*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2013. Том 54, № 4*

*УДК 514.70*

# ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СФЕРЫ

**В. Н. Берестовский**

**Аннотация.** Найдены новые обобщенные нормальные однородные, но не нормальные однородные римановы метрики на сферах размерностей $4n+3$, $n \geq 1$, и всех накрываемых ими однородных пространственных формах; все эти пространства имеют нулевую эйлерову характеристику. В качестве следствий получены помимо некоторых других новых результатов новые доказательства аналогичных известных результатов для всех комплексных проективных пространств нечетной комплексной размерности начиная с трех.

**Ключевые слова:** геодезически орбитальное пространство, геодезический вектор, $\delta$-однородное пространство, $\delta$-вектор, естественно редуктивное пространство, (обобщенное) нормальное однородное риманово пространство, риманова субмерсия, слабо симметрическое пространство, субметрия.

## Введение

Метрическое пространство $(M,\rho)$ называется *$\delta$-однородным* [1, 2], если для любых точек $x, y \in M$ существует изометрия $f$ (*$\delta$-$x$-перенос*) пространства $(M,\rho)$ на себя такая, что $f(x) = y$ и $f$ имеет максимальное смещение в точке $x$, т. е. $\rho(z, f(z)) \leq \rho(x, f(x)) = \rho(x, y)$ для любой точки $z \in M$. Очевидно, каждое $\delta$-однородное метрическое пространство однородно. Связное риманово многообразие $(M,\mu)$ называется *$\delta$-однородным*, если оно $\delta$-однородно относительно своей внутренней метрики $\rho_\mu$. При этом оно называется *$G$-$\delta$-однородным* или *обобщенным $G$-нормальным однородным* [3], если изометрии $f$ в определении $\delta$-однородности можно брать из (под)группы Ли $G$ изометрий пространства $(M,\mu)$.

Последний термин связан с тем, что однородное риманово пространство $(G/H,\mu)$ со связной группой Ли $G$ $G$-$\delta$-однородно тогда и только тогда, когда группа Ли $G$ допускает биинвариантную внутреннюю метрику $\sigma$ (вследствие одного давнего результата автора [4] она автоматически должна быть финслеровой) такую, что каноническая проекция $p : (G,\sigma) \to (G/H,\rho_\mu)$ является субметрией, т. е. отображает каждый замкнутый шар на замкнутый шар того же радиуса [2]. В качестве $\sigma$ в компактном случае можно взять внутреннюю метрику, индуцируемую (всегда биинвариантной) нормой Чебышева римановой метрики $\mu$ [5]. При этом пространство $(G/H,\mu)$ *нормально однородно* [6], если $\sigma$ — риманова внутренняя метрика; римановы субмерсии полных римановых многообразий характеризуются как гладкие субметрии [7].

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00081–а).

Тогда ясно, что каждое однородное нормальное риманово многообразие $(G/H, \mu)$ является обобщенным нормальным однородным. Обратное не всегда верно, более того, существуют связные компактные $\delta$-однородные римановы многообразия $(M, \mu)$, не являющиеся нормальными однородными относительно произвольной связной транзитивной (под)группы Ли изометрий пространства $(M, \mu)$. Существование таких пространств всегда связано с необычными геометрическими свойствами присоединенных представлений соответствующих групп Ли $G$ [2, 3]. Полная классификация таких односвязных римановых многообразий с положительной эйлеровой характеристикой, не разложимых в прямое метрическое произведение, получена в статье [3]. Это в точности все однородные римановы многообразия $(\mathbb{C}P^{2n+1} = Sp(n+1)/(U(1) \times Sp(n)), \nu_t)$ при $\frac{1}{2} < t < 1$, рассматриваемые в этой статье, и им гомотетичные.

Ранее не было известно, существуют ли похожие связные компактные однородные римановы многообразия нулевой эйлеровой характеристики (вследствие теоремы Хопфа — Самельсона [8] всякое компактное однородное многообразие $G/H$ имеет неотрицательную эйлерову характеристику). В данной статье доказано, что такими свойствами обладают все однородные римановы сферы $(S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n), \mu_t)$ и им гомотетичные при $\frac{1}{2} < t < 1$. Других инвариантных римановых метрик на однородном пространстве $Sp(n+1)/Sp(n)$ с этим свойством не существует. При этом римановы многообразия $(S^{4n+3}, \mu_t)$ $\delta$-однородны тогда и только тогда, когда $0 < t \leq 1$. В качестве следствия дано новое доказательство утверждения, что римановы многообразия $(\mathbb{C}P^{2n+1}, \nu_t)$ $\delta$-однородны при $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Основные из полученных утверждений для сфер $S^{4n+3}$ переносятся на все накрываемые ими однородные пространственные формы.

В односвязном случае все упомянутые однородные римановы многообразия *слабо симметричны* [9] при всех $t > 0$. Кроме того, пространства $(S^{4n+3}, \mu_t)$, $t > 0$, *естественно редуктивны* [10–12] относительно группы изометрий $Sp(n+1) \times Sp(1)$. Заметим, что вследствие теоремы 3 из [13] компактное естественно редуктивное риманово многообразие с положительной эйлеровой характеристикой нормально однородно. Следовательно, римановы пространства $(\mathbb{C}P^{2n+1}, \nu_t)$ могут быть естественно редуктивными только при $t = \frac{1}{2}$ и $t = 1$, когда они нормальные однородные относительно максимальных связных групп Ли изометрий.

Напомним, что риманово многообразие $(M, \mu)$ слабо симметрично, если для любых точек $x, y \in M$ существует изометрия $f$ пространства $(M, \mu)$, переставляющая эти точки. Если $f$ можно брать из (под)группы Ли $G$ изометрий пространства $(M, \mu)$, то говорят, что $(M, \mu)$ *слабо симметрично* относительно группы $G$. Ясно, что эти понятия можно распространить на метрические пространства. Очевидно, каждое слабо симметрическое метрическое пространство однородно.

Критерий Костанта [11, 12] естественной редуктивности однородного риманова пространства $(G/H, \mu)$ формулируется в доказательстве предложения 3. Каждое нормальное однородное риманово пространство $(G/H, \mu)$ естественно редуктивно. Каждое естественно редуктивное или слабо симметрическое однородное риманово пространство *геодезически орбитально* [14, 15], что означает, что каждая геодезическая пространства есть орбита некоторой 1-параметрической подгруппы изометрий пространства. Каждое $\delta$-однородное риманово многообразие геодезически орбитально и имеет неотрицательную секционную кривизну [2].

Автор признателен профессорам Ю. Г. Никонорову и В. Циллеру за очень полезные дискуссии.

## 1. Исследуемые однородные римановы многообразия

Классификация связных компактных групп Ли, действующих транзитивно и эффективно (или почти эффективно) на данном связном компактном многообразии $M$, является очень трудной задачей. Изучение случая сфер $M = S^k$ было начато Монтгомери и Самельсоном [16] и окончательно завершено Борелем [17, 18]. Существенно более общие случаи изучены в работе А. Л. Онищика [19], и результаты исследования суммированы в табл. 2 его работы. В том числе он получил известные результаты для сфер и новые результаты для проективных пространств. В статье Циллера [20] эти классификационные результаты для сфер и односвязных проективных пространств приведены в виде удобных таблиц и описаны все инвариантные римановы метрики на соответствующих однородных пространствах с целью изучения инвариантных эйнштейновых метрик на этих пространствах. Особенно интересны действия с приводимыми линейными представлениями изотропии, поскольку соответствующие однородные пространства допускают семейства инвариантных римановых метрик с числом параметров не меньше двух. Опишем группы Ли и их однородные римановы пространства, которые нас интересуют.

По определению симплектическая группа $Sp(n+1)$, $n \geq 1$, состоит из всех кватернионных $((n+1)\times(n+1))$-матриц $Q$ таких, что $Q\overline{Q}^T = E_{n+1}$. Здесь $^T$ и $\overline{(\cdot)}$ — соответственно операции транспонирования и кватернионного сопряжения матриц, а $E_{n+1}$ — диагональная единичная $((n+1)\times(n+1))$-матрица. Отсюда следует, что алгебра Ли $\mathfrak{sp}(n+1)$ состоит из всех $((n+1)\times(n+1))$-матриц $U$ таких, что $U = -\overline{U}^T$; в частности, все диагональные элементы матрицы $U$ являются элементами из $\Im(\mathbb{H})$, т. е. чисто мнимыми кватернионами. Важную роль будут играть первый столбец и первая строка матрицы $U$, которые будем обозначать соответственно через $(u_1, u^T := (u_2, \dots, u_{n+1}))^T$ и $(u_1, -\bar{u}^T)$, в то время как остальные элементы матрицы $U$ — обычным образом: $u_{lm}$, $l, m = 2, \dots, n+1$. Через $Sp(1)$ и $Sp(n)$ соответственно будут обозначаться подгруппы блочно-диагональных матриц $Sp(1)\times E_n$ и $E_1 \times Sp(n)$ в $Sp(n+1)$, где сначала указан блок, стоящий в левом верхнем углу. Их (под)алгебры Ли имеют вид $\mathfrak{sp}(1) = \mathfrak{sp}(1)\times 0_{nn}$ и $\mathfrak{sp}(n) = 0_{11}\times\mathfrak{sp}(n)$ блочно-диагональных матриц. Нижние индексы здесь и далее указывают размер матрицы или вектор-столбца. Заметим, что $Sp(1)$ — мультипликативная группа всех единичных кватернионов.

Вследствие простоты группы Ли $Sp(n+1)$ всякое $\mathrm{Ad}(Sp(n+1))$-инвариантное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{sp}(n+1)$ пропорционально

$$\langle U, V\rangle := -\Re(\mathrm{trace}(UV)). \tag{1}$$

Возникает $\mathrm{Ad}(Sp(n))$-инвариантное $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортогональное разложение

$$\mathfrak{sp}(n+1) = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(n), \tag{2}$$

где

$$\mathfrak{p}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\bar{u}^T \\ u & 0_{nn} \end{pmatrix},\ u \in \mathbb{H}^n \right\}. \tag{3}$$

При этом $\mathfrak{sp}(1)\oplus\mathfrak{sp}(n)\subset\mathfrak{sp}(n+1)$ — (под)алгебра Ли подгруппы Ли $Sp(1)\times Sp(n)$ и

$$[\mathfrak{p}_2,\mathfrak{p}_1]=\mathfrak{p}_1,\quad [\mathfrak{sp}(n),\mathfrak{p}_1]=\mathfrak{p}_1,\quad [\mathfrak{p}_2,\mathfrak{sp}(n)]=0,\quad [\mathfrak{sp}(n),\mathfrak{sp}(n)]=\mathfrak{sp}(n). \tag{4}$$

Кроме того, группа $\mathrm{Ad}(Sp(n))$ действует неприводимо на первом и последнем слагаемых суммы (2), а на $\mathfrak{p}_2:=\mathfrak{sp}(1)=\{u_1\in\Im(\mathbb{H})\}$ действует тривиально.

