Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 512.56

РАЦИОНАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ АЛГЕБР, ЕЕ «КЛОНОВЫЕ» ОБОБЩЕНИЯ И «КЛОНОВАЯ» КАТЕГОРИЧНОСТЬ

А. Г. Пинус

Аннотация. С любой универсальной алгеброй $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ тем или иным естественным образом связаны различные клоны функций на множестве A. Простейший и минимальный из них — клон $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$ — замыкание совокупности сигнатурных функций этих алгебр относительно оператора суперпозиции. Совпадение подобных клонов (с точностью до сопряжения биекциями основных множеств алгебр) порождает различные отношения эквивалентности на универсальных алгебрах, первой в ряду которых является отношение рациональной эквивалентности, введенное А. И. Мальцевым. Рассмотрению подобных «клоновых» эквивалентностей между алгебрами произвольных сигнатур и посвящена данная работа.

Ключевые слова: клон функций, рациональная эквивалентность алгебр, производные структуры алгебр, клоновая категоричность алгебр.

§ 1. «Клоновые» эквивалентности

Понятие рациональной эквивалентности универсальных алгебр принадлежит А. И. Мальцеву [1]. Одним из первых примеров подобных алгебр были булевы алгебры и соответствующие им ассоциативные идемпотентные кольца с единицей.

Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ сигнатуры σ через $\mathrm{Tr}(\sigma)$ обозначим совокупность всех термов сигнатуры σ, а через $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ — совокупность всех термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$. Алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle A; \sigma_2 \rangle$ сигнатур соответственно σ_1 и σ_2 называются *рационально эквивалентными* ($\mathfrak{A} \sim^r \mathfrak{B}$), если существует биекция φ множества A на множество B такая, что имеют место включения:

$$\varphi f(\varphi^{-1}(x_1), \dots, \varphi^{-1}(x_n)) \in \mathrm{Tr}(\mathfrak{B})$$

для любой сигнатурной функции f алгебры $\mathfrak{A}$ и

$$\varphi^{-1} g(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \in \mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$$

для любой сигнатурной функции g алгебры $\mathfrak{B}$.

Очевидно, что эти включения равносильны условию

$$\varphi \,\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})\varphi^{-1} = \{\varphi h(\varphi^{-1}(x_1), \dots, \varphi^{-1}(x_n)) \mid h \in \mathrm{Tr}(\mathfrak{A})\} = \mathrm{Tr}(\mathfrak{B}).$$

Также в [1] А. И. Мальцевым доказан следующий критерий рациональной эквивалентности алгебр. Здесь через $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ обозначено многообразие, порожденное алгеброй $\mathfrak{A}$, для любого многообразия $\mathfrak{M}$ через $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ — категория, объектами которой являются $\mathfrak{M}$-алгебры, а морфизмами — любые гомоморфизмы одних $\mathfrak{M}$-алгебр в другие. При этом две подобные категории $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ и $\overrightarrow{\mathfrak{N}}$ *натурально изоморфны* тогда и только тогда, когда существует изоморфизм категории $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ на категорию $\overrightarrow{\mathfrak{N}}$ (как частичных полугрупп), коммутирующий со стирающими функторами категорий $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ и $\overrightarrow{\mathfrak{N}}$ в категорию множеств.

Теорема Мальцева. *Для любых двух алгебр* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ *и* $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma_2 \rangle$ *следующие условия равносильны:*

(а) $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *рационально эквивалентны;*

(б) *существует натуральный изоморфизм* φ *категории* $\overrightarrow{\mathfrak{M}(\mathfrak{A})}$ *на категорию* $\overrightarrow{\mathfrak{M}(\mathfrak{B})}$ *такой, что* $\varphi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}$.

При расширении совокупностей термальных функций до тех или иных естественных и представляющих определенный интерес совокупностей функций, связанных с рассматриваемыми алгебрами, понятие рациональной эквивалентности допускает соответствующие обобщения.

Напомним понятия *условно термальной функции, позитивно условно термальной для алгебры* $\mathfrak{A}$ *функции*, введенные в работах автора [2, 3] (подробнее о них см., к примеру, [4, 5]). Под *условием* $J(\bar{x})$ (*позитивным условием*) сигнатуры σ будем понимать любую конечную совокупность равенств и неравенств (равенств) между термами этой сигнатуры, зависящими от переменных $\bar{x}$. Конечная совокупность $\{J_1(\bar{x}), \dots, J_k(\bar{x})\}$ условий (позитивных условий) называется *полной*, если формула $\bigvee\limits_{i \le k} J_i(\bar{x})$ общезначима, а для $i \ne j$ формулы $(J_i(\bar{x}) \& J_j(\bar{x}))$ попарно несовместны (если формула $\bigvee\limits_{i \le k} J_i(\bar{x})$ общезначима). *Условные* (*позитивно условные*) *термы* для алгебры $\mathfrak{A}$ строятся из простейших термов с помощью той же индукции, что и обычные термы, с добавлением еще одного индуктивного шага: если $\{J_1(\bar{x}), \dots, J_k(\bar{x})\}$ — некоторая полная система условий (позитивных условий) и $t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x})$ — некоторая система условных (позитивно условных) термов для алгебры $\mathfrak{A}$ и для $i, j \le k$ выполнено $\mathfrak{A} \models \forall \bar{x}(J_i(\bar{x}) \& J_j(\bar{x}) \to t_i(\bar{x}) = t_j(\bar{x}))$, то

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} J_1(\bar{x}) \to t_1(\bar{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ J_m(\bar{x}) \to t_m(\bar{x}) \end{cases}$$

также является условным (позитивно условным) термом для $\mathfrak{A}$. При этом значение соответствующей *условно термальной* (*позитивно условно термальной*) *функции* $t^{\mathfrak{A}}(\bar{x})$ на элементах $\bar{a}$ из алгебры $\mathfrak{A}$ определяется следующим образом: если $\mathfrak{A} \models J_i(\bar{a})$, то $t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = t_i^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$. Условный (позитивно условный) терм $t(\bar{x})$ имеет *нормальную форму*, если введенный выше (новый по сравнению с определением понятия терма) индукционный шаг при построении $t(\bar{x})$ либо не встречается вовсе, либо является последним. Через $\mathrm{CT}(\mathfrak{A})$, $\mathrm{PCT}(\mathfrak{A})$ будем далее обозначать совокупности всех условно термальных, позитивно условно термальных для алгебры $\mathfrak{A}$ функций. Имеют место следующие включения для любых алгебр $\mathfrak{A}$:

