) = L^{-1}(\mathscr{Y}(v) - K(v)).$$

Поскольку оператор L^{-1} линейный и непрерывный, оператор K компактный, при помощи условий (Ψ1), (Ψ2) получаем, что многозначное отображение $\mathscr{M} : E_2 \multimap E_2$ является вполне непрерывным и имеет непустые, выпуклые и компактные значения.

Рассмотрим также следующее семейство включений:

$$(J + \varepsilon N + \varkappa A)v' - \lambda B_1(v) + \lambda\nu Av - \lambda\varkappa B_2(v) - \lambda\varkappa B_3(v) + 2\lambda\varkappa D(v) = \lambda f = \Psi(v), \tag{3.14}$$

где $0 \le \lambda \le 1$, v удовлетворяет начальному условию (3.2), которое совпадает с (3.4) при $\lambda = 1$.

Теорема 3.2. *Решения семейства включений* (3.14) *удовлетворяют следующим оценкам:*

$$\varepsilon\|v\|^2_{C([0,T],V^3)} \le C_{17} + 2\varepsilon\|a\|^2_{V^3}, \tag{3.15}$$

$$\varkappa\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} \le C_{17} + 2\varepsilon\|a\|^2_{V^3}, \tag{3.16}$$

где $C_{17} = \frac{4T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 2\|a\|^2_{V^0} + 2\varkappa\|a\|^2_{V^1}$.

Доказательство. Пусть $v \in E_2$ — решение (3.14) для некоторого $\lambda \in [0,1]$. Тогда для v, удовлетворяющего начальному условию $v(0) = \lambda a$, при любом $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0,T)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}\int_\Omega v'(t)\varphi\,dx - \lambda\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i(t)v_j(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \lambda\nu\int_\Omega \nabla v(t) : \nabla\varphi\,dx \\ + \varepsilon\int_\Omega \nabla(\Delta v'(t)) : \nabla(\Delta\varphi)\,dx + \varkappa\int_\Omega \nabla(v'(t)) : \nabla\varphi\,dx \\ - \lambda\varkappa\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx - \lambda\varkappa\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx \\ + 2\lambda\varkappa\int_\Omega (\mathscr{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathscr{E}(v)) : \nabla\varphi\,dx = \lambda\langle f(t),\varphi\rangle.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Заметим, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx + \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx$$
$$= 2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\mathscr{E}_{ij}(v)(t)\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx = -2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial \mathscr{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx.$$

Поскольку равенство (3.17) имеет место при всех $\varphi\in V^3$, оно имеет место и при $\varphi=v$:

$$\int\limits_\Omega v'(t)v(t)\,dx - \lambda\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx + \lambda\nu\int\limits_\Omega \nabla v(t):\nabla v(t)\,dx$$
$$+\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla(\Delta v'(t)):\nabla(\Delta v(t))\,dx + \varkappa\int\limits_\Omega \nabla(v'(t)):\nabla v(t)\,dx$$
$$+2\lambda\varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial \mathscr{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx + 2\lambda\varkappa\int\limits_\Omega (\mathscr{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathscr{E}(v)):\nabla v\,dx$$
$$= \lambda\langle f(t),v\rangle. \quad (3.18)$$

Преобразуем слагаемые в левой части (3.18) следующим образом:

$$\int\limits_\Omega v'(t)v(t)\,dx = \frac12\int\limits_\Omega \frac{\partial(v(t)v(t))}{\partial t}\,dx = \frac12\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v(t)v(t)\,dx = \frac12\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0};$$

$$\int\limits_\Omega \nabla\Delta v'(t):\nabla\Delta v(t)\,dx = \frac12\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Delta v(t):\nabla\Delta v(t))\,dx = \frac12\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3};$$

$$\varkappa\int\limits_\Omega \nabla(v'(t)):\nabla v(t)\,dx = \frac{\varkappa}{2}\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\nabla v(t):\nabla v(t))\,dx = \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1};$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i(t)\frac{\partial(v_j(t)v_j(t))}{\partial x_i}\,dx = 0;$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial \mathscr{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx = \frac12\Bigg(\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial \mathscr{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx$$
$$+\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial \mathscr{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\,dx\Bigg) = 0;$$

$$\int\limits_{\Omega}(\mathscr{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathscr{E}(v)):\nabla v\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\mathscr{E}(v)W_\rho(v)$$
$$-W_\rho(v)\mathscr{E}(v)):(\mathscr{E}(v)+W(v))\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\mathscr{E}(v)W_\rho(v)$$
$$-W_\rho(v)\mathscr{E}(v)):\mathscr{E}(v)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\mathscr{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathscr{E}(v)):W(v)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\mathscr{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathscr{E}_{ik}-(W_\rho)_{jk}\mathscr{E}_{ki}\mathscr{E}_{ji}\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\mathscr{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}$$
$$-(W_\rho)_{kj}\mathscr{E}_{ji}W_{ki}\,dx=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\mathscr{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathscr{E}_{ik}-\mathscr{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathscr{E}_{ik}\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\mathscr{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}-\mathscr{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}\,dx=0.$$

