Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 512.572

АЛГЕБРЫ ПУАССОНА ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

С. М. Рацеев

Аннотация. Пусть $c_n(V)$ — последовательность коразмерностей для многообразия алгебр Пуассона V. Показано, что рост любого многообразия алгебр Пуассона V над произвольным полем либо ограничен полиномом, либо не ниже экспоненциального. При этом если рост многообразия V полиномиален, то найдется такой многочлен $R(x)$ с рациональными коэффициентами, что $c_n(V) = R(n)$ для всех достаточно больших n. Приводятся нижняя и верхняя границы для многочленов $R(x)$ произвольной фиксированной степени. Также показана конечная базируемость многообразий алгебр Пуассона полиномиального роста в случае основного поля нулевой характеристики.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

На протяжении всей работы, если это специально не оговорено, основное поле K считается произвольным. Алгебра $A = A(+,\cdot,\{,\},K)$ над полем K называется *алгеброй Пуассона*, если $A(+,\cdot,K)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+,\{,\},K)$ — алгебра Ли с операцией умножения $\{,\}$, которая называется *скобкой Пуассона*, и выполняется правило Лейбница:

$$\{a\cdot b, c\} = a\cdot\{b,c\} + \{a,c\}\cdot b, \quad a,b,c\in A.$$

Алгебры Пуассона естественным образом возникают в различных разделах алгебры и дифференциальной геометрии. Например, пусть $H_{2m} = K[x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_m]$ — ассоциативное коммутативное кольцо многочленов. Если в H_{2m} ввести умножение $\{,\}$ следующим образом:

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right), \quad f,g\in H_{2m},$$

то получим алгебру Пуассона.

В данной работе исследуются алгебры Пуассона полиномиального роста. В частности, будет показано, что такие алгебры наследуют ряд свойств ассоциативных алгебр, которые подробно изучены в [1, 2].

Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Ли с умножением $[\,,]$, где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное множество свободных образующих. В алгебре $L(X)$ зафиксируем упорядоченный базис $v_1, v_2, \dots$, где $v_i < v_j$ при $i < j$. Рассмотрим ассоциативную коммутативную алгебру полиномов $K[v_1, v_2, \dots]$. В этой алгебре определим скобки Пуассона для порождающих элементов v_i как умножение в алгебре

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00209–а).

$L(X)$: $\{v_i, v_j\} = [v_i, v_j]$. Распространим скобки Пуассона на любые элементы из $K[v_1, v_2, \dots]$, используя линейность и правило

$$\{f \cdot g, h\} = f \cdot \{g, h\} + \{f, h\} \cdot g, \quad f, g, h \in K[v_1, v_2, \dots].$$

Тогда полученная алгебра будет свободной алгеброй Пуассона $F(X)$, причем базис алгебры $F(X)$ будут составлять все элементы вида $v_{i_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_k}^{\alpha_k}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$, $i_1 < \dots < i_k$.

Договоримся опускать скобки Пуассона при их левонормированной расстановке, т. е. $\{\{\{x_1, x_2\}, x_3\}, \dots, x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \dots, x_n$, а через P_n^L — пространство полилинейных элементов степени n в свободной алгебре Ли $L(X)$. В силу того, что базисом пространства P_n^L (см., например, [3, 1]) являются все элементы вида $[x_n, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}]$, $\sigma \in S_{n-1}$, верно

Предложение 1. *Базис пространства P_n состоит из всех элементов вида*

$$x_{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_r} \cdot \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}, \tag{1}$$

для каждого из которых выполнены следующие условия:

(i) $r \geq 0$, $k_1 < \dots < k_r$;

(ii) *каждая из переменных x_1, … ,x_n встречается в* (1) *ровно один раз;*

(iii) *каждый множитель $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$, … , $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}$ в* (1), *являющийся скобкой Пуассона, левонормирован, имеет длину ≥ 2 и в каждой такой скобке Пуассона элемент с максимальным индексом находится на первом месте:*

$$i_1 > i_2, \dots, i_1 > i_s, \dots, j_1 > j_2, \dots, j_1 > j_t;$$

(iv) *множители в* (1) *упорядочены по длине: $s \leq \dots \leq t$;*

(v) *если два соседних множителя в* (1), *являющиеся скобками Пуассона, имеют одинаковую длину $\dots \cdot \{x_{p_1}, \dots, x_{p_s}\} \cdot \{x_{q_1}, \dots, x_{q_s}\} \cdot \dots$, то $p_1 < q_1$.*

1. Собственное подпространство в P_n

Обозначим через Γ_n подпространство в P_n, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, \dots, t \geq 2. \tag{2}$$

Будем предполагать, что 1 является произведением пустого множества скобок Пуассона, поэтому $\dim \Gamma_0 = 1$, $\dim \Gamma_1 = 0$. Тогда из сказанного выше следует, что базисом пространства Γ_n будут все элементы вида (2) с условиями (ii)–(v) из предложения 1.