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{PCT}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{CT}(\mathfrak{A}).$$

Алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma_2 \rangle$ называются [6, 7] *условно рационально* (*позитивно условно рационально*) *эквивалентными* $\mathfrak{A} \sim^{cr} \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \sim^{pcr} \mathfrak{B}$), если существует биекция φ множества A на множество B такая, что

$$\varphi\, \mathrm{CT}(\mathfrak{A}) \varphi^{-1} = \mathrm{CT}(\mathfrak{B}) \quad (\varphi\, \mathrm{PCT}(\mathfrak{A}) \varphi^{-1} = \mathrm{PCT}(\mathfrak{B})),$$

или, иначе, с точностью до сопряжения биекцией φ сигнатурные функции алгебры $\mathfrak{A}$ являются условно термальными (позитивно условно термальными) для $\mathfrak{B}$ и обратно — с точностью до сопряжения биекцией φ^{-1}.

В силу определения отношений $\sim^r$, $\sim^{pcr}$, $\sim^{cr}$ и включений $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{PCT}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{CT}(\mathfrak{A})$ имеют место следующие импликации для любых алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{A} \sim^r \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \sim^{pcr} \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \sim^{cr} \mathfrak{B}.$$

Стандартным набором производных структур, связанных с универсальной алгеброй $\mathfrak{A}$ служат: $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$, $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ — решетки подалгебр и соответственно конгруэнций этой алгебры; $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$ — группа автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$; $\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$, $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$, $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$ — полугруппы эндоморфизмов, внутренних изоморфизмов и внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$. Напомним, что *внутренним изоморфизмом* (*гомоморфизмом*) алгебры $\mathfrak{A}$ называется любой изоморфизм (гомоморфизм) между ее подалгебрами. В силу того, что производные структуры алгебр в конечном счете могут быть определены их термальными, а не только сигнатурными функциями (а также в силу равносильности условий (а) и (б) из приведенной выше теоремы А. И. Мальцева), рациональная эквивалентность $\mathfrak{A} \sim^r B$ (с помощью биекции φ) влечет попарное совпадение (с точностью до биекции φ) решеток $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$, $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{B}$, $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$, $\mathrm{Con}\,\mathfrak{B}$, групп $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$, $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{B}$ и полугрупп $\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$, $\mathrm{End}\,\mathfrak{B}$, $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$, $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{B}$, $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$, $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{B}$ соответственно.

Пример двухэлементной полурешетки $\mathfrak{A}_1 = \langle \{0,1\}; \vee \rangle$ и двухэлементной решетки $\mathfrak{A}_1 = \langle \{0,1\}; \vee, \wedge \rangle$ демонстрирует, что равенства $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}_1 = \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}_2$, $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}_1 = \mathrm{Con}\,\mathfrak{A}_2$, $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}_1 = \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}_2$, $\mathrm{End}\,\mathfrak{A}_1 = \mathrm{End}\,\mathfrak{A}_2$, $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}_1 = \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}_2$, $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}_1 = \mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}_2$ не влекут, вообще говоря, рациональную эквивалентность алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ (так как $\wedge \notin \mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_1)$).

В [8, 9] доказано, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$, определенная на основном множестве A конечной или равномерно локально конечной и конечной сигнатуры (в последнем случае) алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ является условно термальной (позитивно условно термальной) для $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда 1) подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ замкнуты относительно функции f, 2) f коммутирует со всеми внутренними изоморфизмами (гомоморфизмами) алгебры $\mathfrak{A}$.

В силу того, что для двухэлементной нижней полурешетки $\mathfrak{A}_1 = \langle \{0,1\}; \wedge \rangle$ и двухэлементной решетки $\mathfrak{A}_2 = \langle \{0,1\}; \wedge, \vee \rangle$ имеет место равенство $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}_1 = \mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}_2$, получаем $\mathrm{PCT}(\mathfrak{A}_1) = \mathrm{PCT}(\mathfrak{A}_2)$, а так как $\vee \notin \mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_1)$, имеем $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_1) \neq \mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_2)$. Тем самым эти алгебры являются примером позитивно условно рационально эквивалентных алгебр, не являющихся рационально эквивалентными, т. е., вообще говоря, $\mathfrak{A} \sim^{pcr} \mathfrak{B} \nrightarrow \mathfrak{A} \sim^r \mathfrak{B}$.

Рассмотрим пару алгебр $\mathfrak{A} = \langle A \cup B; f \rangle$ и $\mathfrak{A} = \langle A \cup B; g, h \rangle$ где A и B — дизъюнктные множества мощности 4 и 2 соответственно. При этом f, g, h — одноместные функции, $\langle A; f \rangle$, $\langle A; g \rangle$ — циклы длины 4, $\langle B; f \rangle$, $\langle B; h \rangle$ — циклы длины 2, функция g тождественна на B, а h — на A. Тогда очевидно, что $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A} \neq \mathrm{Ihm}\,\mathfrak{B}$ и, значит, $\mathfrak{A} \nsim^{pcr} \mathfrak{B}$. В то же время $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Iso}\,\mathfrak{B}$ и, следовательно, $\mathfrak{A} \sim^{cr} \mathfrak{B}$. Тем самым, вообще говоря, $\mathfrak{A} \sim^{cr} \mathfrak{B} \not\to \mathfrak{A} \sim^{pcr} \mathfrak{B}$.

Отметим также, что, как известно (см., к примеру, [10]), для любой алгебры $\mathfrak{A}$ имеет место равенство $\mathrm{CT}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Tr}(\mathfrak{A}^d)$, где $\mathfrak{A}^d$ — обогащение алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ функцией $d(x, y, z)$-дискриминатора на множестве A:

$$d(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Тем самым $\mathfrak{A} \sim^{cr} \mathfrak{B}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}^d \sim^r \mathfrak{B}^d$. В [11] доказано существование алгебр $\mathfrak{A}$ таких, что клон функций $\mathrm{PCT}(\mathfrak{A})$ не является расширением клона $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ с помощью какой-либо одной функции и тем самым отношение $\mathfrak{A} \sim^{pcr} \mathfrak{B}$ не может быть сведено к отношению $\mathfrak{A}' \sim^r \mathfrak{B}'$ ни для каких обогащений $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ конечным числом функций.