Последнее равенство выполнено в силу симметричности тензора $\mathscr{E}(v)$ и кососимметричности тензоров $W_\rho(v)$ и $W(v)$. Таким образом, (3.18) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}+\lambda\nu\|v(t)\|^2_{V^1}=\lambda\langle f(t),v(t)\rangle.$$

Оценим последнее равенство сверху и снизу. В итоге при почти всех $t\in(0,T)$ получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}\le\|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до τ, где $\tau\in[0,T]$. В силу того, что v удовлетворяет начальному условию,

$$\frac{1}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^0}-\frac{\lambda^2}{2}\|a\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^3}-\frac{\varepsilon\lambda^2}{2}\|a\|^2_{V^3}$$
$$+\frac{\varkappa}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^1}-\frac{\varkappa\lambda^2}{2}\|a\|^2_{V^1}\le\int\limits_0^{\tau}\|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}\,dt.$$

После обычных преобразований правой части последнего неравенства (см. [3]) имеем

$$\frac{\varepsilon}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^1}\le\frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+\frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}$$
$$+\frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\|a\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\|a\|^2_{V^1}.$$

Правая часть в последнем неравенстве не зависит от τ. Следовательно, можно перейти к максимуму по $\tau\in[0,T]$ в левой части:

$$\frac{\varepsilon}{2}\|v\|^2_{C([0,T],V^3)}\le\frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+\frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}+\frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\|a\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\|a\|^2_{V^1}; \tag{3.19}$$

$$\frac{\varkappa}{2}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}\le\frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+\frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}+\frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\|a\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\|a\|^2_{V^1}. \tag{3.20}$$

Тогда из (3.20) непосредственно вытекает (3.16). Для получения оценки (3.15) достаточно сложить неравенства (3.19) и (3.20). $\square$

Теорема 3.3. *Если $v \in E_2$ — решение* (3.14) *для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеют место следующие оценки:*

$$\varepsilon \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \le C_{21}, \tag{3.21}$$

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \le \frac{2C_{21}}{C_4}, \tag{3.22}$$

где

$$C_{21} = C_{18}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + (C_{19} + C_5 + 2\varkappa C_{20})\left(\frac{C_{17} + 2\varepsilon\|a\|^2_{V^3}}{\varkappa}\right) + \nu C_1 \sqrt{\frac{C_{17} + 2\varepsilon\|a\|^2_{V^3}}{\varkappa}}.$$

Доказательство. Пусть $v \in E_2$ — решение (3.14), тогда оно удовлетворяет равенству

$$\|v' + \varepsilon N v' + \varkappa A v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} = \|\lambda f + \lambda B_1(v) - \lambda\nu A v + \lambda\varkappa B_2(v) + \lambda\varkappa B_3(v) - 2\lambda\varkappa D\|_{L_2(0,T;V^{-3})}.$$

Принимая во внимание оценки (3.6), (3.9), (3.10), (3.12), непрерывность вложения $L_2(0,T;V^{-1}) \in L_2(0,T;V^{-3})$ и тот факт, что $\lambda \le 1$, приходим к неравенству

$$\|\lambda f + \lambda B_1(v) - \lambda\nu A v + \lambda\varkappa B_2(v) + \lambda\varkappa B_3(v) - 2\lambda\varkappa D\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \le C_{18}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + (C_{19} + C_5 + 2\varkappa C_{20})\left(\frac{C_{17} + 2\varepsilon\|a\|^2_{V^3}}{\varkappa}\right) + \nu C_1 \sqrt{\frac{C_{17} + 2\varepsilon\|a\|^2_{V^3}}{\varkappa}}.$$

Объединив это неравенство и (3.7), получим (3.21). Аналогично

$$\|v' + \varkappa A v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} = \| - \varepsilon N v' + \lambda f + \lambda B_1(v) - \lambda\nu A v + \lambda\varkappa B_2(v) + \lambda\varkappa B_3(v) - 2\lambda\varkappa D(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \le \varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + C_{21} \le 2C_{21}.$$

Это неравенство и оценка (3.8) влекут (3.22). □

Из теорем 3.2 и 3.3 непосредственно вытекает

Следствие 3.1. *Если v — решение* (3.14) *для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеет место следующая оценка:*

$$\|v\|_{E_2} \le C_{22} = \sqrt{\frac{C_{17}}{\varepsilon} + 2\|a\|^2_{V^3}} + \frac{C_{21}}{\varepsilon}. \tag{3.23}$$

3.4. Теорема существования решения аппроксимационной задачи.