Предложение 2. *Для любого неотрицательного целого числа n будут выполнены равенства*

$$\dim P_n = n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \dim \Gamma_k, \tag{3}$$

$$\dim \Gamma_n = n! \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right), \tag{4}$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Доказательство. Заметим, что если в элементах (1) заменить скобки Пуассона $\{,\}$ коммутаторами $[\,,]$, то полученные элементы вида

$$x_{k_1}\cdot\ldots\cdot x_{k_r}\cdot[x_{i_1},\ldots,x_{i_s}]\cdot\ldots\cdot[x_{j_1},\ldots,x_{j_t}]$$

с условиями (i)–(v) из предложения 1 (где слова «скобка Пуассона» заменяются словом «коммутатор») будут базисом пространства полилинейных элементов степени n от переменных $x_1,\ldots,x_n$ в свободной ассоциативной алгебре $A(X)$ (см., например, [1]). Поэтому $\dim P_n = n!$. Вторая часть равенства (3) следует из вида базисных элементов (1) и (2) соответствующих пространств P_n и Γ_n.

Обозначим через $\widetilde{\Gamma}_n$ пространство полилинейных элементов степени n от переменных $x_1,\ldots,x_n$ в свободной ассоциативной алгебре $A(X)$, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$[x_{i_1},\ldots,x_{i_s}]\cdot\ldots\cdot[x_{j_1},\ldots,x_{j_t}],\quad s\geq 2,\ldots,t\geq 2. \tag{5}$$

Тогда базисом пространства $\widetilde{\Gamma}_n$ (см., например, [1]) будут элементы вида (5) с условиями (ii)–(v) из предложения 1 (как и ранее, слова «скобка Пуассона» заменяются словом «коммутатор»). Поэтому $\dim\Gamma_n = \dim\widetilde{\Gamma}_n$. В [4] показано, что

$$\dim\widetilde{\Gamma}_n = n!\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right).$$

Тем самым выполнено равенство (4). Предложение доказано.

Пусть V — некоторое многообразие алгебр Пуассона (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в [1, 3]). Пусть $\mathrm{Id}(V)$ — идеал тождеств многообразия V. Обозначим

$$P_n(V) = P_n/(P_n\cap\mathrm{Id}(V)),\quad \Gamma_n(V) = \Gamma_n/(\Gamma_n\cap\mathrm{Id}(V)),$$
$$c_n(V) = \dim P_n(V),\quad \gamma_n(V) = \dim\Gamma_n(V),\quad \gamma_n = \dim\Gamma_n.$$

Предложение 3. *Пусть элементы*

$$u_s^n(x_1,\ldots,x_n),\quad s=1,\ldots,\gamma_n, \tag{6}$$

образуют базис пространства Γ_n, $n\geq 0$. Тогда полилинейные элементы от переменных $x_1,\ldots,x_n$ вида

$$\begin{gathered} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_{n-k}}\cdot u_s^k(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}),\\ k=0,\ldots,n,\quad s=1,\ldots,\gamma_k,\quad i_1<\cdots<i_{n-k},\quad j_1<\cdots<j_k, \end{gathered} \tag{7}$$

образуют базис пространства P_n.

Доказательство. Сначала покажем, что элементы вида (7) линейно независимы в P_n. Предположим противное. Пусть выполнено нетривиальное линейное соотношение

$$\sum_{\substack{0\leq k\leq n,\,1\leq s\leq\gamma_k,\\ 1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n}}\alpha^{k,s}_{j_1\ldots j_k}x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_{n-k}}\cdot u_s^k(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}) = 0. \tag{8}$$

Выберем такое минимальное значение k, при котором $\alpha^{k,s}_{j_1\ldots j_k}\neq 0$. Подставим в этом случае вместо переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_{n-k}}$ единицу. Тогда из (8) будет следовать такое нетривиальное линейное соотношение:

$$\sum_{s=1}^{\gamma_k}\beta_s u_s^k(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}) = 0,$$

где не все β_s равны 0, что противоречит линейной независимости элементов (6) при $n = k$.

Так как число элементов вида (7) равно $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \gamma_k$, с учетом равенства (3) получаем, что элементы (7) образуют базис пространства P_n. Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть V — некоторое многообразие алгебр Пуассона, и пусть элементы*

$$u_s^n(x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, \gamma_n(V), \tag{9}$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(V)$, $n \geq 0$. Тогда

(i) *полилинейные элементы от переменных $x_1, \ldots, x_n$ вида*

$$\begin{gathered} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-k}} \cdot u_s^k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}), \\ k = 0, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, \gamma_k(V), \quad i_1 < \cdots < i_{n-k}, \quad j_1 < \cdots < j_k, \end{gathered} \tag{10}$$

образуют базис пространства $P_n(V)$;

(ii) *имеет место равенство*

$$c_n(V) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \gamma_k(V).$$

Доказательство. (i) Доказательство линейной независимости элементов вида (10) аналогично доказательству линейной независимости элементов вида (7) в предложении 3. Поэтому остается показать, что любой элемент из $P_n(V)$ линейно выражается через элементы вида (10). Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n(V)$.