Понятие неявной операции для универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ (аналог введенного Эйленбергом и Шутценберже [12] понятия неявной операции для псевдомногообразий) введено в работе автора [13].

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$, определенная на основном множестве A алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, называется *неявной операцией* на $\mathfrak{A}$, если 1) подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ замкнуты относительно f, 2) f коммутирует со всеми внутренними гомоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом, в случае либо конечности $\mathfrak{A}$, либо равномерной локальной конечности $\mathfrak{A}$ и конечности ее сигнатуры неявные операции на $\mathfrak{A}$ суть позитивно условно термальные функции для $\mathfrak{A}$. В общем случае (как показано в [13]) неявные операции на $\mathfrak{A}$ являются так называемыми ∞-позитивно условно термальными для $\mathfrak{A}$. ∞-*Позитивно условные термы* (∞-*условные термы*) определяются той же индукцией, что и позитивно условные (условные) термы со снятием ограничений на конечность в определениях позитивного условия (условия) и полной системы позитивных условий (условий). При этом определение ∞-*позитивно условно* (∞-*условно*) *термальных функций* для ∞-позитивно условных (∞-условных) термов проводится так же, как определение позитивно условно термальных (условно термальных) функций для позитивно условных (условных) термов. Через $\mathrm{IO}(\mathfrak{A})$ обозначим клон всех неявных операций на основном множестве алгебры $\mathfrak{A}$. Очевидны включения

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{PCT}(\mathfrak{A}) \begin{matrix} \subseteq \mathrm{CT}(\mathfrak{A}) \\ \subseteq \mathrm{IO}(\mathfrak{A}) \end{matrix}.$$

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \cdot \rangle$ — бесконечная локально конечная полугруппа, порядки циклических подполугрупп которой не ограничены в совокупности. Тогда одноместная функция $f(x)$ на A такая, что $f(x)$ — идемпотент полугруппы, порожденной элементом x, является неявной операцией для $\mathfrak{A}$. В то же время без труда замечается, что $f \notin \mathrm{PCT}(\mathfrak{A})$, т. е. включение $\mathrm{PCT}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{IO}(\mathfrak{A})$, вообще говоря, собственное.

Заметим также, что клоны $\mathrm{CT}(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{IO}(\mathfrak{A})$, вообще говоря, несравнимы по включению. Действительно, пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ — произвольная алгебра с некоторой неодноэлементной подалгеброй, являющейся эндоморфным образом алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть этот эндоморфизм не является биекцией. Тогда, как замечено выше, d (функция дискриминатора) условно термальная для $\mathfrak{A}$, но она не коммутирует с указанным выше эндоморфизмом, т. е. $\mathrm{CT}(\mathfrak{A}) \nsubseteq \mathrm{IO}(\mathfrak{A})$ в этом случае. Столь же легко непосредственно замечается, что в приведенном выше примере локально конечной полугруппы $\mathfrak{A}$ с не ограниченными в совокупности порядками циклических подполугрупп функция $f(x)$ является неявной операцией на $\mathfrak{A}$, но $f \notin \mathrm{CT}(\mathfrak{A})$. Таким образом, $\mathrm{IO}(\mathfrak{A}) \nsubseteq \mathrm{CT}(\mathfrak{A})$ в общем случае.

Аналогично понятию неявной операции на алгебре $\mathfrak{A}$ введем понятие абстрактной операции на $\mathfrak{A}$. *Абстрактной* (сохраняемой изоморфизмами) операцией над алгеброй $\mathfrak{A}$ назовем любую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ на множестве A такую, что 1) подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ замкнуты относительно f, 2) f коммутирует со всеми внутренними изоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом, в случае конечности (либо равномерной локальной конечности и конечности сигнатуры) алгебры $\mathfrak{A}$ абстрактные операции над $\mathfrak{A}$ суть ее условно термальные функции.

Через $\mathrm{AO}(\mathfrak{A})$ обозначим совокупность всех абстрактных операций над алгеброй $\mathfrak{A}$.

Подобно тому, как неявные операции над $\mathfrak{A}$ определимы с помощью ∞-позитивно условных термов, абстрактные операции над $\mathfrak{A}$ определимы ∞-условными термами сигнатуры σ. Для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ алгебры $\mathfrak{A}$ через $D_{\bar{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим диаграмму алгебры $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}$ (подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной элементами $a_1, \ldots, a_n$) такую, что $\mathfrak{A} \models D_{\bar{a}}(a_1, \ldots, a_n)$. Иначе говоря, $D_{\bar{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ — это конъюнкция всевозможных равенств и неравенств между термами $t_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $t_2(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры алгебры $\mathfrak{A}$, которые (равенства и неравенства) истинны в алгебре $\mathfrak{A}$ на элементах $a_1, \ldots, a_n$.

Тем самым $\mathfrak{A} \models D_{\bar{a}}(b_1, \ldots, b_n)$ для $b_1, \ldots, b_n \in A$ тогда и только тогда, когда существует изоморфизм φ алгебры $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}$ на алгебру $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle_{\mathfrak{A}}$ такой, что $\varphi(a_i) = b_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Пусть $\mathrm{Tr}^n(\sigma)$ — совокупность всех термов сигнатуры σ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, а $\mathrm{T}^n(\mathfrak{A})$ — совокупность всех типов изоморфизма $\langle \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_n \rangle$-алгебр $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}$, обогащенных константами $a_1, \ldots, a_n$. Под типом изоморфизма алгебры традиционно понимается некоторый представитель класса всех изоморфных между собой алгебр.

Пусть ψ — произвольное отображение множества $\mathrm{T}^n(\mathfrak{A})$ в множество $\mathrm{Tr}^n(\mathfrak{A})$. Через $\Phi_\psi(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим следующую схему:

$$\mathop{\&}_{\langle \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathrm{T}^n(\mathfrak{A})} D_{\bar{a}}(x_1, \ldots, x_n) \\ \to \psi(\langle \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_n \rangle)(x_1, \ldots, x_n),$$

называемую далее *∞-условным термом сигнатуры σ для алгебры* $\mathfrak{A}$. Через ∞-$\mathrm{CTr}(\sigma, \mathfrak{A})$ обозначим совокупность всех подобных ∞-условных термов. С каждым ∞-условным термом $\Phi_\psi(x_1, \ldots, x_n)$ для алгебры $\mathfrak{A}$ естественным образом свяжем определенную на A ∞-условно термальную функцию $\Phi_\psi^{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n)$: для $b_1, \ldots, b_n \in A$, если $\mathfrak{A} \models D_{\bar{a}}(b_1, \ldots, b_n)$, то

$$\Phi_\psi^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n) = \psi(\langle \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_n \rangle)(b_1, \ldots, b_n).$$

Через ∞-$\mathrm{CT}(\mathfrak{A})$ обозначим совокупность всех ∞-условно термальных функций для алгебры $\mathfrak{A}$.