Теорема 3.4. *Операторное включение* (3.4) *имеет хотя бы одно решение $v \in E_2$.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени для многозначных векторных полей (см., например, [12]). В силу априорной оценки (3.23) все решения семейства операторных включений (3.14) лежат в шаре $B_R \subset E_2$ радиуса $R = C_{22} + 1$ с центром в нуле.

Следовательно, $v \notin \lambda\mathscr{M}(v)$ для всех $(v,\lambda) \in \partial B_R \times [0,1]$. Используя свойство гомотопической инвариантности степени и свойство нормировки степени, получим $\deg(I-\mathscr{M}, \overline{B}_R, 0) = \deg(I, \overline{B}_R, 0) = 1$. Так как эта степень отлична от нуля, существует хотя бы одно решение $v \in E_2$ операторного включения (3.4). $\square$

Поскольку существует решение $v \in E_2$ включения (3.4), из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача имеет хотя бы одно решение $v \in E_2$.

4. Доказательство теоремы 2.1

Пространство V^3 плотно в V^1, стало быть, для каждого $a_* \in V^1$ существует последовательность $a_m \in V^3$, сходящаяся к a_* в V^1. Если $a_* \equiv 0$, то положим $a_m \equiv 0$, $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$. Если $\|a_*\|_{V^1} \neq 0$, то начиная с некоторого номера $\|a_m\|_{V^3} \neq 0$. Тогда положим $\varepsilon_m = \frac{1}{m\|a_m\|^2_{V^3}}$. В силу нашего выбора полученная последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to +\infty$. При этом имеет место неравенство

$$\varepsilon_m \|a_m\|^2_{V^3} \leq 1. \tag{4.1}$$

Ввиду теоремы 3.4 при каждом ε_m и a_m существует пара функций $(v_m, f_m) \in E_2 \times L_2(0,T;V^{-1}) \subset E_1 \times L_2(0,T;V^{-1})$, которые удовлетворяют включению $f_m \in \Psi(v_m)$, равенству

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega v_m'\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx \\
&\quad + \nu \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi\,dx + \varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m') : \nabla(\Delta\varphi)\,dx + \varkappa \int\limits_\Omega \nabla v_m' : \nabla\varphi\,dx \\
&\quad - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx \\
&\quad + 2\varkappa \int\limits_\Omega (\mathscr{E}(v_m) W_\rho(v_m) - W_\rho(v_m)\mathscr{E}(v_m)) : \nabla\varphi\,dx = \langle f, \varphi\rangle
\end{aligned} \tag{4.2}$$

и начальному условию

$$v_m(0) = a_m. \tag{4.3}$$

Так как последовательность $\{a_m\}$ сходится в V^1, она ограничена по норме V^1. Следовательно,

$$2\|a_m\|^2_{V^0} + 2\varkappa\|a_m\|^2_{V^1} \leq C_{23}, \tag{4.4}$$

где C_{23} — постоянная, не зависящая от m.

Вспоминая определение констант в априорных оценках, отметим, что постоянная C_{17} из неравенства (3.16) на самом деле зависит от m. Однако, воспользовавшись (4.4), ее можно оценить сверху следующим образом:

$$C_{17} \leq \frac{4T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_{23} = C_{24}. \tag{4.5}$$

Таким образом, в силу неравенств (4.1) и (4.5) из оценки (3.16) имеем

$$\varkappa\|v_m\|^2_{C([0,T],V^1)} \leq C_{24} + 2. \tag{4.6}$$

Аналогично, воспользовавшись неравенствами (4.1) и (4.5), из оценок (3.21) и (3.22) получим

$$\varepsilon\|v_m'\|_{L_2(0,T;V^3)} \le C_{18}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + (C_{19}+C_5+2\varkappa C_{20})\left(\frac{C_{24}+2}{\varkappa}\right) + \nu C_1\sqrt{\frac{C_{24}+2}{\varkappa}}, \quad (4.7)$$

$$\|v_m'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \le \frac{2C_{18}}{C_4}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 2(C_{19}+C_5+2\varkappa C_{20})\left(\frac{C_{24}+2}{\varkappa C_4}\right) + \frac{2\nu C_1}{C_4}\sqrt{\frac{C_{24}+2}{\varkappa}}. \quad (4.8)$$

Ввиду непрерывности вложений $C([0,T],V^1) \subset L_2(0,T;V^1)$, $C([0,T],V^1) \subset L_\infty(0,T;V^1)$ и оценок (4.6), (4.8) без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) получим, что $v_m \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$; $v_m \rightharpoonup v_*$ *-слабо в $L_\infty(0,T;V^1)$; $v_m' \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$ при $m \to +\infty$.