Дополним элементы (9) при $n = k$ до базиса пространства Γ_k, $k = 0, \ldots, n$:

$$u_s^k(x_1, \ldots, x_k),\ v_t^k(x_1, \ldots, x_k), \quad s = 1, \ldots, \gamma_k(V),\ t = 1, \ldots, \gamma_k - \gamma_k(V).$$

Тогда из предложения 3 следует, что элемент $f(x_1, \ldots, x_n)$ представим в виде следующей линейной комбинации:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) = & \sum_{\substack{0 \leq k \leq n,\ 1 \leq s \leq \gamma_k(V), \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n}} \alpha_{j_1 \ldots j_k}^{k,s} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-k}} \cdot u_s^k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}) \\ & + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n,\ 1 \leq t \leq \gamma_k - \gamma_k(V), \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n}} \beta_{j_1 \ldots j_k}^{k,t} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-k}} \cdot v_t^k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}). \end{aligned} \tag{11}$$

Предположим, что в равенстве (11) хотя бы один из элементов $\beta_{j_1 \ldots j_k}^{k,t}$ не равен нулю. Выберем такое минимальное значение k, при котором $\beta_{j_1 \ldots j_k}^{k,t} \neq 0$. Подставим вместо переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}$ единицу. Получим такое равенство:

$$f(1, \ldots, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}, \ldots, 1) = \sum_{s=1}^{\gamma_k(V)} \epsilon_s u_s^k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}) + \sum_{t=1}^{\gamma_k - \gamma_k(V)} \delta_t v_t^k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}), \tag{12}$$

где не все δ_t равны 0. Так как левая часть равенства (12) принадлежит пространству $\Gamma_k(V)$ и не все δ_t равны 0, элементы вида (9) не являются базисом пространства $\Gamma_n(V)$ при $n = k$; противоречие.

П. (ii) следует из п. (i). Предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть V — некоторое многообразие алгебр Пуассона. Тогда*

(i) *если $\gamma_{2k}(V) = 0$ для некоторого $k \geq 1$, то $\gamma_n(V) = 0$ для любого $n \geq 2k$;*

(ii) *если $\gamma_{2k+1}(V) = 0$ для некоторого $k \geq 1$, то $\gamma_{2n+1}(V) = 0$ для любого $n \geq k$;*

(iii) *если $\gamma_{2k+1}(V) = 0$ для некоторого $k \geq 1$ и в многообразии V выполнено полилинейное тождество*

$$\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} \cdot \ldots \cdot \{x_{k+1}, y_{k+1}\} = 0,$$

то $\gamma_n(V) = 0$ для любого $n \geq 2k + 1$.

Доказательство. (i) Пусть $\gamma_{2k}(V) = 0$ для некоторого $k \geq 1$. Индукцией по n покажем, что $\gamma_n(V) = 0$ для любого $n \geq 2k$ с очевидной базой $n = 2k$.

Пусть $n > 2k$ и $f \in \Gamma_n$ — моном. Покажем, что $f \in \mathrm{Id}(V)$. Пусть d — максимальная длина скобки Пуассона в элементе f:

$$f = \ldots \cdot \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}\} \cdot \ldots .$$

Если $d = 2$, то n — четное число и $n \geq 2k + 2$. Поэтому $f \in \mathrm{Id}(V)$, так как если вычеркнуть скобку Пуассона $\{x_{i_1}, x_{i_2}\}$ в элементе f, полученный элемент по предположению индукции принадлежит $\mathrm{Id}(V)$.

Если же $d > 2$, то элемент f можно получить из элемента

$$g = \ldots \cdot \{y, x_{i_3}, \ldots, x_{i_d}\} \cdot \ldots$$

с помощью подстановки $y \to \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$. Так как $g \in \mathrm{Id}(V)$ по предположению индукции, имеем $f \in \mathrm{Id}(V)$.

(ii) Пусть $\gamma_{2k+1}(V) = 0$ для некоторого $k \geq 1$. Как и в п. (i), для доказательства равенства $\gamma_{2n+1}(V) = 0$ для любого $n \geq k$ используем индукцию по n.

Пусть $n > k$ и $f \in \Gamma_{2n+1}$ — моном. Пусть d — максимальная длина скобки Пуассона в элементе f. Возможны следующие случаи.

1. $d = 3$. Тогда число скобок Пуассона длины 3 в элементе f может быть только нечетным числом. Если такая скобка одна, то f имеет вид

$$\{x_{j_1}, x_{j_2}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_{s-1}}, x_{j_s}\} \cdot \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}.$$

Стало быть, $f \in \mathrm{Id}(V)$, так как по предположению индукции

$$\{x_{j_3}, x_{j_4}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_{s-1}}, x_{j_s}\} \cdot \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\} \in \mathrm{Id}(V).$$

Если в элементе f не менее трех скобок Пуассона длины 3:

$$f = \ldots \cdot \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\} \cdot \{x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}\} \cdot \{x_{s_1}, x_{s_2}, x_{s_3}\} \cdot \ldots,$$

то его можно получить из элемента

$$g = \ldots \cdot \{y_1, x_{i_3}\} \cdot \{y_2, x_{j_3}\} \cdot \{x_{s_1}, x_{s_2}, x_{s_3}\} \cdot \ldots$$

с помощью подстановок $y_1 \to \{x_{i_1}, x_{i_2}\}$, $y_2 \to \{x_{j_1}, x_{j_2}\}$. Так как $g \in \mathrm{Id}(V)$ по предположению индукции, $f \in \mathrm{Id}(V)$.