Без труда непосредственно замечается равенство $\mathrm{AO}(\mathfrak{A}) = \infty$-$\mathrm{CT}(\mathfrak{A})$ и включения $\mathrm{CT}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{AO}(\mathfrak{A})$, $\mathrm{IO}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{AO}(\mathfrak{A})$.

Утверждение 1. *Имеет место следующая диаграмма, вообще говоря, собственных включений на связанных с алгеброй $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ клонах функций на множестве A:*

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{PCT}(\mathfrak{A}) \begin{matrix} \subseteq \mathrm{CT}(\mathfrak{A}) \subseteq \\ \subseteq \mathrm{IO}(\mathfrak{A}) \subseteq \end{matrix} \mathrm{AO}(\mathfrak{A}).$$

При этом включение $\mathrm{CT}(\mathfrak{A}) \cup \mathrm{IO}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{AO}(\mathfrak{A})$ *собственное в общем случае и имеет место равенство* $\mathrm{CT}(\mathfrak{A}) \cap \mathrm{IO}(\mathfrak{A}) = \mathrm{PCT}(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; f \rangle$ — моноунар, являющийся дизъюнктным объединением f-циклов C_n длины n для каждого натурального n. Тогда функция $g(x)$, совпадающая на цикле C_n с функцией $f^{n-1}(x)$, очевидным образом входит в $\mathrm{AO}(\mathfrak{A})$ и не является ни условно термальной, ни неявной операцией для $\mathfrak{A}$.

Пусть для некоторой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ условно термальная и одновременно является неявной операцией для $\mathfrak{A}$, т. е. в последнем случае коммутирует со всеми внутренними гомоморфизмами этой алгебры.

Пусть

$$t(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases} J_1(\bar{x})\to t_1(\bar{x})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ J_m(\bar{x})\to t_m(\bar{x})\end{cases}$$

— нормальная форма (см. [4, 5]) условного терма сигнатуры σ, определяющего функцию f на $\mathfrak{A}$. Здесь $\{J_i(\bar{x}) \mid i\le m\}$ — дизъюнктная система условий (конечных наборов равенств и неравенств между термами сигнатуры σ от переменных $x_1,\ldots,x_n$). При этом

$$\mathfrak{A}\models\forall\bar{x}\left(\bigvee_{i=1}^{m}J_i(\bar{x})\right).$$

Пусть $J_i^+(\bar{x})$ — совокупность термальных равенств, входящих в $J_i(\bar{x})$, а $J_i^-(\bar{x})$ — совокупность отрицаний термальных равенств, входящих в $J_i(\bar{x})$, т. е. $J_i(\bar{x})=J_i^+(\bar{x})\cup J_i^-(\bar{x})$. При этом $t_i(\bar{x})$ — термы сигнатуры σ. Рассмотрим схему

$$t'(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases} J_1^+(\bar{x})\to t_1(\bar{x})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ J_m^+(\bar{x})\to t_m(\bar{x}).\end{cases}$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{A}\models\forall\bar{x}\left(\bigvee_{i=1}^{m}J_i^+(\bar{x})\right),$$

а так как $f(x_1,\ldots,x_n)$ коммутирует со всеми внутренними гомоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$, для любых $i\ne j$

$$\mathfrak{A}\models\forall\bar{x}(J_i^+(\bar{x})\&J_j^+(\bar{x})\to t_i(\bar{x})=t_j(\bar{x})).$$

Тем самым $t'(x_1,\ldots,x_n)$ является позитивно условным термом для алгебры $\mathfrak{A}$, при этом для любых $b_1,\ldots,b_n\in A$

$$f(b_1,\ldots,b_n)=t(b_1,\ldots,b_n)=t'(b_1,\ldots,b_n),$$

т. е. $f\in\mathrm{PCT}(\mathfrak{A})$. Тем самым равенство $\mathrm{CT}(\mathfrak{A})\cap\mathrm{IO}(\mathfrak{A})=\mathrm{PCT}(\mathfrak{A})$ доказано. $\square$

Алгебры $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma_1\rangle$ и $\mathfrak{B}=\langle A;\sigma_2\rangle$ называются (см. [13]) *неявно эквивалентными*, если существует биекция φ множества A на B такая, что $\varphi\,\mathrm{IO}(\mathfrak{A})\varphi^{-1}=\mathrm{IO}(\mathfrak{B})$, или, иначе, φ-сопряжения сигнатурных функций алгебры $\mathfrak{A}$ являются неявными операциями на $\mathfrak{B}$ и φ^{-1}-сопряжения сигнатурных функций алгебры $\mathfrak{B}$ — неявными операциями на $\mathfrak{A}$. Через $\mathfrak{A}\sim^i\mathfrak{B}$ обозначим неявную эквивалентность алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. В силу определения неявных операций и того, что $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$ отождествима с решеткой идемпотентов полугруппы $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$, отношение $\mathfrak{A}\sim^i\mathfrak{B}$ равносильно сопряженности полугрупп $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$ и $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{B}$ с помощью некоторой биекции φ множества A на B.

Алгебры $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma_1\rangle$ и $\mathfrak{B}=\langle B;\sigma_2\rangle$ назовем *абстрактно эквивалентными* ($\mathfrak{A}\sim^a\mathfrak{B}$), если существует биекция φ множества A на множество B такая, что $\varphi\,\mathrm{AO}(\mathfrak{A})\varphi^{-1}=\mathrm{AO}(\mathfrak{B})$ или, иначе, φ-сопряжения сигнатурных функций алгебры $\mathfrak{A}$ являются абстрактными операциями на $\mathfrak{B}$, а φ^{-1}-сопряжения сигнатурных функций алгебры $\mathfrak{B}$ — абстрактными операциями на $\mathfrak{A}$. По определению абстрактных операций отношение $\mathfrak{A}\sim^a\mathfrak{B}$ равносильно сопряженности полугрупп $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$ и $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{B}$ с помощью некоторой биекции φ множества A на B.