Каноническое скалярное произведение на пространстве $\mathbb{H}^{n+1}$ дается формулой

$$(v,w)=\Re(\bar{v}^Tw), \tag{5}$$

где $v,w\in\mathbb{H}^{n+1}$ — вектор-столбцы. Известно, что группа Ли $Sp(n+1)$ действует слева изометриями на $(\mathbb{H}^{n+1},(\cdot,\cdot))$ и транзитивно и эффективно на единичной сфере $S^{4n+3}(1)$ пространства $\mathbb{H}^{n+1}$ с центром в нуле, со стабилизатором $Sp(n)\subset Sp(n+1)$ в точке-векторе $v_0=(1,0,\dots,0)^T\in S^{4n+3}(1)$. Далее вместо $S^{4n+3}(1)$ будем писать $S^{4n+3}$. Таким образом, получаем однородное пространство $S^{4n+3}=Sp(n+1)/Sp(n)$. На $Sp(n+1)/Sp(n)$ зададим $Sp(n+1)$-инвариантную риманову метрику $\mu_t=\mu_{\frac{1}{2},t}$, $t>0$, определяемую $\mathrm{Ad}(Sp(n))$-инвариантным скалярным произведением

$$(\cdot,\cdot)_t:=\frac{1}{2}\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_1\times\mathfrak{p}_1}+t\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_2\times\mathfrak{p}_2} \tag{6}$$

на $\mathfrak{p}$. Ясно, что риманова метрика $\mu_t$ на $S^{4n+3}$ $Sp(n+1)$-нормальна в точности тогда, когда $t=\frac{1}{2}$.

Для каждого фиксированного элемента $U\in\mathfrak{sp}(n+1)$ вектор-функция $U(v)=Uv$, $v\in S^{4n+3}$, — киллингово векторное поле на $S^{4n+3}$ для любой $Sp(n+1)$-инвариантной римановой метрики, в частности, для всех $\mu_t$, $t>0$. Вследствие транзитивности группы $Sp(n+1)$ на $S^{4n+3}$ $\{Uv: U\in\mathfrak{sp}(n+1)\}$ — касательное пространство к $S^{4n+3}$ в точке $v$ для фиксированного вектора $v\in S^{4n+3}$. При этом

$$Uv_0=(u_1,u^T)^T, \tag{7}$$

чем и вызвано примененное выше обозначение для элементов матрицы $U\in\mathfrak{sp}(n+1)$. Из формулы (7) следует, что соответствие $U\in\mathfrak{p}\to Uv_0$ определяет изоморфизм векторных пространств $\mathfrak{p}$ и $S^{4n+3}_{v_0}$. Норму, индуцируемую римановой метрикой $\mu_t$ на каждом касательном пространстве $S^{4n+3}_v$, $v\in S^{4n+3}$, (соответственно скалярным произведением (1) на любом пространстве $\mathbb{H}^m$) будем обозначать через $\|\cdot\|$ (соответственно через $|\cdot|$). На основании формул (1), (5)–(7) получаем, что

$$\|Uv_0\|^2=t|u_1|^2+|u|^2. \tag{8}$$

Ясно, что подгруппа $Sp(1)\subset Sp(n+1)$ коммутирует с подгруппой $Sp(n)\subset Sp(n+1)$, поэтому корректно определено ее правое действие на однородном пространстве $S^{4n+3}=Sp(n+1)/Sp(n)$, задаваемое формулой

$$R_q(gSp(n))=gSp(n)q=gqSp(n),\quad g\in Sp(n+1),\ q\in Sp(1). \tag{9}$$

Другими словами,

$$R_q((q_1,\dots,q_{n+1})^T)=(q_1q,\dots,q_nq)^T,\quad (q_1,\dots,q_{n+1})^T\in S^{4n+3},\ q\in Sp(1). \tag{10}$$

Значит, есть и другое представление $S^{4n+3}=(Sp(n+1)\times Sp(1))/(Sp(n)\times Sp(1))$, где сомножитель $Sp(1)$ пишется справа вследствие его правого действия. При этом $\mathrm{Ad}(Sp(1))$ для прямого сомножителя $Sp(1)$ в стабилизаторе $Sp(n)\times Sp(1)$ действует неприводимо на $\mathfrak{p}_2:=\mathfrak{sp}(1)$. Поэтому справедливо

**Предложение 1.** *Римановы метрики на $S^{4n+3}$, инвариантные относительно группы Ли $Sp(n+1)\times Sp(1)$, — в точности все римановы метрики, пропорциональные метрикам $\mu_t$, $t>0$.*

Дадим наглядное описание однородных римановых пространств $(S^{4n+1},\mu_t)$, $t>0$. Рассмотрим каноническую проекцию (расслоение Хопфа)

$$\mathrm{pr}: S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n) \to Sp(n+1)/(Sp(1)\times Sp(n)) = \mathbb{H}P^n. \tag{11}$$

Заметим, что эта проекция является композицией расслоения Хопфа

$$\mathrm{pr}_1: S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n) \to Sp(n+1)/(U(1)\times Sp(n)) = \mathbb{C}P^{2n+1} \tag{12}$$

со слоями-окружностями и последующего расслоения Хопфа

$$\mathrm{pr}_2: \mathbb{C}P^{2n+1} = Sp(n+1)/(U(1)\times Sp(n)) \to Sp(n+1)/(Sp(1)\times Sp(n)) = \mathbb{H}P^n$$

с двумерными слоями-сферами.

Из формулы (8) следует, что для канонической $Sp(n+1)$-инвариантной римановой метрики $\eta$ (с секционными кривизнами в отрезке $\left[\frac{1}{4},1\right]$) на $\mathbb{H}P^n$ проекция

$$\mathrm{pr}: (S^{4n+3},\mu_t) \to (\mathbb{H}P^n,\eta) \tag{13}$$

является римановой субмерсией и $(S^{4n+3},\mu_1)$ изометрично $S^{4n+3}(1)$ с канонической метрикой. При $t=1$, как известно, проекция (13) является римановой субмерсией с вполне геодезическими слоями — трехмерными сферами, изометричными единичной евклидовой 3-сфере $S^3(1)\subset S^{4n+3}(1)$. Для скалярного произведения $\mu_t$, $t>0$, на всех слоях проекции (13) $\mu_t = t\mu_1$, в то время как $\mu_t=\mu_1$ на всех $4n$-мерных площадках $C\subset TS^{4n+3}$, ортогональных слоям-3-сферам. Отметим, что слои проекции pr являются в точности орбитами описанного ранее формулами (9) и (10) правого действия (связной) группы Ли $Sp(1)$ единичных кватернионов $q$. Вполне геодезичность этих слоев-орбит является следствием того, что все изометрии $R_q$ из формулы (9) — переносы Клиффорда — Вольфа (т. е. изометрии, смещающие все точки на одно и то же расстояние), так как все изометрии $R_q$ коммутируют с левыми действиями группы $Sp(n+1)$. Необходимо заметить, что вычисления в разд. 3 и 5 основаны на этом наглядном описании и непосредственном рассмотрении сфер $S^{4n+3}\subset(\mathbb{H}^{n+1},(\cdot,\cdot))$, не связанном с использованием скалярного произведения (1) на алгебрах Ли. Нужно обозначать кватернион одним символом, а не десятью.

Существует единственная риманова метрика $\nu_t$ на $Sp(n{+}1)/(U(1){\times}Sp(n)) = \mathbb{C}P^{2n+1}$, для которой проекция $\mathrm{pr}_1$ является римановой субмерсией относительно римановой метрики $\mu_t$ на $S^{4n+3}$. При этом проекция $\mathrm{pr}_2$ будет римановой субмерсией для метрик $\nu_t$ и $\eta$ и слои обеих проекций вполне геодезические. Заметим, что каждая $Sp(n{+}1)$-инвариантная риманова метрика на этом однородном пространстве пропорциональна некоторой метрике $\nu_t$, $t>0$. В стандартных обозначениях $\frac{1}{2}=x_1$, $t=x_2$, так что выполняются равенства

$$\mu_t = \mu_{\frac{1}{2},t}, \quad \nu_t = \nu_{\frac{1}{2},t}, \quad t = \frac{x_2}{2x_1}. \tag{14}$$

В статье Д. Е. Вольпера [21] (см. также более позднюю статью [22]) были найдены точные значения максимальных и минимальных значений секционных кривизн $K(t)$ описанных выше $(Sp(n{+}1){\times}Sp(1))$-инвариантных римановых метрик $\mu_t$ на сферах $S^{4n+3}=Sp(n{+}1)/Sp(n)$ как функций параметра $t$. Вследствие теорем 5 и 4 нас будут интересовать только римановы метрики $\mu_t$ с условием

$0 < t \leq 1$ и римановы метрики $\nu_t$ при $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. На основании [21] для рассматриваемых промежутков секционная кривизна положительна и $\delta$-защемленность (она зависит только от $t$; $x_1$ в (14) может меняться) соответствующих римановых метрик $\mu_t$ равна

$$\delta(t) = 1 + \frac{49(t^2 - t)}{(11t + 1)(4 - 3t)} \quad \text{при } \frac{4}{5} \leq t \leq 1;$$

$$\delta(t) = \frac{t}{4 - 3t} \text{ при } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{4}{5}; \quad \delta(t) = t^2 \text{ при } 0 < t \leq \frac{1}{3}.$$

Нетрудно убедиться, что в этих промежутках функция $\delta(t)$ строго возрастает и принимает на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ значения от $\frac{1}{5}$ до 1. В статье Д. Е. Вольпера [23] получены аналогичные результаты для однородных римановых пространств $(\mathbb{C}P^{2n+1} = Sp(n+1)/(U(1) \times Sp(n)), \nu_t)$. На интервале $(0, 1]$ имеем $K(t) > 0$, а функция $\delta(t) = \frac{t^2}{4}$ строго возрастает и на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ принимает значения от $\frac{1}{16}$ до $\frac{1}{4}$.