2. $d \geq 4$. Тогда элемент f можно получить из $\ldots \cdot \{y, x_{i_4}, \ldots, x_{i_d}\} \cdot \ldots$ с помощью подстановки $y \to \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$. Поэтому $f \in \mathrm{Id}(V)$.

Доказательство п. (iii) аналогично доказательству пп. (i), (ii). Предложение доказано.

Обозначим через B линейную оболочку элементов (не обязательно полилинейных) свободной алгебры $F(X)$ вида

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, \ldots,\ t \geq 2.$$

При этом, в частности, $\Gamma_n = B \cap P_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Предложение 6. *Пусть V — многообразие алгебр Пуассона над бесконечным полем K. Тогда идеал тождеств $\mathrm{Id}(V)$ порождается элементами из множества тождеств $B \cap \mathrm{Id}(V)$. Если $\operatorname{char} K = 0$, то $\mathrm{Id}(V)$ порождается системой полилинейных тождеств из множества $\bigcup\limits_{n \geq 1} (\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(V))$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(V)$ и поле K бесконечно. Можно считать, что полином $f(x_1, \ldots, x_n)$ является полиоднородным полистепени $(m_1, \ldots, m_n)$ и имеет следующий общий вид:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} \alpha_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} \cdot \{\ldots\} \cdot \ldots \cdot \{\ldots\}$$
$$= \sum_{k_1=0}^{m_1} x_1^{k_1} \cdot \left(\sum_{k_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} \alpha_{k_1 \ldots k_n} x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} \cdot \{\ldots\} \cdot \ldots \cdot \{\ldots\} \right)$$
$$= \sum_{k_1=0}^{m_1} x_1^{k_1} \cdot g_{k_1}(x_1, \ldots, x_n).$$

Пусть s — наибольшее значение k_1, $0 \leq k_1 \leq m_1$, при котором $g_s(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. При этом степень переменной x_1 в элементе g_s строго меньше, чем в элементах $g_1, \ldots, g_{s-1}$.

В элементе $f(x_1, \ldots, x_n)$ сделаем подстановку $x_1 \to (1 + x_1)$:

$$f(1 + x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{s} \left(\sum_{i=0}^{k_1} C_{k_1}^i x_1^i \right) \cdot g_{k_1}(x_1, \ldots, x_n).$$

При этом правую часть последнего равенства можно представить в виде суммы $h(x_1, \ldots, x_n) + g_s(x_1, \ldots, x_n)$, где каждое слагаемое в $h(x_1, \ldots, x_n)$ имеет строго большую степень переменной x_1, чем степень переменной x_1 в $g_s(x_1, \ldots, x_n)$. В силу бесконечности поля K элемент $g_s(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $\mathrm{Id}(V)$. Применяя тот же алгоритм относительно переменной x_2 в элементе $g_s(x_1, \ldots, x_n)$ и т. д., получаем, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ является следствием системы тождеств из множества $B \cap \mathrm{Id}(V)$.

Если $\operatorname{char} K = 0$, то (учитывая, что любое тождество из $\mathrm{Id}(V)$ является следствием системы тождеств из множества $B \cap \mathrm{Id}(V)$) очевидно, что любое тождество многообразия V является следствие системы полилинейных тождеств из множества $B \cap \mathrm{Id}(V)$. Предложение доказано.

2. Многообразия полиномиального роста

Теорема 1. *Для многообразия алгебр Пуассона V над произвольным полем следующие условия эквивалентны:*

(i) *последовательность $\{c_n(V)\}_{n \geq 1}$ ограничена полиномом;*

(ii) *для некоторого $m \geq 2$ в V выполнены полилинейные тождества*

$$\{x_1, \ldots, x_m\} = 0, \tag{13}$$

$$\{x_1, y_1\} \cdot \ldots \cdot \{x_m, y_m\} = 0; \tag{14}$$

(iii) *найдется такое число N, что для любого $n > N$ выполнено равенство $\gamma_n(V) = 0$;*

(iv) *найдется такое число N, что для любого $n \geq N$ будет выполнено равенство*

$$c_n(V) = \sum_{k=0}^{N} C_n^k \cdot \gamma_k(V). \tag{15}$$

Доказательство. (i)⇒(ii) Пусть выполнено условие (i). Рассмотрим линейно независимые элементы в P_n вида

$$x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_p} \cdot \{x_{j_1}, x_{j_2}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_{q-1}}, x_{j_q}\}, \tag{16}$$

где $\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q\} = \{1, \ldots, n\}$, $i_1 < \cdots < i_p$, $j_1 < \cdots < j_q$. Так как число данных элементов равно 2^{n-1}, они линейно зависимы в $P_n(V)$ для некоторого n. Поэтому в $P_n(V)$ нетривиальная линейная комбинация элементов (16) равна нулю. Выберем в данной линейной комбинации слагаемое с минимальным количеством скобок Пуассона и ненулевым коэффициентом. Подставив во все линейное выражение единицу вместо переменных, стоящих вне скобок Пуассона данного слагаемого, получим тождество (14).