В силу отмеченных выше включений между клонами $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$, $\mathrm{PCT}(\mathfrak{A})$, $\mathrm{CT}(\mathfrak{A})$, $\mathrm{IO}(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{AO}(\mathfrak{A})$ имеет место

Утверждение 2. *Справедлива следующая диаграмма между отношениями* $\sim^r$, $\sim^{pcr}$, $\sim^{cr}$, $\sim^i$, $\sim^a$*:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \mathfrak{A} \sim^{cr} \mathfrak{B} \arrow[dr] & \\ \mathfrak{A} \sim^r \mathfrak{B} \arrow[r] & \mathfrak{A} \sim^{pcr} \mathfrak{B} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathfrak{A} \sim^a \mathfrak{B}. \\ & & \mathfrak{A} \sim^i \mathfrak{B} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

При этом все эти импликации, вообще говоря, собственные (*т. е. необратимы*).

Доказательство. Раньше эта необратимость была отмечена для всех импликаций, кроме $\mathfrak{A} \sim^{cr} \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \sim^a \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \sim^i \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \sim^a \mathfrak{B}$. Покажем необратимость последних, а также еще раз отметим, что для конечных и равномерно локально конечных алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ конечной сигнатуры имеет место

$$\mathfrak{A} \sim^{pcr} \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{A} \sim^i \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \sim^{cr} \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{A} \sim^a \mathfrak{B}.$$

Итак, покажем, что, вообще говоря,

$$\mathfrak{A} \sim^a \mathfrak{B} \nrightarrow \mathfrak{A} \sim^i \mathfrak{B} \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} \sim^a \mathfrak{B} \nrightarrow \mathfrak{A} \sim^{cr} \mathfrak{B}.$$

Пусть A — дизъюнктное объединение множеств C_{2n} для любого натурального $n \geq 3$. Унарная функция f, заданная на A, обращает C_{2n} в циклы длины $2n$. Пусть $a_i \in C_i$. Функцию $g(x)$ определим на A так, что для $x \in C_i$ выполнено $g(x) = a_i$. Функцию $h(x)$ определим на A так, что для $x = f^n(a_n)$ выполнено $h(x) = f(x)$ и для иных $x \in C_{2n}$ имеет место $h(x) = x$. Рассмотрим алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; f, g\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle A; f, h\rangle$. Очевидно, что они не имеют нетривиальных внутренних изоморфизмов. Стало быть, $\operatorname{Iso}\mathfrak{A} = \operatorname{Iso}\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \sim^a \mathfrak{B}$. В то же время если $\mathfrak{B}$ не имеет нетривиальных внутренних гомоморфизмов, то у $\mathfrak{A}$ таковые есть и тем самым $\mathfrak{A} \nsim^i \mathfrak{B}$. Столь же необременительно заметить с помощью синтаксического анализа возможных нормальных форм условных термов алгебры $\mathfrak{A}$, что функция h не совпадает ни с каким сопряжением (биекцией A на A) условно термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$, так что $\mathfrak{A} \nsim^{cr} \mathfrak{B}$. $\square$

Среди различных результатов, связанных с «клоновыми» эквивалентностями алгебр ($\sim^r$, $\sim^{pcr}$, $\sim^{cr}$, $\sim^i$, $\sim^a$), укажем ряд работ автора об эквивалентности $\sim^{cr}$ и, более того, об отношении сравнения алгебр, связанном с этой эквивалентностью (о так называемых «шкалах вычислимости»). Изложение большей части этих результатов и их обзор см., к примеру, в [4, 5, 14, 15]. Здесь лишь отметим, что число различных классов $\sim^{cr}$-эквивалентности n-элементных алгебр конечно для любого натурального n, для 2-элементных алгебр оно равно 5, для 3-элементных — 53, для 4-элементных — 22610 (просчитанный на компьютере результат Джипсона). В то же время число различных классов $\sim^r$-эквивалентности двухэлементных алгебр счетно (следствие теоремы Поста [16]), а число классов $\sim^r$-эквивалентности n-элементных алгебр (для натуральных $n \geq 3$) континуально (следствие теоремы Ю. И. Янова и А. А. Мучника [17]).

§ 2. «Клоновая» категоричность

При изучении «клоновых» эквивалентностей универсальных алгебр определенный интерес представляют экстремальные относительно этих эквивалентностей (хотя бы в своей фиксированной сигнатуре) алгебры.

Фиксируем некоторую сигнатуру σ, далее будем всегда предполагать ее конечной, и рассмотрим некоторую перестановку π ее символов, сохраняющую их местность (арность). Для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ этой сигнатуры *π-двойственной к $\mathfrak{A}$ алгеброй* $\mathfrak{A}^\pi$ назовем алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \pi(\sigma)\rangle$. Алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ назовем *$\sim$-категоричной* (для некоторой «клоновой» эквивалентности $\sim$), если для любой алгебры $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma\rangle$ из эквивалентности $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, осуществляемой с помощью биекции φ, следует, что φ является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}^\pi$ на $\mathfrak{B}$ для некоторой сохраняющей арности перестановки π на σ.

В подобном контексте будем далее говорить о *рациональной, позитивно условно рациональной, условно рациональной, неявной* и *абстрактной категоричностях* алгебр.