## 2. Предварительные результаты

Наша первая цель — найти для всех $n \geq 1$ все обобщенные $Sp(n+1)$-нормальные, в другой терминологии, $\delta$-$Sp(n+1)$-однородные, римановы метрики на сферах $S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n), n \geq 1$. Прежде всего справедливо следующее важное

**Предложение 2.** *Каждая обобщенная $Sp(n+1)$-нормальная риманова метрика $\mu$ на $Sp(n+1)/Sp(n)$ допускает группу изометрий $Sp(n+1) \times Sp(1)$.*

Доказательство. Есть следующие включения групп: $Sp(n) \subset Sp(1) \times Sp(n) \subset Sp(n+1)$, причем любой элемент подгруппы $Sp(1) \times \{e\}$ коммутирует с любым элементом подгруппы $\{e\} \times Sp(n)$. Следовательно, каждый элемент $q$ группы $Sp(1) \times \{e\}$ нормализует подгруппу $\{e\} \times Sp(n) = Sp(n)$. Тогда вследствие обобщенной $Sp(n+1)$-нормальности метрики $\mu$ и на основании теоремы 3 в [13] преобразование $R_q : S^{4n+3} \to S^{4n+3}$, определенное формулой (9), является переносом Клиффорда — Вольфа пространства $(S^{4n+3}\mu)$. При этом ясно, что $R_q$ коммутирует со всеми изометриями из $Sp(n+1)$. Таким образом, пространство $(S^{4n+4}, \mu)$ допускает группу изометрий $Sp(n+1) \times Sp(1)$.

Замечание 1. Аналогичное, более общее, предложение для геодезически орбитальных метрик [14] доказал Ю. Г. Никоноров в [24].

**Предложение 3.** *Однородное риманово многообразие $(G/H, \mu)$ с компактной связной простой группой Ли $G$ естественно редуктивно тогда и только тогда, когда оно нормально однородно.*

Доказательство. Всякое нормальное однородное риманово пространство естественно редуктивно. Предположим, что пространство $(G/H, \mu)$ естественно редуктивно. По критерию Костанта это эквивалентно существованию $\mathrm{Ad}(H)$-инвариантного разложения в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$ такого, что на связной подгруппе Ли $G' \subset G$ с алгеброй Ли — идеалом $\mathfrak{g}' = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{g}$ — существует невырожденная биинвариантная симметричная форма $\{\cdot, \cdot\}$, ограничение которой на $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ совпадает со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, определяющим метрику $\mu$, причем алгебра Ли $\mathfrak{h}'$ стабилизатора $H' = H \cap G'$ группы Ли $G'$ ортогональна $\mathfrak{p}$ относительно $\{\cdot, \cdot\}$. (Эту формулировку можно найти в теореме 7.85 в книге Бессе [12]; заметим, что там в записи $\mathfrak{g}'$ есть опечатка.) Тогда

$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ вследствие простоты алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $G' = G$, так как эти группы Ли связны. Из простоты и компактности группы Ли $G$ следует, что форма $\{\cdot,\cdot\}$ положительно определена. Тогда пространство $(G/H,\mu)$ нормально однородно.

**Теорема 1.** 1. *Инвариантная риманова метрика на $Sp(n+1)/Sp(n)$ дает слабо симметрическое* [9] *риманово многообразие тогда и только тогда, когда она пропорциональна $\mu_t$, $t>0$; при этом многообразие слабо симметрично относительно группы Ли $Sp(n+1)\times Sp(1)$. Пространство $(Sp(n+1)/Sp(n),\mu_t)$ естественно редуктивно тогда и только тогда, когда оно нормально однородно, а нормально однородно тогда и только тогда, когда $t=\frac{1}{2}$.*

2. *Однородное риманово пространство $((Sp(n+1)\times Sp(1))/(Sp(n)\times Sp(1)),\mu_t)$ естественно редуктивно при всех $t>0$, а нормально однородно тогда и только тогда, когда $0<t<\frac{1}{2}$.*

3. *Для каждого $t>0$ риманово пространство $((Sp(n+1)\times U(1))/(Sp(n)\times U(1)),\mu_t)$ не является нормальным однородным.*

4. *Пространство $(S^{4n+3},\mu_1)$ нормально однородно относительно наибольшей связной группы Ли изометрий $SO(4(n+1))$ и симметрично относительно наибольшей группы Ли изометрий $O(4(n+1))$.*

Доказательство. 1. Первое утверждение есть в [25]. Вторая часть второго утверждения следует из равенств (14) и того, что $\mu_{x_1,x_2}$ $Sp(n+1)$-нормально однородна тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$. Первая часть вытекает из предложения 3.

2. Утверждение следует из теоремы 3 в статье Циллера [26] (см. также [20]). Нам будут нужны детали доказательства на с. 584–586 статьи [26]. Изложим их с некоторыми изменениями.

Группу $Sp(n+1)\times Sp(1)$ и пространство $Sp(n+1)/Sp(n)$ обозначим через $\overline{G}=G\times K$ и $G/H$. Группа $\overline{G}$ действует слева на $G/H$, где элемент $(g,k)\in\overline{G}$ действует левым умножением на $g$ и правым умножением на $k^{-1}$. Группа изотропии $\overline{H}$ этого действия изоморфна $H\times K$ с вложением $(h,k)\to(hk,k)$. Поэтому $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}_1\oplus\mathfrak{p}_2\oplus\mathfrak{k}$ и

$$\bar{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}\oplus\{(Y,Y)\in\mathfrak{p}_2\oplus\mathfrak{k}\mid Y\in\mathfrak{p}_2\cong\mathfrak{k}\}. \tag{15}$$

В качестве $\mathrm{Ad}(\overline{H})$-инвариантного дополнения к $\bar{\mathfrak{h}}$ выбирается

$$\bar{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}_1\oplus\bar{\mathfrak{p}}_2,\quad \text{где } \bar{\mathfrak{p}}_2=\{(aX,bX)\in\mathfrak{p}_2\oplus\mathfrak{k}\mid X\in\mathfrak{p}_2\cong\mathfrak{k}\}. \tag{16}$$

Здесь $a>0$ и $a-b=1$; тогда изоморфизм между $\overline{G}/\overline{H}$ и $G/H$ на уровне алгебр Ли переводит $\mathfrak{p}_1$ в $\mathfrak{p}_1$ тождественным отображением и $(aX,bX)\to aX-bX=X\in\mathfrak{p}_2$. На $\mathfrak{p}$ рассматривается скалярное произведение $2(\cdot,\cdot)_t$ (см. (6)).

Так как подгруппы $G$ и $K$ группы $\overline{G}$ простые и взаимно коммутируют, всякая $\mathrm{Ad}(\overline{G})$-инвариантная симметричная билинейная форма $\{\cdot,\cdot\}$ на $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{k}$ должна быть прямой суммой форм (на $\{\cdot,\cdot\}$-ортогональных слагаемых $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$), пропорциональных скалярным произведениям вида (1). Положим $a=2t$, $b=2t-1$ и

$$\{\cdot,\cdot\}_{2t}=\langle\cdot,\cdot\rangle\oplus-\frac{a}{b}\langle\cdot,\cdot\rangle=\langle\cdot,\cdot\rangle\oplus-\frac{2t}{2t-1}\langle\cdot,\cdot\rangle, \tag{17}$$

предполагая, что $t\neq\frac{1}{2}$. Ясно, что тогда билинейная форма (17) невырожденна, $\mathrm{Ad}(\overline{G})$-инвариантна и

$$\{\mathfrak{p}_1,\bar{\mathfrak{h}}\}_{2t}=0,\quad \{\mathfrak{p}_1,\bar{\mathfrak{p}}_2\}_{2t}=0,\quad \{\cdot,\cdot\}_{2t}|_{\mathfrak{p}_1\times\mathfrak{p}_1}=2(\cdot,\cdot)_t|_{\mathfrak{p}_1\times\mathfrak{p}_1}.$$

Из формул (15)–(17) вытекает, что $\{\mathfrak{p}_2, \bar{\mathfrak{h}}\}_{2t} = 0$. Таким образом, при $t \neq \frac{1}{2}$ получается $\{\cdot,\cdot\}_{2t}$-ортогональное разложение в прямую сумму

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{p}_1 \oplus \bar{\mathfrak{p}}_2 \oplus \bar{\mathfrak{h}}. \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что

$$[\bar{\mathfrak{h}}, \bar{\mathfrak{h}}] \subset \bar{\mathfrak{h}}, \quad [\bar{\mathfrak{h}}, \mathfrak{p}_1] \subset \mathfrak{p}_1, \quad [\bar{\mathfrak{h}}, \bar{\mathfrak{p}}_2] \subset \bar{\mathfrak{p}}_2, \quad [\bar{\mathfrak{p}}_2, \bar{\mathfrak{p}}_2] \subset \bar{\mathfrak{p}}_2, \quad [\bar{\mathfrak{p}}_2, \mathfrak{p}_1] \subset \mathfrak{p}_1. \tag{19}$$

Предположим, что $(aX, bX), (aY, bY) \in \bar{\mathfrak{p}}_2$, где $X, Y \in \mathfrak{p}_2$. Тогда вследствие формулы (17)

$$\{(aX, bX), (aY, bY)\}_{2t} = (a^2 - ab)\langle X, Y\rangle = a\langle X, Y\rangle = 2t\langle X, Y\rangle.$$

Доказанное означает, что пространство $((Sp(n+1)\times Sp(1))/(Sp(n)\times Sp(1)), 2\mu_t)$ естественно редуктивно при $t \neq \frac{1}{2}$. Формула (17) показывает, что форма $\{\cdot,\cdot\}_{2t}$ положительно определена при $0 < t < \frac{1}{2}$. Следовательно, в этом случае пространство $((Sp(n+1)\times Sp(1))/(Sp(n)\times Sp(1)), 2\mu_t)$ нормально однородно. Проведенные рассуждения показывают, что форма, удовлетворяющая критерию Костанта, должна совпадать с формой $\{\cdot,\cdot\}_{2t}$ при $t > \frac{1}{2}$ и в этом случае неопределенна. Следовательно, пространство $((Sp(n+1)\times Sp(1))/(Sp(n)\times Sp(1)), 2\mu_t)$ не будет нормальным однородным при $t > \frac{1}{2}$. Обсуждение случая $t = \frac{1}{2}$ опускается. Очевидно, что все доказанные здесь утверждения справедливы и для однородного пространства $((Sp(n+1)\times Sp(1))/(Sp(n)\times Sp(1)), \mu_t)$.