Рассмотрим линейно независимые элементы в P_n вида

$$x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_p} \cdot \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}\},$$

где $\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q\} = \{1, \ldots, n\}$, $i_1 < \cdots < i_p$, $j_1 < \cdots < j_q$. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что в V выполнено тождество (13). Поэтому из (i) следует (ii).

(ii)⇒(iii) Пусть выполнено условие (ii). Тогда для любого $n > (m-1)^2$ будет верно равенство $\gamma_n(V) = 0$, поэтому из (ii) вытекает (iii).

Импликация (iii) ⇒ (iv) следует из п. (ii) предложения 4.

Импликация (iv)⇒(i) очевидна. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если $\operatorname{char} K = 0$, то произвольное многообразие алгебр Пуассона полиномиального роста допускает конечный базис тождеств.*

Доказательство. Пусть многообразие алгебр Пуассона V имеет полиномиальный рост. Тогда из теоремы 1 следует существование такого четного числа $N \geq 2$, что для любого $n \geq N$ будет выполнено равенство $\gamma_n(V) = 0$. При этом тождества из $\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(V) = \Gamma_n$, $n \geq N$, являются следствиями тождеств $\Gamma_N \cap \mathrm{Id}(V) = \Gamma_N$ (предложение 5). С учетом предложения 6 многообразие V задается конечной системой тождеств из множества $\bigcup\limits_{k=0}^{N} (\Gamma_k \cap \mathrm{Id}(V))$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть V — нетривиальное многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем. Тогда либо*

(i) $c_n(V) \geq 2^{n-1}$ *для любого n,*

либо

(ii) *найдется такой многочлен степени $N \geq 0$ из кольца $\mathbb{Q}[x]$, что для любого $n \geq N$ будет выполнено равенство*

$$c_n(V) = a_N n^N + \cdots + a_1 n + a_0, \quad a_N \neq 0,$$

причем если $N > 1$, то

$$\frac{1}{N!} \leq a_N \leq \sum_{k=2}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Доказательство. Пусть рост многообразия V не ограничен полиномом. Тогда из теоремы 1 следует, что либо все элементы вида $\{x_1, \dots, x_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, либо все полилинейные элементы вида $\{x_1, y_1\} \cdot \ldots \cdot \{x_m, y_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, не принадлежат идеалу тождеств многообразия V. Поэтому в любом случае

$$\gamma_{2m}(V) \geq 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots.$$

Следовательно, учитывая п. (ii) предложения 4, получаем неравенство

$$c_n(V) \geq \sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} = 2^{n-1}.$$

Пусть теперь рост многообразия V ограничен полиномом. В силу теоремы 1 пусть N — максимальное число, при котором $\gamma_N(V) > 0$. Тогда для любого $n \geq N$ будет выполнено равенство (15), т. е. найдется такой многочлен степени $N \geq 0$ с рациональными коэффициентами, что для любого $n \geq N$

$$c_n(V) = a_N n^N + \dots + a_1 n + a_0, \quad a_N \neq 0.$$

Если число N четное и $N > 1$, то из предложения 5 следует, что $\gamma_{2k}(V) > 0$ для любого $0 \leq 2k \leq N$. Также для любого n выполнено неравенство $\gamma_n(V) \leq \gamma_n$. Поэтому для любого $n \geq N$

$$\sum_{0 \leq 2k \leq N} C_n^{2k} \leq c_n(V) \leq \sum_{k=0}^{N} C_n^k \cdot \gamma_k. \tag{17}$$

Если же число N нечетное и $N > 1$, то из предложения 5 следует, что $\gamma_k(V) > 0$ для любого $0 \leq k \leq N$, $k \neq 1$. Поэтому

$$1 + \sum_{k=2}^{N} C_n^k \leq c_n(V) \leq 1 + \sum_{k=2}^{N} C_n^k \cdot \gamma_k. \tag{18}$$

Следовательно, с учетом предложения 2 и равенства

$$C_n^k = \frac{n^k}{k!} + O(n^{k-1}),$$

из неравенств (17) и (18) получаем, что

$$\frac{1}{N!} \leq a_N \leq \frac{\gamma_N}{N!} = \sum_{k=2}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \to \frac{1}{e}, \quad N \to \infty.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $\operatorname{char} K = 0$, *рост многообразия* V *полиномиален и число* N *в теореме* 3 *нечетно, причем* $N > 1$. *Тогда* $a_N \geq \frac{N-1}{N!}$.

Доказательство. Рассмотрим пространство $\Gamma_n(V)$ как S_n-модуль, который разложим в прямую сумму неприводимых S_n-подмодулей (о разложении групповой алгебры KS_n см., например, [3]). При этом если некоторый неприводимый S_n-подмодуль пространства $\Gamma_n(V)$ имеет размерность 1, то этот подмодуль соответствует либо разбиению $\lambda = (n)$, либо разбиению $\lambda = (1^n)$.