Напомним, что *функциональным клоном* на множестве A называется любая совокупность функций на A, замкнутая относительно оператора суперпозиции и включающая в себя селекторные функции π_n^i ($i \leq n \in \omega$) вида $\pi_n^i(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Таким образом, совокупность функций F на множестве A является клоном, если $F = \mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ для некоторой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$, в частности, для $\mathfrak{A} = \langle A; F\rangle$. Назовем клон F функций на множестве A *условно замкнутым*, если $F = \mathrm{CT}(\mathfrak{A})$ для некоторой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$, в частности, для $\mathfrak{A} = \langle A; F\rangle$. Таким образом, клон F условно замкнут, если он замкнут относительно оператора построения условно термальных функций над функциями из F. Аналогичным образом определяются понятия *позитивно условно замкнутого клона* F функций на A, если $F = \mathrm{PCT}(\langle A; F\rangle)$ и *неявно* (*абстрактно*) *замкнутого клона* F, если $F = \mathrm{IO}(\langle A; F\rangle)$ ($F = \mathrm{AO}(\langle A; F\rangle)$). Отображения $F \to \mathrm{PCT}(\langle A; F\rangle)$, $F \to \mathrm{CT}(\langle A; F\rangle)$, $F \to \mathrm{IO}(\langle A; F\rangle)$, $F \to \mathrm{AO}(\langle A; F\rangle)$ являются операциями позитивно условного, условного, неявного, абстрактного замыканий на решетке L_A функциональных клонов на множестве A. Понятие *рациональной категоричности* алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ означает, что клон $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ имеет единственную с точностью до перестановки входящих в нее функций порождающую клон $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ совокупность функций — функции из σ с фиксированным, таким, как в σ, набором их арностей.

Понятие *позитивно условно рациональной* (*условно рациональной, неявной, абстрактной*) *категоричности алгебры* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ означает, что позитивно условное замыкание $\mathrm{PCT}(\mathfrak{A})$ (условное $\mathrm{CT}(\mathfrak{A})$, неявное $\mathrm{IO}(\mathfrak{A})$, абстрактное $\mathrm{AO}(\mathfrak{A})$ замыкания) имеет единственную с точностью до перестановки, сохраняющей арности входящих в нее функций, порождающую его (как соответствующее замыкание) совокупность функций — функции из σ с данным, как в σ, набором их арностей.

В силу отмеченных выше в § 1 импликаций между рассматриваемыми здесь «клоновыми» эквивалентностями абстрактная категоричность алгебры $\mathfrak{A}$ влечет ее неявную и условно рациональную категоричности, каждая из последних влечет позитивно условно рациональную категоричность алгебры $\mathfrak{A}$, а она, в свою очередь, — рациональную категоричность $\mathfrak{A}$.

Заметим также, что очевидным образом любая из введенных выше «клоновых» категоричностей алгебры $\mathfrak{A}$ влечет «обобщенную коммутативность» последней, т. е. то, что для любой $f(x_1, \dots, x_n)$ и любой перестановки π на $\{1, \dots, n\}$ найдется сохраняющая арности перестановка ρ на σ такая, что на $\mathfrak{A}$ истинно тождество

$$\forall x_1, \dots, x_n (\rho(f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})).$$

Напомним также близкое понятие определимости алгебры своей производной структурой Sub, Con, Aut, Iso или Ihm. Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ определима, к примеру, своей решеткой подалгебр $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$, если для любой алгебры $\mathfrak{B} = \langle A; \sigma \rangle$ равенство $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Sub}\,\mathfrak{B}$ влечет существование сохраняющей арности перестановки π на σ такой, что $\mathfrak{A}^\pi = \mathfrak{B}$. Вопросы определимости алгебр производными структурами при различных дополнительных ограничениях на алгебру относятся к традиционным вопросам как универсальной, так и классической алгебр (см., к примеру, [18–21]).

В качестве примера для подобных определимостей приведем следующий, довольно очевидный. Моноунар $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ является Sub-определимым тогда и только тогда, когда любая связная его подалгебра либо не содержит циклов, либо является два-циклом.

Как источник примеров Ihm-определимых (неявно категоричных) алгебр докажем

Утверждение 3. *Любая не линейно упорядоченная нижняя* (*верхняя*) *полурешетка является* Ihm-*определимой. Линейно упорядоченные полурешетки* Ihm-*определимыми не являются.*

Доказательство. Действительно, если $\mathfrak{A} = \langle A; \wedge \rangle$ — нижняя линейно упорядоченная полурешетка, то для двойственной ей верхней полурешетки $\mathfrak{A}' = \langle A; \vee \rangle$ имеет место равенство $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}'$, что и влечет неопределимость алгебры $\mathfrak{A}$ полугруппой $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$.

С другой стороны, пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \wedge \rangle$ — некоторая нижняя полурешетка и a, c — пара несравнимых элементов из A, пусть $b = a \wedge c$. Без труда в силу наличия эндоморфизмов φ_1, φ_2 подполурешетки $\langle \{a, b, c\}; \wedge \rangle$ таких, что $\varphi_1(a) = \varphi_1(b) = b$, $\varphi_1(c) = c$, $\varphi_2(c) = \varphi_2(b) = b$, $\varphi_2(a) = a$, замечается Ihm-определимость операции $\wedge$ на $\langle \{a, b, c\}; \wedge \rangle$. Иначе говоря, существует единственная на $\{a, b, c\}$ полурешеточная операция с данной полугруппой внутренних гомоморфизмов. При этом $d \le e$ для $d, e \in A$ в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда существует внутренний изоморфизм ψ подполурешетки $\langle \{a, b\}; \wedge \rangle$ на подполурешетку $\langle \{d, e\}; \wedge \rangle$ такой, что $\psi(a) = e$, $\psi(b) = d$. Из этих замечаний следует в конечном итоге Ihm-определимость полурешетки $\mathfrak{A}$. $\square$

Утверждение 4. *Имеет место следующая диаграмма, собственных* (*необратимых*) *импликаций и эквивалентностей между определимостями алгебр своими производными структурами и «клоновыми» категоричностями:*

$$\begin{tikzcd}
\text{Sub-опр.} \arrow[dr] & \text{Aut-опр.} \arrow[d] & & & \\
& \text{Iso-опр.} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{Ihm-опр.} \arrow[d, leftrightarrow] & & \\
& \text{Абстр. категор.} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Неявн. категор.} \arrow[d] & \text{End-опр.} \arrow[d] & \text{Con-опр.} \arrow[dl] \\
& \text{Условн. рац. категор.} \arrow[r] & \text{Позит. условн. рац. категор.} \arrow[r] & \text{Рацион. катег.} &
\end{tikzcd}$$

При этом, как уже не раз отмечалось выше, для конечных либо равномерно локально конечных алгебр конечной сигнатуры абстрактная (неявная) категоричность равносильна условно рациональной (позитивно условно рациональной) категоричности.

Доказательство. В доказательстве с учетом утверждения 2 нуждается лишь необратимость импликаций из утверждения 4.