3. Утверждения о нормальной однородности во всех случаях 1–4 следуют из табл. 2.3 и 2.4 статьи [27].

4. Это утверждение хорошо известно.

Замечание 2. Все пространства $((Sp(n+1)\times Sp(1))/(Sp(n)\times Sp(1)), \mu_t)$, $t > 0$, с точностью до гомотетии характеризуются как дистанционные сферы (с индуцированной римановой метрикой) в пространстве $\mathbb{H}P^{n+1}$, снабженном канонической симметрической римановой метрикой (с секционными кривизнами в отрезке $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$). Утверждение 2 теоремы 1 означает, что лишь дистанционные сферы с достаточно большим радиусом нормально однородны [20, 25, 27].

**Предложение 4.** *Пусть $p : (M, \mu) \to (N, \nu)$ — риманова субмерсия, являющаяся однородным расслоением относительно некоторой группы Ли $G$ изометрий пространства $(M, \mu)$, и пространство $(M, \mu)$ $G$-$\delta$-однородно. Тогда и $(N, \nu)$ $G$-$\delta$-однородно.*

Доказательство. Пусть $\rho_M, \rho_N$ — внутренние метрики на $M$ и $N$, индуцируемые метрическими тензорами $\mu$ и $\nu$, и $x, y$ — произвольные точки из $N$. Вследствие однородности пространство $(M, \rho_M)$ конечно-компактно. Значит, существуют точки $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, $\tilde{y} \in p^{-1}(y)$ такие, что $\rho_M(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho_N(x, y)$. Так как $(M, \rho_M)$ $G$-$\delta$-однородно, существует $\delta(\tilde{x})$-перенос $\tilde{g} \in G$ пространства $(M, \rho_M)$ такой, что $\tilde{g}(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Поскольку $G$ сохраняет слои римановой субмерсии, $\tilde{g}$ индуцирует некоторую изометрию $g$ пространства $(N, \rho_N)$. Пусть $z$ — произвольная точка из $M$ и $\tilde{z}$ — произвольная точка из слоя $p^{-1}(z)$. Тогда $g(x) = y$ и

$$\begin{aligned}\rho_N(x, g(x)) = \rho_N(x, y) = \rho_M(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho_M(\tilde{x}, \tilde{g}(\tilde{x})) \\ \geq \rho_M(\tilde{z}, \tilde{g}(\tilde{z})) \geq \rho_N(p(\tilde{z}), p(\tilde{g}(\tilde{z}))) = \rho_N(z, g(z)).\end{aligned}$$

Следовательно, $(N, \nu)$ $G$-$\delta$-однородно.

Замечание 3. $G$-$\delta$-однородность в предложении 4 может быть заменена $G$-нормальной однородностью или слабой симметричностью относительно группы Ли $G$.

Следующее предложение является частным случаем предложения 4.

**Предложение 5.** *Пусть $(M = G/H, \mu)$ и $(M_1 = G/H_1, \nu)$ — однородные связные компактные римановы многообразия, $H \subset H_1$, и каноническая проекция $\mathrm{pr} : (M, \mu) \to (M_1, \nu)$, индуцированная вложением $H \subset H_1$, является римановой субмерсией. Тогда пространство $(G/H_1, \nu)$ обобщенно $G$-нормально однородно, если пространство $(G/H, \mu)$ обобщенно $G$-нормально однородно.*

Замечание 4. Обобщенную $G$-нормальную однородность в предложении 5 можно заменить естественной редуктивностью.

**Следствие 1.** *Если риманова метрика $\mu_t$ на $S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n)$ обобщенно $Sp(n+1)$-нормально однородна, то $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.*

Доказательство. Как сказано выше, имеется риманова субмерсия

$$\mathrm{pr}_1 : (S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n), \mu_t) \to (\mathbb{C}P^{2n+1} = Sp(n+1)/(U(1) \times Sp(n)), \nu_t).$$

Если метрика $\mu_t$ обобщенно $Sp(n+1)$-нормально однородна, то на основании предложения 5 метрика $\nu_t$ обобщенно $Sp(n+1)$-нормально однородна. Но вследствие априорных оценок для метрик $\nu_t$ из [2] должно быть $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Замечание 5. В [3] доказано, что метрики $\nu_t$ действительно обобщенные $Sp(n+1)$-нормальные однородные при $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Но в доказательстве следствия 1 уже априорных оценок достаточно.

## 3. Сфера $S^7$ и комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^3$

Итак, нас в первую очередь интересует вопрос, являются ли римановы метрики $\mu_t$ на сферах $S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n)$ обобщенными $Sp(n+1)$-нормальными однородными при $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Начнем со случая $n = 1$. В этом случае

$$\mathfrak{sp}(2) = \left\{ U = \begin{pmatrix} u_1 & -\overline{u_2} \\ u_2 & u_{22} \end{pmatrix} : \overline{u_1} = -u_1, \overline{u_{22}} = -u_{22} \right\}, \tag{20}$$

$$\mathfrak{sp}(1) = \left\{ U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} : \overline{u_{22}} = -u_{22} \right\}, \tag{21}$$

$$S^7 = \left\{ v = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} : q_1\overline{q_1} + q_2\overline{q_2} = 1 \right\}. \tag{22}$$

Интересующий нас вопрос означает следующее: можно ли для каждого числа $t$, где $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, и каждого вектора $(u_1, u_2)^T$, где $u_1 \in \Im(\mathbb{H})$, $u_2 \in \mathbb{H}$, найти такой кватернион $u_{22} \in \Im(\mathbb{H})$, что для матрицы $U$ из (20) выполняется неравенство

$$\|U(v_0)\|^2 \geq \|Uv\|^2 \tag{23}$$

для всех точек $v = (q_1, q_2)^T \in S^7$, т. е. $U$ — *$\delta$-вектор.* Подсчитаем $\|Uv\|^2$ для произвольных элементов $U \in \mathfrak{sp}(2)$ и $v \in S^7$. Каждый вектор, касательный к слою $\mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{pr}(v)) = \{vq \mid q \in Sp(1)\}$ в точке $v$, имеет вид $vu, u \in \mathfrak{sp}(1) = \Im(\mathbb{H})$. Тогда

$$v_0 u = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u \in \Im(\mathbb{H}). \tag{24}$$

Из (8) следует, что $\|Uv_0\|^2 = t|u_1|^2 + |u_2|^2$. Для каждого чисто мнимого кватерниона $u \in \Im(H)$ скалярное произведение векторов $vu$ и $Uv$ в пространстве $\mathbb{H}^2$ равно

$$\Re(\overline{vu}^T Uv) = \Re(\bar{u} \cdot \bar{v}^T Uv) = \Re(-u(\bar{v}^T Uv)).$$

Кроме того, $\bar{v}^T Uv$ — чисто мнимый кватернион, так как $\overline{U}^T = -U$. Тогда $|\bar{v}^T Uv|^2$ — квадрат евклидовой нормы ортогональной проекции касательного вектора $Uv \in S^7_v$ на касательное пространство к слою проекции pr в точке $v$. По теореме Пифагора

$$\|Uv\|^2 = |Uv|^2 + (t-1)|\bar{v}^T Uv|^2.$$

Вычислим правую часть этой формулы более детально. Имеем

$$Uv = \begin{pmatrix} u_1 q_1 - \overline{u_2} q_2 \\ u_2 q_1 + u_{22} q_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{v}^T Uv = (\overline{q_1} \quad \overline{q_2})(Uv) &= \overline{q_1}(u_1 q_1 - \overline{u_2} q_2) + \overline{q_2}(u_2 q_1 + u_{22} q_2) \\ &= \overline{q_1} u_1 q_1 + \overline{q_2} u_{22} q_2 + 2\Im(\overline{q_2} u_2 q_1). \end{aligned}$$

Теперь

$$\begin{aligned} |Uv|^2 &= |u_1 q_1 - \overline{u_2} q_2|^2 + |u_2 q_1 + u_{22} q_2|^2 \\ &= |u_1|^2|q_1|^2 + |u_2|^2|q_2|^2 - 2\Re(u_1 q_1 \overline{q_2} u_2) + |u_2|^2|q_1|^2 + |u_{22}|^2|q_2|^2 + 2\Re(u_2 q_1 \overline{q_2} \cdot \overline{u_{22}}) \\ &= |u_2|^2 + |u_1|^2|q_1|^2 + |u_{22}|^2|q_2|^2 + 2\Re(u_2 q_1 \overline{q_2} \cdot \overline{u_{22}} - u_1 q_1 \overline{q_2} u_2). \end{aligned}$$

В результате неравенство (23) перепишется в виде

$$\begin{aligned} t|u_1|^2 \geq |u_1|^2|q_1|^2 + |u_{22}|^2|q_2|^2 &+ 2\Re(u_{22} q_2 \overline{q_1} \cdot \overline{u_2} - u_1 q_1 \overline{q_2} u_2) \\ &+ (t-1)|\overline{q_1} u_1 q_1 + \overline{q_2} u_{22} q_2 + 2\Im(\overline{q_2} u_2 q_1)|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Если $u_2 = 0$, то неравенство (25) обращается в тождество при любом чисто мнимом кватернионе $u_{22}$ с условием $|u_{22}| = |u_1|$, если $t = 1$. Во всех случаях оно выполняется при $u_{22} = 0$. Действительно, тогда оно будет иметь вид

$$t|u_1|^2 \geq |u_1|^2|q_1|^2 + (t-1)|u_1|^2|q_1|^4.$$

Оно обращается в тождество при $u_1 = 0$. Иначе оно эквивалентно неравенствам

$$t \geq |q_1|^2 + (t-1)|q_1|^4 \Leftrightarrow t(1+|q_1|^2)(1-|q_1|^2) \geq |q_1|^2(1-|q_1|^2).$$

Последнее неравенство либо обращается в равенство при $|q_1| = 1$, либо эквивалентно неравенствам

$$t(1+|q_1|^2) \geq |q_1|^2 \Leftrightarrow t \geq |q_1|^2(1-t).$$

В последнем случае оно будет строгим, так как $t \geq (1-t)$ при $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, а $|q_1| < 1$.

Далее предполагается, что $u_2 \neq 0$. В этом случае $U = X + Y + Z$, где

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{u_2} \\ u_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_1, \quad Y = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_2, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(1).$$

Замечание 6. Проведенные ниже рассуждения и вычисления основаны на том, что каждый $\delta$-вектор является геодезическим [2]. Оказывается, что для каждого касательного вектора $(u_1, u_2)^T \in S^7_{v_0}$, где $u_2 \neq 0$, существует единственный геодезический вектор $U$ на $(Sp(2)/Sp(1), \mu_t)$, $t > 0$, с условием $Uv_0 = (u_1, u_2)^T$. Если $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, то он оказывается и $\delta$-вектором на $(Sp(2)/Sp(1), \mu_t)$.