Пусть N — максимальное число, при котором $\gamma_N(V) > 0$, причем $N > 1$ и N нечетно. Тогда из предложения 5 следует, что $\gamma_k(V) > 0$ для любого $0 \leq k \leq N$, $k \neq 1$. При этом любой базисный элемент в $\Gamma_{2k+1}(V)$, $3 \leq 2k +$

$1 \leq N$, имеет хотя бы одну скобку Пуассона длины ≥ 3. С учетом тождества антикоммутативности и тождества Якоби S_{2k+1}-подмодули, соответствующие разбиениям $\lambda = (2k+1)$ и $\lambda = (1^{2k+1})$, в разложение $\Gamma_{2k+1}(V)$ входить не будут [3, с. 179]. Любой другой неприводимый S_{2k+1}-подмодуль имеет размерность $\geq 2k$ в пространстве $\Gamma_{2k+1}(V)$. Поэтому $\gamma_{2k+1}(V) \geq 2k$, откуда следует, что для любого $n \geq N$

$$c_n(V) \geq \sum_{0\leq 2k\leq N} C_n^{2k} + \sum_{3\leq 2k+1\leq N} C_n^{2k+1}\cdot 2k.$$

Из данного неравенства вытекает, что $a_N \geq (N-1)/N!$. Следствие доказано.

Пусть $U_n = U_n(K)$ — алгебра верхнетреугольных матриц порядка $n\times n$ над полем K, у которых главная диагональ состоит из одинаковых элементов:

$$U_n = \Big\{\alpha E + \sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_{ij}e_{ij} \mid \alpha, \alpha_{ij}\in K\Big\},$$

где $E = E_n$ — единичная матрица порядка n, e_{ij} — матричная единица. Пусть также G_{2n} — алгебра Грассмана с единицей и $2n$ образующими элементами $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$.

В [5] показано, что в случае бесконечного поля K для любого фиксированного $N \geq 1$ ассоциативная алгебра U_{N+1} достигает верхней границы возможного полиномиального роста степени N, т. е. если A — некоторая ассоциативная алгебра с полиномиальным ростом степени N, то $c_n(A) \leq c_n(U_{N+1})$ для любого n. В той же работе показано, что для любого фиксированного $N \geq 1$ алгебра G_{2N} достигает нижней границы возможного полиномиального роста степени $2N$.

Пусть $\operatorname{char} K = 0$. Введем в алгебре G_{2n} два новых умножения:

$$a\cdot b = \frac{1}{2}(ab+ba), \quad \{a,b\} = ab - ba,\ a,b\in G_{2n}.$$

Нетрудно проверить, что алгебра $(G_{2n}, +, \cdot, \{,\})$ будет алгеброй Пуассона, которую обозначим через $\widetilde{G}_{2n}$.

Доказательство следующего предложения подобно доказательству аналогичного факта относительно алгебры G_{2n} [5, теорема 3.5].

Предложение 7. *Пусть* $\operatorname{char} K = 0$ *и* N *— произвольное натуральное число. Тогда последовательность* $\{c_n(\widetilde{G}_{2N})\}_{n\geq 1}$ *достигает нижней границы в неравенстве* (17)*:*

$$c_n(\widetilde{G}_{2N}) = \sum_{0\leq 2k\leq 2N} C_n^{2k}, \quad n = 2N, 2N+1, \ldots,$$

при этом $a_{2N} = \frac{1}{(2N)!}$.

3. Наименьшее многообразие полиномиального роста

Обозначим через $L_{\geq 2}(X)$ подалгебру в свободной алгебре Ли $L(X)$, каждый элемент которой является линейной комбинацией мономов степени ≥ 2.

Предложение 8. *Пусть* A_L *— некоторая ненулевая алгебра Ли с лиевым умножением* [ ] *над произвольным полем* K. *Рассмотрим векторное пространство* $A = A_L \oplus K$, *в котором определим операции* $\cdot$ *и* $\{,\}$ *следующим образом:*

$$(a+\alpha)\cdot(b+\beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta,$$

$$\{a+\alpha, b+\beta\} = [a,b], \quad a,b\in A_L, \quad \alpha,\beta\in K.$$

Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{,\}, K)$ *является алгеброй Пуассона, причем выполнены следующие условия:*

(i) $\mathrm{Id}(A_L) = \mathrm{Id}(A) \cap L_{\geq 2}(X)$ *и в алгебре* A *выполнено тождество* $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$;

(ii) $\Gamma_n(A) = P_n^L(A) = P_n^L(A_L)$ *для любого* $n \geq 2$, *где равенства приведены с точностью до изоморфизма векторных пространств;*

(iii) *для любого* n *выполнено равенство*

$$c_n(A) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot \dim P_k^L(A_L).$$

Доказательство. Очевидно, что алгебра $(A, +, \cdot, \{\}, K)$ является алгеброй Пуассона, в которой выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$. При этом п. (i) следует из того, что если $f \in L_{\geq 2}(X)$, то $f \in \mathrm{Id}(A_L)$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathrm{Id}(A)$.