В [21] доказана Iso-определимость группоида $\mathfrak{G}^3_{\mathrm{iso}} = \langle\{a,b,c\};\cdot\rangle$ со следующей таблицей умножения:

$y\diagdown x$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

Очевидно, что ту же решетку подалгебр имеет и группоид с таблицей умножения

$y\diagdown x$	a	b	c
a	a	c	b
b	a	b	a
c	b	a	c

Тем самым из Iso-определимости алгебр, вообще говоря, не следует их Sub-определимость.

Группа автоморфизмов трехэлементного группоида $\mathfrak{A} = \langle\{a,b,c\};f(x,y)\rangle$ такого, что $f(x,y) = x$, совпадает с группой автоморфизмов группоида $\mathfrak{G}^3_{\mathrm{iso}}$, и, значит, Aut-определимость алгебр, вообще говоря, не следует из их Iso-определимости.

Рассмотрим трехэлементную полурешетку $\mathfrak{A} = \langle\{a,b,c\};\wedge\rangle$ такую, что a,c несравнимы и $a\wedge c = b$ (она Ihm-определима в силу утверждения 3), и трехэлементный идемпотентный группоид $\mathfrak{A}' = \langle\{a,b,c\};\cdot\rangle$ такой, что $a\cdot c = c\cdot a = b$, $a\cdot b = b\cdot a = a$ и $c\cdot b = b\cdot c = c$. Тогда непосредственно замечается, что $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}'$ и, значит, полурешетка $\mathfrak{A}$ не является Iso-определимой. Тем самым, вообще говоря, Imh-определимость (позитивно условно рациональная категоричность, так как $\mathfrak{A}$ конечна) не влечет Iso-определимости (условно рациональной категоричности).

Покажем, что рациональная категоричность не влечет ни End-определимости, ни Con-определимости алгебр.

Действительно, наряду с указанным выше Iso-определимым (а, значит, и рационально категоричным) трехэлементным группоидом $\mathfrak{G}^3_{\mathrm{iso}} = \langle\{a,b,c\};\cdot\rangle$ рассмотрим группоид $\mathfrak{B} = \langle\{a,b,c\};*\rangle$ с таблицей умножения

$y\diagdown x$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	a	a	c

Очевидно, что $\mathrm{End}\,\mathfrak{B} = \mathrm{End}\,\mathfrak{G}^3_{\mathrm{iso}}$, т. е. группоид $\mathfrak{G}^3_{\mathrm{iso}}$ рационально категоричен, но не End-определим.

Непосредственно проверяется простота (отсутствие нетривиальных конгруэнций) группоида $\mathfrak{G}^3_{\mathrm{iso}}$. Но трехэлементный группоид $\mathfrak{B} = \langle\{a,b,c\},\odot\rangle$ с таблицей умножения

$y\diagdown x$	a	b	c
a	a	c	b
b	b	b	a
c	b	a	c

также прост. Тем самым группоид $\mathfrak{G}^3_{\mathrm{iso}}$ рационально категоричен, но не Con-определим. $\square$

Наконец покажем, что рациональная категоричность не влечет позитивно условно рациональной категоричности. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; f, h\rangle$ — биунар такой, что $A = \{a, b, 0, 1\}$ и $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $h(0) = 1$, $h(1) = 0$, $h(a) = a$, $h(b) = b$. Без труда непосредственно замечается рациональная категоричность алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть функция $g(x)$ определена на A позитивно условным для $\mathfrak{A}$ термом

$$t(x) = \begin{cases} f(x) = x \to h(x) \\ h(x) = x \to f(x). \end{cases}$$

Тогда алгебра $\mathfrak{A}' = \langle A; g(x), h(x)\rangle$ позитивно условно рационально эквивалентна алгебре $\mathfrak{A}$, но $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}^{\pi}$ ни для какого $\pi \in \operatorname{Sym}\sigma$. Действительно, позитивно условный для $\mathfrak{A}'$ терм

$$t'(x) = \begin{cases} h(x) = x \to g(x) \\ g(x) = h(x) \to x \end{cases}$$

определяет на A функцию $f(x)$, т. е. $\mathfrak{A}$ — пример рационально категоричной алгебры, не являющейся позитивно условно рационально категоричной. $\square$

Остается открытым вопрос о существовании алгебр (не являющихся равномерно локально конечными в случае конечности их сигнатур), которые условно рационально категоричны, но не абстрактно категоричны (позитивно условно рационально категоричны, но не неявно категоричны).

§ 3. Классы «клоново» категоричных алгебр фиксированной сигнатуры

В настоящем параграфе фиксируем некоторую конечную сигнатуру $\sigma = \left\langle f_1^{n_1}, \dots, f_m^{n_m}\right\rangle$, состоящую из функциональных символов f_i арности n_i. Рассмотрим вопросы строения классов рационально, позитивно условно рационально, условно рационально, неявно и абстрактно категоричных алгебр данной фиксированной сигнатуры σ.

Через $\mathrm{Tr}^{\bar\sigma}$ обозначим совокупность всех конечных последовательностей термов $\bar t = \langle t_1(x_1, \dots, x_{n_1}), \dots, t_m(x_1, \dots, x_{n_m})\rangle$, сигнатуры арности которых (термов t_i) совпадают с соответствующими арностями в последовательности σ (арностями символов f_i). Для любого терма $t(x_1, \dots, x_k)$ сигнатуры σ через $\mathrm{Sub}_{\sigma}^{\bar t}\, t(x_1, \dots, x_k)$ обозначим результат одновременной подстановки в терм t термов t_i вместо символов f_i соответственно. Через $\operatorname{Sym}\sigma$ обозначим совокупность всех перестановок π символов, входящих в σ и сохраняющих арности этих символов, через f^{π} будем обозначать σ-символ $\pi(f)$ для $f \in \sigma$, $\pi \in \operatorname{Sym}\sigma$.