Вследствие предложения 16 из [2] (см. также [28]) должны выполняться равенства

$$[Z, Y] = 0, \quad [X, Z] = \frac{x_2 - x_1}{x_1}[X, Y] = (2t-1)[X, Y]. \tag{26}$$

Очевидно, что первое равенство выполнено. Легко находим, что

$$[X, Y] = XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & u_1\overline{u_2} \\ u_2u_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[X, Z] = XZ - ZX = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{u_2}u_{22} \\ -u_{22}u_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, второе равенство в (26) эквивалентно равенству

$$-u_{22}u_2 = (2t-1)u_2u_1$$

или

$$u_{22} = -(2t-1)u_2u_1u_2^{-1} = (2t-1)u_2\overline{u_1}u_2^{-1} = \frac{2t-1}{|u_2|^2}u_2\overline{u_1}\cdot\overline{u_2}.$$

Таким образом, вследствие (25) нужно выяснить, выполняется ли неравенство

$$\begin{aligned} t|u_1|^2 \geq |u_1|^2|q_1|^2 + (2t-1)^2|u_1|^2|q_2|^2 + 2\Re\big((2t-1)u_2\overline{u_1}u_2^{-1}q_2\overline{q_1}\cdot\overline{u_2} - u_1q_1\overline{q_2}u_2\big) \\ + (t-1)\big|\overline{q_1}u_1q_1 + (2t-1)\overline{q_2}u_2\overline{u_1}u_2^{-1}q_2 + 2\Im(\overline{q_2}u_2q_1)\big|^2 \end{aligned}$$

при $u_2 \neq 0$ и во всех точках $(q_1, q_2)^T \in S^7(1)$.

При $t = 1$ неравенство выше приобретает вид

$$\Re(u_1q_1\overline{q_2}u_2) \geq \Re\big(u_2\overline{u_1}u_2^{-1}q_2\overline{q_1}\cdot\overline{u_2}\big)$$

или

$$(\overline{q_1}\cdot\overline{u_1}, \overline{q_2}u_2) \geq \big(u_2u_1u_2^{-1}, q_2\overline{q_1}\cdot\overline{u_2}\big)$$

для векторов в $\mathbb{H}$. Если хотя бы один из векторов $u_1, q_1, q_2$ равен нулю, то обе части неравенства обращаются в нуль. Иначе, домножая неравенство на нужные вещественные числа, можно считать все эти векторы и вектор $u_2$ единичными. Тогда правая часть неравенства равна $(u_2u_1, q_2\overline{q_1})$ вследствие инвариантности скалярного произведения относительно левого и правого умножений на единичные кватернионы. По той же причине, умножая все векторы слева на $q_2$ и справа на $u_1$, получаем, что левая часть неравенства равна правой:

$$(\overline{q_1}\cdot\overline{u_1}, \overline{q_2}u_2) = (q_2\overline{q_1}, u_2u_1) = (u_2u_1, q_2\overline{q_1}).$$

Таким образом, в этом случае всегда получаем тождественное равенство. Это, в частности, означает, что построенное для каждого вектора $u = (u_1, u_2)^T \in S^7_{v_0}$ киллингово векторное поле $U(v) = Uv$, $v \in S^7(1)$, со значением $U(v_0) = u$ имеет постоянную длину на $S^7$.

Построенные здесь киллинговы векторные поля постоянной длины на евклидовой единичной семимерной сфере доказывают следующее

**Предложение 6.** *Для каждого касательного вектора $v \in S^7(1)_{x_0}$, $x_0 \in S^7(1)$, существует киллингово векторное поле $X(x) = Ux$, $x \in S^7(1)$, где $U \in \mathfrak{sp}(2)$, постоянной длины на $(S^7(1), \mu_1)$ такое, что $Ux_0 = v$.*

Замечание 7. Это предложение опровергает предложение 2 из [29] при $n = 2$.

Замечание 8. Естественно возникает вопрос: можно ли построить на круглой сфере $S^7(1)$ ортонормированный базис векторных полей Киллинга из алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2)$? Ответ отрицательный, так как из предыдущих рассмотрений видно, что при $u_2 \neq 0$ векторное поле Киллинга $U_{(u_1,u_2)^T}$ постоянной длины из $\mathfrak{sp}(2)$ с условием $U \cdot (1,0)^T = (u_1, u_2)^T$ определяется единственным образом и непрерывно зависит от $(u_1, u_2)^T$, но получающееся семейство векторных полей нельзя распространить на множество $\{u_2 = 0\}$ с сохранением непрерывности. Это отражается в том, что векторное поле $U_{(u_1,0)^T}$, где $u_1 \neq 0$, не определено единственным образом.

Аналогично случаю $t = 1$ можно преобразовать неравенство выше к виду

$$
\begin{aligned}
(t-1)|u_1|^2 \geq 4t(t-1)|u_1|^2|q_2|^2 + 4(t-1)\Re(u_1 q_1 \overline{q_2} u_2)\\
+ (t-1)\bigl|\overline{q_1} u_1 q_1 + (2t-1)\overline{q_2} u_2 \overline{u_1} u_2^{-1} q_2 + 2\Im(\overline{q_2} u_2 q_1)\bigr|^2.
\end{aligned}
$$

Считая теперь, что $\frac{1}{2} \leq t < 1$, получаем эквивалентное неравенство

$$
|u_1|^2 \leq 4t|u_1|^2|q_2|^2 + 4\Re(u_1 q_1 \overline{q_2} u_2) + \bigl|\overline{q_1} u_1 q_1 + (2t-1)\overline{q_2} u_2 \overline{u_1} u_2^{-1} q_2 + 2\Im(\overline{q_2} u_2 q_1)\bigr|^2. \tag{27}
$$

Видно, что при $q_2 = 0$ или $q_1 = 0$ это неравенство выполняется. Поэтому далее предполагается, что $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$. Вычислим последний скалярный квадрат в этом неравенстве. Так как первые два кватерниона под знаком модуля чисто мнимые, этот скалярный квадрат равен

$$
\begin{aligned}
|q_1|^4|u_1|^2 + (2t-1)^2|q_2|^4|u_1|^2 + 4|\Im(\overline{q_2} u_2 q_1)|^2 + 4(\overline{q_1} u_1 q_1, \overline{q_2} u_2 q_1)\\
- 2(2t-1)\bigl(\overline{q_1} u_1 q_1, \overline{q_2} u_2 u_1 u_2^{-1} q_2\bigr) - 4(2t-1)\bigl(\overline{q_2} u_2 u_1 u_2^{-1} q_2, \overline{q_2} u_2 q_1\bigr).
\end{aligned}
$$

При этом

$$
(\overline{q_1} u_1 q_1, \overline{q_2} u_2 q_1) = |q_1|^2(\overline{q_1} u_1, \overline{q_2} u_2),
$$

$$
\begin{aligned}
\bigl(\overline{q_2} u_2 u_1 u_2^{-1} q_2, \overline{q_2} u_2 q_1\bigr) &= |q_2|^2|u_2|^2\bigl(u_1 u_2^{-1} q_2, q_1\bigr)\\
&= |q_2|^2(u_1 \overline{u_2} q_2, q_1) = |q_2|^2(\overline{u_2} q_2, \overline{u_1} q_1) = |q_2|^2(\overline{q_2} u_2, \overline{q_1} u_1),
\end{aligned}
$$

$$
\Re(u_1 q_1 \overline{q_2} u_2) = (\overline{q_1} \cdot \overline{u_1}, \overline{q_2} u_2) = -(\overline{q_1} u_1, \overline{q_2} u_2). \tag{28}
$$

Тогда неравенство (27) перепишется в виде

$$
\begin{aligned}
|q_2|^2(1 + |q_1|^2)|u_1|^2 \leq 4t|u_1|^2|q_2|^2 + (2t-1)^2|q_2|^4|u_1|^2 + 4|q_2|^2\left|\Im\left(\frac{\overline{q_2}}{|q_2|} u_2 q_1\right)\right|^2\\
- 2(2t-1)|q_2|^2\left(\overline{q_1} u_1 q_1, \frac{\overline{q_2}}{|q_2|} u_2 u_1 u_2^{-1} \frac{q_2}{|q_2|}\right) - 8t|q_2|^2(\overline{q_1} u_1, \overline{q_2} u_2).
\end{aligned}
$$

После сокращения на $|q_2|^2$ получаем

$$
\begin{aligned}
(1 + |q_1|^2)|u_1|^2 \leq 4t|u_1|^2 + (2t-1)^2|q_2|^2|u_1|^2 + 4\left|\Im\left(\frac{\overline{q_2}}{|q_2|} u_2 q_1\right)\right|^2\\
- 2(2t-1)\left(\overline{q_1} u_1 q_1, \frac{\overline{q_2}}{|q_2|} u_2 u_1 u_2^{-1} \frac{q_2}{|q_2|}\right) - 8t(\overline{q_1} u_1, \overline{q_2} u_2).
\end{aligned}
$$

Перенесем левую часть в правую, выразим $|q_2|^2$ через $|q_1|^2$ и представим $q_1$ в виде $q_1 = |q_1| q \frac{q_2}{|q_2|}$, $|q| = 1$. В результате неравенство перепишется в следующем виде:

$$0 \leq 2|u_1|^2 (2t^2 - (2t^2 - 2t + 1)|q_1|^2) - 2(2t-1)|q_1|^2 \big(\bar{q} u_1 q, u_2 u_1 u_2^{-1}\big) \\ + 4|q_1|^2 |\Im(u_2 q)|^2 - 8t|q_1||q_2|(\bar{q} u_1 q, u_2 q).$$

Это неравенство можно переписать так:

$$0 \leq 4t^2 |q_2|^2 |u_1|^2 + 2(2t-1)|q_1|^2 |u_1|^2 - 2(2t-1)|q_1|^2 \big(\bar{q} u_1 q, u_2 u_1 u_2^{-1}\big) \\ + 4|q_1|^2 |\Im(u_2 q)|^2 - 8t|q_1||q_2|(\bar{q} u_1 q, u_2 q). \quad (29)$$

По неравенству Коши — Буняковского — Шварца

$$\big|\big(\bar{q} u_1 q, u_2 u_1 u_2^{-1}\big)\big| \leq |u_1|^2, \quad |(\bar{q} u_1 q, u_2 q)| = |(\bar{q} u_1 q, \Im(u_2 q))| \leq |u_1| |\Im(u_2 q)|.$$

При выводе последнего неравенства воспользовались тем, что $\bar{q} u_1 q$ — чисто мнимый кватернион. Поэтому с учетом неравенств $\frac{1}{2} \leq t < 1$ получаем

$$4t^2 |q_2|^2 |u_1|^2 + 2(2t-1)|q_1|^2 |u_1|^2 - 2(2t-1)|q_1|^2 \big(\bar{q} u_1 q, u_2 u_1 u_2^{-1}\big) \\ + 4|q_1|^2 |\Im(u_2 q)|^2 - 8t|q_1||q_2|(\bar{q} u_1 q, u_2 q) \\ \geq 4t^2 |q_2|^2 |u_1|^2 + 2(2t-1)|q_1|^2 |u_1|^2 - 2(2t-1)|q_1|^2 |u_1|^2 \\ + 4|q_1|^2 |\Im(u_2 q)|^2 - 8t|q_1||q_2||u_1||\Im(u_2 q)| \\ = 4t^2 |q_2|^2 |u_1|^2 + 4|q_1|^2 |\Im(u_2 q)|^2 - 8t|q_1||q_2||u_1||\Im(u_2 q)| \\ = 4(t|q_2||u_1| - |q_1||\Im(u_2 q)|)^2 \geq 0.$$

Таким образом, неравенство (29) доказано.