Отсюда по определению слабой сходимости в силу линейности и ограниченности операторов при $m \to +\infty$ имеем

$$\nu\int_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi\,dx \to \nu\int_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi\,dx;$$

$$\int_\Omega v_m'\varphi\,dx + \varkappa\int_\Omega \nabla v_m' : \nabla\varphi\,dx = \langle (J+\varkappa A)v_m', \varphi\rangle \to \langle (J+\varkappa A)v_*', \varphi\rangle = \frac{d}{dt}\int_\Omega v_*\varphi\,dx + \varkappa\frac{d}{dt}\int_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi\,dx.$$

С учетом оценки (4.7), как и выше, без ограничения общности существует функция $u \in L_2(0,T;V^3)$ такая, что $\varepsilon_m v_m' \rightharpoonup u$ слабо в $L_2(0,T;V^3)$ при $m \to +\infty$. Итак,

$$\varepsilon_m\int_\Omega \nabla(\Delta v_m') : \nabla(\Delta\varphi)\,dx \to \int_\Omega \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta\varphi)\,dx \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Однако последовательность $\varepsilon_m v_m'$ сходится к нулю в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-5}. На самом деле для любых $\chi \in \mathfrak{D}([0,T])$, $\varphi \in V^5$, используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\lim_{m\to\infty}\left|\varepsilon_m\int_0^T\int_\Omega \nabla(\Delta v_m'(t)) : \nabla(\Delta\varphi)\,dx\chi(t)\,dt\right| = \left|\int_0^T\int_\Omega \nabla v_*(t) : \nabla(\Delta^2\varphi)\,dx\frac{\partial\chi(t)}{\partial t}\,dt\right|\lim_{m\to\infty}\varepsilon_m = 0.$$

Таким образом, в силу единственности слабого предела

$$\varepsilon_m\int_\Omega \nabla(\Delta v_m') : \nabla(\Delta\varphi)\,dx \to 0 \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Из теоремы 3.1 вытекает вполне непрерывное вложение

$$F = \{v : v \in C([0,T], V^1);\ v' \in L_2(0,T; V^{-1})\} \subset C([0,T], L_4(\Omega)^n).$$

Отсюда с учетом оценок (4.6) и (4.8) следует, что $v_m \to v_*$ сильно в $C([0,T], L_4(\Omega)^n)$ при $m \to +\infty$. Таким образом, при $m \to +\infty$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \to \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx;$$

$$\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \to \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx;$$

$$\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \to \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx.$$

Действительно, здесь последовательность v_m сходится к v_* сильно в $C([0,T], L_4(\Omega)^n)$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_4(0,T; L_2(\Omega)^{n^2})$. Следовательно, их произведение сходится слабо к произведению пределов.

В оставшемся предельном переходе имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathscr{E}(v_m) W_\rho(v_m) - \mathscr{E}(v_*) W_\rho(v_*)) : \nabla\varphi\, dxdt \\
&\quad = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathscr{E}(v_m)(W_\rho(v_m) - W_\rho(v_*)) + (\mathscr{E}(v_m) - \mathscr{E}(v_*)) W_\rho(v_*)) : \nabla\varphi\, dxdt \\
&\quad \le C_{30} \Bigg(\|\mathscr{E}(v_m)\|_{C([0,T], L_2(\Omega)^{n^2})} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \int\limits_0^T \|(v_m - v_*)\|_{L_4(\Omega)^n}\, dt \\
&\qquad + \|W_\rho(v_*)\|_{C([0,T], L_\infty(\Omega)^{n^2})} \int\limits_0^T \mathscr{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi\, dt \Bigg).
\end{aligned}$$

Стало быть,

$$\int\limits_\Omega \mathscr{E}(v_m) W_\rho(v_m) : \nabla\varphi\, dx \to \int\limits_\Omega \mathscr{E}(v_*) W_\rho(v_*) : \nabla\varphi\, dx \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Аналогично

$$\int\limits_\Omega W_\rho(v_m) \mathscr{E}(v_m) : \nabla\varphi\, dx \to \int\limits_\Omega W_\rho(v_*) \mathscr{E}(v_*) : \nabla\varphi\, dx \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Принимая во внимание априорные оценки (4.6), (4.8) и условия $(\Psi1)$–$(\Psi4)$, без ограничения общности можем предположить, что существует $f_* \in L_2(0,T; V^{-1})$ такое, что $f_m \to f_* \in \Psi(v_*)$ при $m \to \infty$.