(ii) Из п. (i), в частности, вытекает, что $\mathrm{Id}(A) \cap P_n^L = \mathrm{Id}(A_L) \cap P_n^L$ для любого $n \geq 2$. Поэтому

$$P_n^L(A_L) = P_n^L / \big(\mathrm{Id}(A_L) \cap P_n^L\big) = P_n^L / \big(\mathrm{Id}(A) \cap P_n^L\big) = P_n^L(A).$$

Обозначим через $\mathrm{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\})$ идеал тождеств в свободной алгебре Пуассона $F(X)$, порожденный элементом $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}$. Очевидно, что для любого n выполнено равенство

$$\Gamma_n = P_n^L \oplus \mathrm{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\Gamma_n(A) = \Gamma_n / (\mathrm{Id}(A) \cap \Gamma_n) \\
&= \big(P_n^L \oplus \mathrm{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n\big) / \big(\mathrm{Id}(A) \cap \big(P_n^L \oplus \mathrm{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n\big)\big) \\
&= \big(P_n^L \oplus \mathrm{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n\big) / \big(\big(\mathrm{Id}(A) \cap P_n^L\big) \oplus (\mathrm{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n)\big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cong P_n^L / \big(\mathrm{Id}(A) \cap P_n^L\big) = P_n^L(A).
\end{aligned}$$

П. (iii) следует из п. (ii) и предложения 4. Предложение доказано.

Пусть N_3^L — трехмерная нильпотентная алгебра Ли с базисом $\{a, b, c\}$ и таблицей умножения $[b, a] = c$, $[a, c] = [b, c] = 0$. Обозначим через N_3 алгебру Пуассона $N_3^L \oplus K$, построенную с помощью предложения 8.

Следующее предложение, в частности, показывает, что многообразие, порожденное либо алгеброй N_3, либо алгеброй $\widetilde{G}_2$, является наименьшим многообразием алгебр Пуассона в классе всех многообразий алгебр Пуассона, имеющих рост не ниже полиномиального.

Предложение 9. *Пусть* $\mathrm{char}\, K = 0$. *Тогда верны следующие утверждения.*

(i) $\mathrm{var}(N_3) = \mathrm{var}(\widetilde{G}_2) = V$.

(ii) *Тождества*

$$\{x_1, x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0 \tag{19}$$

порождают идеал тождеств многообразия V.

(iii) $c_n(V) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

(iv) *Многообразие V является наименьшим многообразием среди всех многообразий алгебр Пуассона роста не ниже полиномиального, т. е. если рост некоторого многообразия W не ниже полиномиального, то $V \subseteq W$.*

Доказательство. Очевидно, что в алгебрах N_3 и $\widetilde{G}_2$ выполнены тождества (19). Поэтому $\gamma_n(N_3) = \gamma_n(\widetilde{G}_2) = 0$ для любого $n \geq 3$ (предложение 5). При этом $\Gamma_2(N_3) = \Gamma_2(\widetilde{G}_2) = \{x_1, x_2\}$, что показывает подстановка $x_1 \to b$, $x_2 \to a$ для алгебры N_3 и $x_1 \to e_1$, $x_2 \to e_2$ для алгебры $\widetilde{G}_2$. Следовательно, с учетом предложения 4 выполнено равенство

$$P_n(N_3) = P_n(\widetilde{G}_2) = \langle x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,\ x_1 \cdot \ldots \cdot \hat{x}_i \cdot \ldots \cdot \hat{x}_j \cdot \ldots \cdot x_n \cdot \{x_i, x_j\},\ 1 \leq j < i \leq n \rangle_K,$$

где $\hat{}$ означает, что элемент пропущен. Таким образом, выполнены пп. (i)–(iii). Докажем п. (iv).

Пусть W — некоторое многообразие алгебр Пуассона и $V \nsubseteq W$. Тогда для некоторого n в W выполнено полилинейное тождество вида

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} x_1 \cdot \ldots \cdot \hat{x}_i \cdot \ldots \cdot \hat{x}_j \cdot \ldots \cdot x_n \cdot \{x_i, x_j\} \\ + \sum \ldots \cdot \{A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}\} \cdot \ldots + \sum \ldots \cdot \{B_{j_1}, B_{j_2}\} \cdot \{B_{j_3}, B_{j_4}\} \cdot \ldots = 0,$$

где $A_{i_1}, \ldots, B_{j_4}$ — некоторые непустые мономы и не все α_{ij} в первой сумме равны нулю. Заметим, что элемент $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ не участвует в данном тождестве, что показала бы подстановка 1 вместо всех n переменных. Пусть $\alpha_{ij} \neq 0$. Подставим вместо всех переменных, кроме x_i и x_j, единицу. Тогда в многообразии W выполнено тождество $\{x_1, x_2\} = 0$. Поэтому $c_n(W) = 1$ для любого n. Предложение доказано.