Из доказанных ранее неравенств следует

**Теорема 2.** *Однородное риманово многообразие* $(S^7 = Sp(2)/Sp(1), \mu_t)$ *обобщенно* $Sp(2)$*-нормально однородно при* $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Из теоремы 2 и предложения 5 непосредственно вытекает

**Следствие 2.** *Однородное риманово многообразие* $(\mathbb{C}P^3 = Sp(2)/(U(1) \times Sp(1)), \nu_t)$ *обобщенно* $Sp(2)$*-нормально однородно при* $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Замечание 9. В [2, 5] даны другие доказательства следствия 2.

## 4. Общий случай

Переходим к рассмотрению общего случая $n \geq 2$. Для любого натурального числа $1 \leq k < n$ определим вложение $\mathrm{in} : S^{4k+3} \to S^{4n+3}$ как композицию вложений $S^{4k+3} \subset \mathbb{H}^{k+1}$ и $\mathbb{H}^{k+1} \subset \mathbb{H}^{n+1}$. Последнее вложение осуществляется по обычной формуле $(q_1, \dots, q_{k+1})^T \to (q_1, \dots, q_{k+1}, 0, \dots, 0)^T$. Инвариантные римановы метрики $\mu_t$ на $S^{4k+3}$ и $S^{4n+3}$ будем обозначать одинаково.

Вложению in соответствуют вложения подгруппы Ли $Sp(k+1) \subset Sp(n+1)$ и подалгебры Ли $\mathfrak{sp}(k+1) \subset \mathfrak{sp}(n+1)$. В первом случае $((k+1) \times (k+1))$-матрице $A$ сопоставляется блочно-диагональная матрица с блоком $A$ в левом верхнем углу и единичной матрицей размера $[(n-k) \times (n-k)]$ в качестве дополнительного блока; во втором случае для матрицы $U$ — блока в левом верхнем углу — дополнительным блоком является нулевая $[(n-k) \times (n-k)]$-матрица. Образы матриц $A$ и $U$ при этих вложениях будем обозначать теми же буквами.

**Лемма 1.** *Если матрица $U \in \mathfrak{sp}(k+1) \subset \mathfrak{sp}(n+1)$ является $\delta$-вектором для пространства $(Sp(k+1)/Sp(k), \mu_t)$, то она является и $\delta$-вектором для пространства $(Sp(n+1)/Sp(n), \mu_t)$.*

Доказательство. Для любых $V \in S^{4n+3}$ и $U \in \mathfrak{sp}(k+1)$ справедлива формула $\|UV\|^2 = |UV_1|^2 + t|UV_2|^2$, где $UV_2$ (соответственно $UV_1$) — ортогональная проекция вектора $UV$ на векторное подпространство всех векторов вида $Vu$, $u \in \Im(\mathbb{H})$ (соответственно ортогональное дополнение в $\mathbb{H}^{n+1}$ к этому подпространству).

Каждый такой вектор $V$ можно представить в виде $V = s_1 v + s_2 w$, где $v \in S^{4k+3}$, $w \in S^{4(n-k)-1} \subset (\mathbb{H}^{k+1})^{\perp}$, $s_1, s_2 \geq 0$, $s_1^2 + s_2^2 = 1$. Тогда $UV = U(s_1 v + s_2 w) = s_1 Uv \in \mathbb{H}^{k+1}$ и $Vu = s_1 vu + s_2 wu$ для каждого $u \in \Im(\mathbb{H})$, причем $vu \in \mathbb{H}^{k+1}$, $wu \in (\mathbb{H}^{k+1})^{\perp}$. Далее, если $U$ — $\delta$-вектор для $(Sp(k+1)/Sp(k), \mu_t)$, то вследствие сказанного

$$\|UV\|^2 = |s_1(Uv)_1|^2 + t|s_1(Uv)_2|^2 = s_1^2\|Uv\|^2 \leq \|Uv\|^2 \leq \|Uv_0\|^2.$$

Значит, $U$ является $\delta$-вектором для $(Sp(n+1)/Sp(n), \mu_t)$.

**Лемма 2.** *Для любых векторов $(u_1, u_2, \dots, u_{n+1})^T \in S^{4n+3}_{v_0}$ и $(u_1, \tilde{u}_2)^T \in S^7_{v_0}$ с условием $|(u_2, \dots, u_{n+1})^T| = |\tilde{u}_2|$ существует некоторый элемент $g$ из стабилизатора $E_1 \times Sp(n) \subset Sp(n+1)$ (точки $v_0$) такой, что $g(u_1, u_2, \dots, u_{n+1})^T = (u_1, \tilde{u}_2)^T$.*

Доказательство. Лемма следует из известного факта, что $Sp(n)$ действует транзитивно на каждой сфере $S^{4n-1}(r)$, $r \geq 0$, в $\mathbb{H}^n$ с центром в нуле.

**Теорема 3.** *Пространство $(S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n), \mu_t)$ обобщенно $Sp(n+1)$-нормально однородно при $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, а при $\frac{1}{2} < t < 1$ не является нормальным однородным для произвольной связной транзитивной группы Ли движений.*

Доказательство. Пусть $u = (u_1, \dots, u_{n+1})^T$ — произвольный касательный вектор к $S^{4n+3}$ в точке $v_0$. По лемме 2 существует элемент $g \in Sp(n) \subset Sp(n+1)$ такой, что $gu = (u_1, \tilde{u}_2)^T \in S^7(1)_{v_0}$. Вследствие теоремы 2 существует $\delta$-вектор $U \in \mathfrak{sp}(2)$ такой, что $Uv_0 = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)^T$. На основании леммы 1 вектор $U \in \mathfrak{sp}(2) \subset \mathfrak{sp}(n+1)$ является $\delta$-вектором и на $(S^{4n+3}, \mu_t)$. Тогда вектор $U' := g^{-1}Ug = \mathrm{Ad}(g^{-1})(U) \in \mathfrak{sp}(n+1)$ является $\delta$-вектором на $(S^{4n+3}, \mu_t)$, причем $U'v_0 = u$. Следовательно, пространство $(S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n), \mu_t)$ обобщенно $Sp(n+1)$-нормально однородно при $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Из упомянутых таблиц в [20] следует, что возможными связными транзитивными группами Ли движений пространства $(S^{4n+3}, \mu_t)$ при условии $t \neq 1$ могут быть только группы $Sp(n+1)$, $Sp(n+1) \times U(1)$ и $Sp(n+1) \times Sp(1)$. Утверждение об отсутствии нормальной однородности для метрик $\mu_t$ при $\frac{1}{2} < t < 1$ получаем из теоремы 1.

**Теорема 4.** *Однородное риманово многообразие $(\mathbb{C}P^{2n+1}, \nu_t)$ $\delta$-однородно тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.*

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 3 и предложения 5. Необходимость следует из априорных оценок для $\delta$-однородных римановых метрик на не разложимых в прямое метрическое произведение связных односвязных компактных римановых многообразиях с положительной эйлеровой характеристикой [2].

**Предложение 7.** *Вложение* in : $(S^{4k+3}, \mu_t) \to (S^{4n+3}, \mu_t)$, $1 \le k < n$, *изометричное и вполне геодезическое при всех* $t > 0$.

Доказательство. Изометричность вложения in следует из описания метрик $\mu_t$ в разд. 1 и инвариантности сферы $S^{4k+3}$ и пространства $\mathbb{H}^{k+1}$ относительно правого умножения на единичные кватернионы $q \in Sp(1)$. Вполне геодезичность следует из того, что $S^{4k+3}$ является множеством всех неподвижных точек в $S^{4n+3}$ подгруппы $E_{k+1} \times Sp(n-k) \subset Sp(n+1)$ блочно-диагональных матриц.

**Теорема 5.** *Однородное риманово многообразие* $(S^{4n+3}, \mu_t)$ $\delta$-*однородно тогда и только тогда, когда* $0 < t \le 1$.

Доказательство. Достаточность непосредственно вытекает из теорем 3 и 1. В разд. 5 будет доказано, что пространство $(S^{4n+3}, \mu_t)$ не $\delta$-однородно при $t > 1$.

## 5. Сферы $(S^{4n+3}, \mu_t)$ при $t > 1$

Здесь приведем оставшуюся часть доказательства теоремы 5, воспользовавшись результатами, полученными в ходе доказательства утверждения 2 теоремы 1, и некоторой вариацией предложения 16 из [2]. Ясно, что при доказательстве вместо римановой метрики $\mu_t$ можно рассматривать метрику $2\mu_t$, как это было сделано в упомянутом только что доказательстве. Далее предполагается, что $t > 1$. Тогда $Sp(n+1) \times Sp(1)$ является наибольшей связной группой Ли изометрий риманова многообразия $(S^{4n+3}, 2\mu_t)$ и поэтому, если это многообразие $\delta$-однородно, оно должно быть и $Sp(n+1) \times Sp(1)$-$\delta$-однородным.