Таким образом, переходя в каждом из членов равенства (4.2) к пределу при $m \to +\infty$, получим, что предельные функции (v_*, f_*) удовлетворяют равенству (2.3), переходя в начальном условии (4.3) к пределу при $m \to +\infty$, — что v_* удовлетворяет начальному условию (2.4). Так как для последовательности $\{v_m\}$

имеют место априорные оценки (4.6) и (4.8), для v_* непосредственно следует оценка

$$\|v_*\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v_*'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \le \frac{C_{24}+2}{\varkappa} + \frac{2C_{18}}{C_4}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 2(C_{19}+C_5+2\varkappa C_{20})\left(\frac{C_{24}+2}{\varkappa C_4}\right) + \frac{2\nu C_1}{C_4}\sqrt{\frac{C_{24}+2}{\varkappa}}. \quad (4.9)$$

Отсюда $v_* \in E_1$, что и завершает доказательство теоремы 2.1. □

5. Доказательство теоремы 2.2

Из теоремы 2.1 получаем, что множество решений Σ непусто. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$ такая, что

$$\lim_{l\to\infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v,f,)\in\Sigma} \Phi(v, f).$$

Как и ранее, используя оценку (4.9), без ограничения общности можем предположить, что $v_l \rightharpoonup v_*$ *-слабо в $L_\infty(0,T;V^1)$; $v_l \to v_*$ сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$; $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$; $f_l \to f_* \in \Psi(v^*)$ сильно в $L_2(0,T;V^{-1})$ при $m \to +\infty$. Отсюда так же, как и в предыдущем доказательстве, получим, что $\nu A v_l \rightharpoonup \nu A v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$; $(I+\varkappa A)v_l' \rightharpoonup (I+\varkappa A)v_*'$ слабо в $L_2(0,T;V^{-3})$; $B_1(v_l) \to B_1(v_*)$ сильно в $L_2(0,T;V^{-1})$; $B_2(v_l) \rightharpoonup B_2(v_*)$ слабо в $L_2(0,T;V^{-3})$; $B_3(v_l) \rightharpoonup B_3(v_*)$ слабо в $L_2(0,T;V^{-3})$ при $m \to +\infty$.

Переходя к пределу в соотношении

$$(J+\varkappa A)v_l' - B_1(v_l) + \nu A v_l + \varepsilon N v_l' - \varkappa B_2(v_l) - \varkappa B_3(v_l) + 2\varkappa D(v_l) = f_l \in \Psi(v_l),$$

выводим, что $(v^*, f^*) \in \Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, имеем

$$\Phi(v^*, f^*) \le \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f),$$

стало быть, (v^*, f^*) — требуемое решение. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная кн., 1999. (Университетская серия; Т. 5).
2. *Obukhovskii V. V., Zecca P., Zvyagin V. G.* Optimal feedback control in the problem of the motion of a viscoelastic fluid // Topol. Methods Nonlinear Anal. 2004. V. 23. P. 323–337.
3. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М.: КРАСАНД (URSS), 2012.
4. *Гольдштейн Р. В., Городцов В. А.* Механика сплошных сред. М.: Наука; Физматлит, 2000. Ч. I.
5. *Рейнер М.* Реология. М.: Физматгиз, 1965.
6. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
7. *Zvyagin V. G., Vorotnikov D. A.* Approximating-topological methods in some problems of hydrodynamics // J. Fixed Point Theory Appl. 2008. V. 3, N 1. P. 23–49.
8. *Ладыженская О. А.* Математическая теория вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1964.
9. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
10. *Ворович И. И., Юдович В. И.* Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости // Мат. сб. 1961. Т. 53, № 4. С. 393–428.

11. *Simon J.* Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. V. 146. P. 65–96.

12. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2-е изд., испр. и доп. М.: УРСС, 2011.

Статья поступила 27 июля 2012 г.

Звягин Андрей Викторович
Воронежский гос. университет, НИИ математики,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
`zvyagin.a@mail.ru`