4. Некоторые многообразия алгебр Пуассона

Рассмотрим рост многообразий, в которых выполняется хотя бы одно из тождеств (13) или (14). Обозначим через V_s многообразие алгебр Пуассона, определенное тождеством

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{s+1}\} = 0. \tag{20}$$

Лемма. *В многообразии V_s выполнено полилинейное тождество*

$$\{x_1, y_1, z_1\} \cdot \{x_2, y_2, z_2\} \cdot \ldots \cdot \{x_{s-1}, y_{s-1}, z_{s-1}\} = 0. \tag{21}$$

Доказательство. Проведем индукцию по s с очевидным основанием $s = 2$. Пусть $s > 2$. Обозначим через A моном $\{x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}\}$. Тогда тождество (20) примет такой вид:

$$\{A, x_s, x_{s+1}\} = 0.$$

Подставим в последнее тождество вместо переменной x_s произведение $x \cdot y$ и применим правило Лейбница:

$$\{A, x \cdot y, x_{s+1}\} = \{\{A, x\} \cdot y, x_{s+1}\} + \{\{A, y\} \cdot x, x_{s+1}\} \\ = \{A, x\} \cdot \{y, x_{s+1}\} + y \cdot \{A, x, x_{s+1}\} + \{A, y\} \cdot \{x, x_{s+1}\} + x \cdot \{A, y, x_{s+1}\}.$$

Поэтому из тождества (20) следует тождество

$$\{A, x\} \cdot \{y, x_{s+1}\} + \{A, y\} \cdot \{x, x_{s+1}\} = 0.$$

Если в последнем тождестве сделать подстановку $y \to \{z_1, z_2\}$, то получим следствие тождества (20):

$$\{A, x\} \cdot \{z_1, z_2, x_{s+1}\} = 0,$$

к которому для доказательства леммы остается применить предположение индукции.

Предложение 10. (i) *Пространство* $\Gamma_n(V_s)$ *является линейной оболочкой элементов вида*

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{i_{n-k-1}}, x_{i_{n-k}}\} \cdot g_k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}), \tag{22}$$

где $0 \leq k \leq s(s-1)$, $i_1 < \cdots < i_{n-k}$, $g_k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$ — *некоторые полилинейные элементы степени* k.

(ii) *Последовательность* $\{\gamma_n(V_s)\}_{n\geq 1}$ *ограничена полиномом.*

(iii) *Существует такое* $\beta = \beta(s)$, *что для любого* n *выполнено неравенство* $c_n(V_s) \leq n^\beta 2^n$.

(iv) *Если* $\operatorname{char} K = 0$ *и* $s \geq 2$, *то найдется такое* $\alpha = \alpha(s)$, *что* $c_n(V_s) \geq n^\alpha 2^n$ *для всех достаточно больших* n.

Доказательство. (i) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma_n(V_s)$. С учетом тождеств (20) и (21) элемент f имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \{x_{i_1}, x_{i_2}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{i_{p-1}}, x_{i_p}\} \cdot \{x_{11}, \ldots, x_{1k_1}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{q1}, \ldots, x_{qk_q}\},$$

где $q \leq s-2$, $3 \leq k_1 \leq s$, ... , $3 \leq k_q \leq s$.

Ввиду правила Лейбница в любой алгебре Пуассона выполнено тождество

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} + \{x_1, x_3\} \cdot \{x_2, x_4\} + h = 0, \tag{23}$$

где $h = \{x_1, x_2 \cdot x_3, x_4\} - x_3 \cdot \{x_1, x_2, x_4\} - x_2 \cdot \{x_1, x_3, x_4\}$. С учетом тождеств (21) и (23) элемент f является линейной комбинацией элементов вида (22).

П. (ii) непосредственно следует из п. (i), п. (iii) — из п. (ii) и предложения 4.

(iv) В [6] показано, что многообразие V_2 имеет почти полиномиальный рост, причем $c_n(V_2) = 2^{n-1}$ для любого n. Так как $V_2 \subseteq V_s$ для любого $s \geq 2$, то $c_n(V_s) \geq 2^{n-1}$ для любого n. Предложение доказано.

Теорема 4 [7]. *Пусть* V — *многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем, идеал тождеств которого содержит полилинейные тождества*

$$\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} \cdot \ldots \cdot \{x_m, y_m\} = 0,$$
$$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_m, y_m\}\} = 0$$

для некоторого $m \geq 2$. *Тогда существуют такие константы* N, α, β *и такое целое число* d, *причем* $1 \leq d \leq m(m-1)$, *что для любого* $n \geq N$ *будет выполнено следующее двойное неравенство:* $n^\alpha d^n \leq c_n(V) \leq n^\beta d^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Drensky V.* Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra. Singapore: Springer-Verl., 2000.
2. *Drensky V., Regev A.* Exact asymptotic behaviour of the codimension of some P.I. algebras // Israel J. Math. 1996. V. 96. P. 231–242.
3. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
4. *Specht W.* Gesetze in Ringen. I // Math. Z. 1950. Bd 52, Heft 5. S. 557–589.
5. *Giambruno A., La Mattina D., Petrogradsky V. M.* Matrix algebras of polynomial codimension growth // Israel J. Math. 2007. V. 158. P. 367–378.
6. *Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A.* Poisson PI algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. V. 359, N 10. P. 4669–4694.
7. *Рацеев С. М.* Рост в алгебрах Пуассона // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 1. С. 68–88.

Статья поступила 24 мая 2011 г.

Рацеев Сергей Михайлович
Ульяновский гос. университет,
кафедра информационной безопасности и теории управления,
ул. Л. Толстого, 42, Ульяновск 432970
ratseevsm@rambler.ru