$\mathrm{Ad}(Sp(n+1) \times Sp(1))$-инвариантная билинейная форма (17) корректно определена и невырожденна, но является неопределенной. Соотношения (19) показывают, что $\{\cdot,\cdot\}_{2t}$-ортогональное разложение (18) удовлетворяет всем условиям предложения 16 в [2], но скалярное произведение $\langle \cdot,\cdot \rangle$ заменено невырожденной неопределенной формой $\{\cdot,\cdot\}_{2t}$. Эта форма индуцирует на $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_1 \oplus \bar{\mathfrak{p}}_2$ скалярное произведение, которое, в свою очередь, определяет инвариантную риманову метрику $2\mu_t$ на однородном пространстве $(Sp(n+1) \times Sp(1))/(Sp(n) \times Sp(1))$. Анализ доказательства предложения 16 в [2] убеждает в том, что утверждение следствия 16 верно и в этой, измененной, ситуации.

Как и раньше, группу $Sp(n+1) \times Sp(1)$ будем обозначать через $\overline{G} = G \times K$. Из определения пространства $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_1 \oplus \bar{\mathfrak{p}}_2$ следует, что каждый его элемент имеет вид

$$X + Y = \begin{pmatrix} 2tu_1 & -\bar{u}^T \\ u & 0_{nn} \end{pmatrix} + (2t-1)u_1, \quad u_1 \in \Im(\mathbb{H}),\ u \in \mathbb{H}^n, \tag{30}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{u}^T \\ u & 0_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_1, \tag{31}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2tu_1 & 0_n^T \\ 0_n & 0_{nn} \end{pmatrix} + (2t-1)u_1 \in \bar{\mathfrak{p}}_2. \tag{32}$$

Аналогично каждый элемент алгебры Ли $\bar{\mathfrak{h}}$ имеет вид

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & 0_n^T \\ 0_n & U_{nn} \end{pmatrix} + \alpha, \quad \alpha \in \Im(\mathbb{H}),\ U_{nn} \in \mathfrak{sp}(n). \tag{33}$$

Будем обозначать через $Uv$ значение в точке $v = (q_1, \dots, q_{n+1})^T \in S^{4n+3}$ киллингова векторного поля на $(S^{4n+3}, 2\mu_t)$, определяемого произвольным элементом $U \in \bar{\mathfrak{g}}$. Тогда нетрудно вычислить, что $(X+Y)v_0 = (u_1, u^T)^T$ для $v_0 = \left(1, 0_n^T\right)^T \in S^{4n+3}$. Формула (30) показывает, что $X+Y$ однозначно определяется этим условием. Ищем теперь геодезический вектор $U = X+Y+Z \in \bar{\mathfrak{g}}$, пользуясь уравнениями (26). В данном случае $x_2 = x_1 = 1$. Поэтому система (26) сводится к двум условиям

$$[Z, Y] = 0, \quad [X, Z] = 0. \tag{34}$$

Начнем вычисления в случае $n = 1$. В этом случае

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{u_2} \\ u_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_1, \tag{35}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2tu_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (2t-1)u_1 \in \bar{\mathfrak{p}}_2, \tag{36}$$

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} + \alpha, \quad \alpha, u_{22} \in \Im(\mathbb{H}). \tag{37}$$

Применяя формулы (36) и (37), находим, учитывая коммутируемость подгрупп $G = Sp(2)$ и $K = Sp(1)$ группы $\overline{G} = G \times K$, что

$$[Z, Y] = ZY - YZ = 2t \begin{pmatrix} (\alpha u_1 - u_1\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (2t-1)(\alpha u_1 - u_1\alpha).$$

Следовательно,

$$0 = \alpha u_1 - u_1\alpha = \alpha u_1 - \overline{\alpha u_1} = 2\Re(\alpha u_1) = -2(\alpha, u_1)$$

и $\alpha \perp u_1$. Аналогично получаем, что

$$[X, Z] = XZ - ZX = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\overline{u_2} - \overline{u_2}u_{22} \\ u_2\alpha - u_{22}u_2 & 0 \end{pmatrix}$$

и $u_2\alpha = u_{22}u_2$. Далее будем предполагать, что $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$. Тогда $u_{22} = u_2\alpha u_2^{-1}$ и

$$U = X+Y+Z = \begin{pmatrix} 2tu_1 + \alpha & -\overline{u_2} \\ u_2 & u_2\alpha u_2^{-1} \end{pmatrix} + [(2t-1)u_1 + \alpha].$$

Поступаем аналогично вычислениям из разд. 3. Получаем

$$U \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2tu_1 + \alpha)q_1 - \overline{u_2}q_2 - q_1((2t-1)u_1 + \alpha) \\ u_2q_1 + u_2\alpha u_2^{-1}q_2 - q_2((2t-1)u_1 + \alpha) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{v}^T Uv = \overline{q_1}((2tu_1 + \alpha)q_1 - \overline{u_2}q_2 - q_1((2t-1)u_1 + \alpha)) \\ + \overline{q_2}\big(u_2q_1 + u_2\alpha u_2^{-1}q_2 - q_2((2t-1)u_1 + \alpha)\big). \end{aligned}$$

При проверке неравенства для норм можно от римановой метрики $2\mu_t$ вернуться к метрике $\mu_t$. Вследствие вычислений в разд. 3 должно выполняться неравенство

$$t|u_1|^2 + |u_2|^2 \geq |Uv|^2 + (t-1)|\bar{v}^T Uv|^2. \tag{38}$$

Используя полученные выше формулы для $Uv$ и $\bar{v}^T Uv$, легко проверить, что при $q_1 = 1, q_2 = 0$ в этом неравенстве всегда соблюдается равенство, как и должно быть. Пусть $v = (q_1, q_2)^T = (0, 1)^T$, $u_2 = 1$. Тогда

$$Uv = \begin{pmatrix} -1 \\ -(2t-1)u_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}^T Uv = -(2t-1)u_1.$$

Неравенство (38) приобретает вид

$$t|u_1|^2 + 1 \geq 1 + (2t-1)^2|u_1|^2 + (t-1)(2t-1)^2|u_1|^2,$$

и после приведения подобных и сокращения на $t|u_1|^2 > 0$ получаем неравенство $1 \geq (2t-1)^2$, не выполняющееся при $t > 1$. Таким образом, доказано, что при $t > 1$ риманово многообразие $(S^7, \mu_t)$ не $\delta$-однородно.

Рассмотрим общий случай $n \geq 2$. Возьмем касательный вектор $(u_1, u^T)^T \in S^{4n+3}_{v_0}$ вида $(u_1, u_2, 0, \dots, 0)^T$, где $u_1 \in \Im(\mathbb{H})$, $u_2 \in \mathbb{H}$, причем $u_1 \neq 0, u_2 = 1$. Из формул (30), (33) видим, что для любого вектора $X + Y + Z \in \bar{\mathfrak{g}}$, где $X + Y$ определяется вектором $(u_1, u^T)^T$ указанного вида, а $Z$ — произвольный элемент из $\bar{\mathfrak{h}}$, последние $n-1$ элементов первой строки и первого столбца $((n+1) \times (n+1))$-матрицы, входящей в запись вектора $U = X + Y + Z$, равны нулю. Если выполняется второе условие в (34), как и предполагаем, то нетрудно увидеть, что то же утверждение должно быть верно и для второй строки и второго столбца упомянутой матрицы. Отсюда и из условий (34) следует, что входящая в нее $(2 \times 2)$-матрица в левом верхнем углу, как и элемент из $\mathfrak{k} = \mathfrak{sp}(1)$ вне всей матрицы, входящий в запись вектора $U$, будет иметь тот же вид, что и в случае $n = 1$. На основании этого и предложения 7 для всякой точки вида $(q_1, q_2, 0, \dots, 0) \in S^7 \subset S^{4n+3}$ левые и правые части неравенства (38) будут в точности те же, что в рассмотренном случае $n = 1$. Следовательно, как и раньше, при $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ неравенство (38) нарушается. Таким образом, риманово многообразие $(S^{4n+3}, \mu_t)$ не $\delta$-однородно при $t > 1$.

## 6. Неодносвязные $\delta$-однородные римановы многообразия

Здесь в каждой размерности $4n+3$, $n \geq 1$, на каждой однородной пространственной форме строятся обобщенные нормальные однородные, но не нормальные однородные римановы метрики, что дает первые примеры неодносвязных римановых многообразий с такими свойствами (нулевой эйлеровой характеристики). Каждое такое многообразие получается как пространство орбит риманова многообразия $(S^{4n+3}, \mu_t)$ относительно правого действия произвольной конечной подгруппы $\Gamma$ группы $Q' = Sp(1)$ единичных кватернионов. Классификация всех подгрупп $\Gamma$ дана в теореме 2.6.7 из [30]. Это могут быть циклические подгруппы $\Gamma = \mathbb{Z}_k \subset U(1) \subset Sp(1)$ любого конечного порядка $k > 1$. Все остальные подгруппы получаются как прообразы относительно двулистного накрывающего эпиморфизма групп Ли $\pi : Sp(1) = SU(2) \to SO(3)$ групп симметрий правильных многогранников в 3-мерном евклидовом пространстве, включая вырожденные правильные многогранники — диэдры. Эпиморфизм $\pi$ не что иное, как присоединенное представление $q \in Sp(1) \to \mathrm{Ad}(q)$ группы Ли $Sp(1)$ в алгебре Ли $\mathfrak{sp}(1) = \Im(\mathbb{H})$, снабженной каноническим скалярным произведением (5). При этом $\ker \pi = \mathbb{Z}_2$. Итак, группа $\Gamma$ может быть одной из следующих групп: $\mathbb{Z}_k$ любого порядка $k > 1$, бинарно диэдральной $D^*_m = \pi^{-1}(D_m), m \geq 3$, порядка $4m$, или одной из бинарно полиэдральных групп: бинарно тетраэдральной $T^* = \pi^{-1}(T)$ порядка 24, бинарно октаэдральной $O^* = \pi^{-1}(O)$ порядка 48 или бинарно икосаэдральной $I^* = \pi^{-1}(I)$ порядка 120. Если группы $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ изоморфны, то они сопряжены в $Q'$ [30].

**Теорема 6.** *Пусть* $\Gamma$ — *конечная нетривиальная подгруппа в* $Sp(1)$ *и* $(S^{4n+3}, \mu_t)/\Gamma$ — *пространство орбит для правого действия* (10) *группы* $\Gamma$. *Тогда*

(1) *Существует проекция* $p : S^{4n+3}/\Gamma \to \mathbb{H}P^n$, *являющаяся для каждого* $t > 0$ *однородным римановым расслоением относительно группы изометрий* $Sp(n+1)$ *для римановых метрик* — $\mu_{t,\Gamma}$ *на* $S^{4n+3}/\Gamma$, *индуцированной метрикой* $\mu_t$, *и канонической римановой метрики* $\eta$ *на* $\mathbb{H}P^n$ — *с вполне геодезическими слоями, изометричными однородной пространственной форме* $(S^3, t \cdot can)/\Gamma$.

(2) *Пространство* $(S^{4n+3}, \mu_t)/\Gamma$ $Sp(n+1)$-$\delta$-*однородно при* $\frac{1}{2} \le t \le 1$, *но не нормально однородно относительно произвольной транзитивной группы Ли своих движений при* $\frac{1}{2} < t < 1$.

(3) *Вещественное проективное пространство* $\mathbb{R}P^{4n+3} = (S^{4n+3}, \mu_t)/\mathbb{Z}_2$ *естественно редуктивно и слабо симметрично относительно группы изометрий* $Sp(n+1) \times Sp(1) = \overline{G}$ *при всех* $t > 0$, $\overline{G}$-*нормально однородно тогда и только тогда, когда* $0 < t < \frac{1}{2}$, *и* $\delta$-*однородно тогда и только тогда, когда* $0 < t \le 1$.

(4) *Для каждой нециклической группы* $\Gamma$ *пространство* $(S^{4n+3}, \mu_t)/\Gamma$ $\delta$-*однородно тогда и только тогда, когда* $\frac{1}{2} \le t \le 1$.

(5) *Однородное пространство* $S^{4n+3}/\Gamma$ *является гомологической* $(4n+3)$-*сферой тогда и только тогда, когда* $\Gamma = I^*$.

Доказательство. Далее учитывается, что $Sp(1)$ действует справа на $(S^{4n+3}, \mu_t)$ изометриями, $\mathbb{Z}_2$ коммутирует с группой $Sp(n+1) \times Sp(1)$, все остальные циклические группы коммутируют только с группой $Sp(n+1) \times U(1)$, все остальные группы $\Gamma$ — только с группой $Sp(n+1)$. Поэтому полными связными транзитивными группами изометрий одновременно при всех $t > 0$ для пространств $(S^{4n+3}, \mu_t)/\Gamma$ являются соответственно группы $Sp(n+1) \times Sp(1)$, $Sp(n+1) \times U(1)$ и $Sp(n+1)$.

(1) Достаточно в качестве $p$ взять проекцию, индуцированную расслоением Хопфа (11). Остальное понятно.

(2) Следует из предложения 4, теоремы 3 и того, что при римановом накрытии подъем киллингова векторного поля на базе является киллинговым векторным полем на накрывающем пространстве.

(3) Ссылки те же, что в доказательстве утверждения (2), но с заменой теоремы 3 теоремами 5 и 1.

(4) К ссылкам в доказательстве утверждения 2 добавить ссылку на следствие 1.

(5) Следует из того, что первая группа гомологий $H_1(M, \mathbb{Z})$ произвольного связного многообразия $M$ изоморфна фактор-группе фундаментальной группы $\pi_1 = \pi_1(M)$ по ее коммутанту $[\pi_1, \pi_1]$, а $I^*$ — единственная из всех групп $\Gamma$ совершенная группа, т. е. такая группа $\Gamma$, что $[\Gamma, \Gamma] = \Gamma$ [29].

Замечание 10. $S^3/I^*$ — гомологическая сфера Пуанкаре, опровергающая первую версию его знаменитой гипотезы.

Замечание 11. Сравнение теоремы 5 с теоремой 4 или утверждением (4) теоремы 6 показывает, что однородное риманово многообразие, являющееся образом $\delta$-однородного риманова многообразия при римановой субмерсии или даже римановом накрытии, может не быть $\delta$-однородным. Другими словами, предложение 4 не допускает дальнейшего обобщения.

## Заключение

Согласно таблице из [20] осталось изучить $\delta$-однородные инвариантные римановы метрики на сферах $S^{4n+3} = (Sp(n+1) \times U(1))/(Sp(n) \times U(1))$, $S^{15} = \mathrm{Spin}(9)/\mathrm{Spin}(7)$, $S^{2n+1} = SU(n+1)/SU(n)$, $S^{2n+1} = U(n+1)/U(n)$. Во втором случае $S^{15}$ с произвольной инвариантной римановой метрикой гомотетична некоторой дистанционной сфере в проективной плоскости Кэли $\mathbb{C}aP^2 = \mathrm{Spin}(9)/F_4$ с канонической римановой метрикой [31, 20]. Используя алгебры Клиффорда и алгебры Кэли, Вольпер доказал, что при надлежащей нормировке инвариантных метрик на $\mathrm{Spin}(9)/\mathrm{Spin}(7)$ минимальные и максимальные значения секционных кривизн для 1-параметрических семейств $\xi_t$ этих метрик и метрик $\mu_t$ совпадают при всех $t > 0$ [32]. При этом для всех $t > 0$ существует риманова субмерсия $p : (S^{15}, \xi_t) \to S^8\left(\frac{1}{2}\right)$ с вполне геодезическими слоями, изометричными семимерным сферам постоянной секционной кривизны $\frac{1}{t}$, а $(S^{15}, \xi_1)$ изометрично $S^{15}(1)$ [32]. Следовательно, ни одно из пространств $(S^{15}, \xi_t)$, $t \neq 1$, не изометрично никакому другому пространству из таблицы в [20] с инвариантной римановой метрикой [20].

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Berestovskii V. N., Plaut C.* Homogeneous spaces of curvature bounded below // J. Geom. Anal. 1999. V. 9, N 2. P. 203–219.
2. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* On $\delta$-homogeneous Riemannian manifolds // Differ. Geom. Appl. 2008. V. 26, N 5. P. 514–535.
3. *Berestovskii V. N., Nikitenko E. V., Nikonorov Yu. G.* Classification of generalized normal homogeneous Riemannian manifolds of positive Euler characteristic // Differ. Geom. Appl. 2011. V. 29, N 4. P. 533–546.
4. *Берестовский В. Н.* Однородные многообразия с внутренней метрикой. I // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 6. С. 17–29.
5. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Чебышевская норма на алгебре Ли группы движений однородного финслерова многообразия // Современная математика и ее приложения. 2008. Т. 60. Алгебра. С. 98–122.
6. *Berger M.* Les varietes riemanniennes homogenes normales a courbure strictement positive // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. III. Ser. 1961. V. 15, N 3. P. 179–246.
7. *Berestovskii V. N., Guijarro L.* A metric characterization of Riemannian submersions // Ann. Global Anal. Geom. 2000. V. 18. P. 577–588.
8. *Hopf H., Samelson H.* Ein Satz über die Wirkungräume geschlossener Liescher Gruppen // Math. Helv. 1940/1941. V. 13, N 1. P. 240–251.
9. *Selberg A.* Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces, with applications to Dirichlet series // J. Indian Math. Soc. 1956. V. 20. P. 47–87.
10. *Nomizu K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. J. Math. 1954. V. 76, N 1. P. 33–65.
11. *Kostant B.* On differential geometry and homogeneous spaces. I, II // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1956. V. 42. P. 258–261; 354–357.
12. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т. 1, 2.
13. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* О $\delta$-однородных римановых многообразиях. II // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 267–278.
14. *Kowalski O., Vanhecke L.* Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. B. 1991. V. 5, N 1. P. 189–246.
15. *Berndt J., Kowalski O., Vanhecke L.* Geodesics in weakly symmetric spaces // Ann. Global Anal. Geom. 1997. V. 15, N 2. P. 153–156.
16. *Montgomery D., Samelson H.* Transformation groups on spheres // Ann. Math. 1943. V. 44, N 6. P. 454–470.

**17.** *Borel A.* Some remarks about transformation groups transitive on spheres and tori // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 55, N 6. P. 580–587.
**18.** *Borel A.* Le plan projectif des octaves et les spheres comme espaces homogenes // C. R. Acad. Sci. 1950. V. 230, N 15. P. 1378–1380.
**19.** *Онищик А. Л.* О транзитивных компактных группах преобразований // Мат. сб. 1963. Т. 60, № 4. С. 447–485.
**20.** *Ziller W.* Homogeneous Einstein metrics on spheres and projective spaces // Math. Ann. 1982. V. 259. P. 351–358.
**21.** *Вольпер Д. Е.* Секционные кривизны диагонального семейства $Sp(n+1)$-инвариантных метрик на $(4n+3)$-мерных сферах // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 6. С. 1230–1242.
**22.** *Verdiani L., Ziller W.* Positively curved homogeneous metrics on spheres // Math. Z. 2009. Bd 261, Hefte 3. S. 473–488.
**23.** *Вольпер Д. Е.* Секционные кривизны нестандартных метрик на $\mathbb{C}P^{2n+1}$ // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 263–275.
**24.** *Nikonorov Yu. G.* Geodesic orbit Riemannian metrics on spheres // Владикавказск. мат. журн. 2013. (В печати).
**25.** *Ziller W.* Weakly symmetric spaces // Topics in geometry: in memory of Joseph D'Atri. Boston: Birkhäuser, 1996. P. 355–368. (Prog. Nonlinear Differ. Equations; V. 20).
**26.** *Ziller W.* The Jacobi equation on naturally reductive compact Riemannian homogeneous spaces // Comment. Math. Helv. 1977. V. 52. P. 573–590.
**27.** *Grove K., Ziller W.* Cohomogeneity one manifolds with positive Ricci curvature // Inv. Math. 2002. V. 149. P. 619–646.
**28.** *Tamaru H.* Riemannian geodesic orbit metrics on fiber bundles // Algebra Groups Geom. 1998. V. 15. P. 55–67.
**29.** *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Ограниченно однородные по Клиффорду — Вольфу римановы многообразия // Сб. науч. статей междунар. школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае» (Барнаул, 8–11 ноября 2011 г.). В 4 ч. Барнаул: АлтГПА, 2011. Ч. 1. С. 51–67.
**30.** *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
**31.** *Bourguignon J. P., Karcher H.* Curvature operators. Pinching estimates and geometric examples // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér. 1978. V. 11, N 1. P. 71–92.
**32.** *Вольпер Д. Е.* Семейство метрик на 15-мерной сфере // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 2. С. 49–56.

*Статья поступила 27 августа 2012 г.*

Берестовский Валерий Николаевич
Омский филиал Института математики им. С. Л.Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
berestov@ofim.oscsbras.ru