Для любых двух последовательностей $\bar t = \langle t_1, \dots, t_m\rangle$, $\bar t' = \langle t'_1, \dots, t'_m\rangle$ из $\mathrm{Tr}^{\bar\sigma}$ через $\Phi_{\bar t, \bar t'}$ обозначим формулу

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} \forall x_1, \dots, x_{n_i} \big(\mathrm{Sub}_{\sigma}^{\bar t}\, t'_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = f_i(x_1, \dots, x_{n_i})\big)$$
$$\to \bigvee_{\pi \in \operatorname{Sym}\sigma} \left[\mathop{\&}_{j=1}^{m} \forall x_1, \dots, x_{n_j} \big(t_j(x_1, \dots, x_{n_j}) = f_j^{\pi}(x_1, \dots, x_{n_j})\big)\right].$$

Через $\mathrm{T}_{\sigma}^{r,c}$ обозначим совокупность всех формул вида $\Phi_{\bar t, \bar t'}$, где $\bar t, \bar t' \in \mathrm{Tr}^{\bar\sigma}(\sigma)$. В силу определения рациональной категоричности алгебр имеет место

Утверждение 5. *Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ конечной сигнатуры σ является рационально категоричной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models T_\sigma^{r,c}$.*

Таким образом, совокупность рационально категоричных алгебр конечной сигнатуры σ является элементарным классом, допускающим аксиоматизацию как $\forall\exists$- , так и $\exists\forall$-формулами. В частности, имеет место

Следствие 1. *Совокупность рационально категоричных алгебр конечной сигнатуры σ замкнута как относительно ультрапроизведений, так и относительно объединения возрастающих (по включению) цепей алгебр. Для любой рационально категоричной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ конечной сигнатуры σ существует ее счетная подалгебра $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma\rangle$ такая, что все подалгебры $\mathfrak{C} = \langle C; \sigma\rangle$ алгебры $\mathfrak{A}$, лежащие между $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$, рационально категоричны.*

В качестве примера рассмотрим описание рационально категоричных моноунаров, сигнатура которых состоит из одной единственной унарной функции f. В этом случае $\bar{t} = \langle f^n\rangle$ для некоторого $n \in \omega$ (при этом $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ и $f^0(x) = x$), $\bar{t}' = \langle f^m(x)\rangle$ для некоторого $m \in \omega$ и $f^\pi = f$ для $\pi \in \operatorname{Sym}\sigma$. Тем самым

$$\Phi_{\bar{t},\bar{t}'} = \forall x(f^{mn}(x) = f(x)) \to \forall x(f^n(x) = f(x)). \tag{1}$$

Ранее перед утверждением 3 были описаны Sub-определимые моноунары как такие, у которых связные подалгебры либо не имеют циклов, либо являются циклами длины два. Как замечено выше, они будут и рационально категоричными. Тем самым остается рассмотреть моноунары $\mathfrak{A} = \langle A; f\rangle$, которые не Sub-определимы, т. е. содержат связные подалгебры с циклами длины, большей чем два. Будем говорить, что моноунар $\mathfrak{A} = \langle A; f\rangle$ *имеет цепь длины два*, если существует элемент $a \in A$ такой, что $a \neq f(a)$, $f(a)$ не входит в алгебре $\mathfrak{A}$ в f-цикл и не является f-неподвижной точкой. Очевидно, что если моноунар $\mathfrak{A}$ содержит цепь длины два, то $\mathfrak{A}$ рационально категоричный (никакой терм сигнатуры $\langle f\rangle$, кроме как $f(x)$, не совпадает на элементе a с термом $f(x)$). Итак, будем считать, что $\mathfrak{A}$ не содержит цепей длины два. Также очевидно, что если длины циклов в $\mathfrak{A}$ не ограничены в совокупности, то посылки формул вида (1) могут быть истинны на $\mathfrak{A}$ только при $m, n \in \{0, 1\}$. Но в этом случае и сами формулы вида (1) истинны на $\mathfrak{A}$, т. е. подобные моноунары рационально категоричны. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $\mathfrak{A}$ не содержит цепей длины два и длины циклов в $\mathfrak{A}$ ограничены в совокупности. Допустим, что среди циклов в $\mathfrak{A}$ есть цикл длины, большей двух, и пусть $p \geq 3$ — наименьшее общее кратное длин циклов, входящих в $\mathfrak{A}$. Так как $(p-1)(p-1) = 1 + p(p-2)$ и в $\mathfrak{A}$ нет цепей длины два,

$$\mathfrak{A} \models \forall x(f^{(p-1)(p-1)}(x) = f(x)).$$

При этом $p > p - 1 > 1$, но тогда, если бы на $\mathfrak{A}$ были истинны формулы вида (1), т. е. $\mathfrak{A}$ был бы рационально категоричен, то

$$\mathfrak{A} \models \forall x(f^{(p-1)}(x) = f(x))$$

в противоречие с выбором p. Тем самым подобные моноунары не рационально категоричны. Окончательно остается рассмотреть случай, когда $\mathfrak{A}$ не содержит цепей длины два и все циклы в $\mathfrak{A}$ имеют длину два, и столь же очевидно, что подобные моноунары рационально категоричны.

Тем самым имеет место

Следствие 2. *Моноунар* $\mathfrak{A} = \langle A; f\rangle$ *рационально категоричный, если либо длины его циклов не ограничены в совокупности, либо он содержит цепь длины два, либо таких цепей в* $\mathfrak{A}$ *нет, а все циклы в* $\mathfrak{A}$ *имеют длину два.*

Заметим, что в силу этого следствия подалгебры рационально категоричных алгебр не обязаны быть рационально категоричными.

Отметим также, что классы позитивно условно рационально и условно рационально категоричных алгебр фиксированной конечной сигнатуры $\sigma = \left\langle f_1^{n_1}, \dots, f_k^{n_k}\right\rangle$ элементарны. Доказательство, аналогичное доказательству утверждения 5, проведем только для случая условно рациональной категоричности.

Прежде всего заметим, что за счет рассмотрения фиктивных переменных можно считать функции из сигнатуры σ зависящими от одного и того же числа переменных. Кроме того, будем предполагать все рассматриваемые в дальнейшем условные термы заданными в нормальной форме (см., к примеру, [4]), т. е. в виде следующих схем:

$$t(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} J_1(x_1,\dots,x_n) \to t_1(x_1,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J_m(x_1,\dots,x_n) \to t_m(x_1,\dots,x_n). \end{cases} \tag{2}$$

Более того, имея дело с конечным числом условных термов $t^1(x_1,\dots,x_n)$, $\dots$, $t^k(x_1,\dots,x_n)$, очевидным образом можно считать, что числа m (число условий в их записи) для них совпадают, как совпадают и сами эти условия:

$$t^j(\bar{x}) = \begin{cases} J_1(\bar{x}) \to t_1^j(\bar{x}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ J_m(\bar{x}) \to t_1^j(\bar{x}) \end{cases} \tag{3}$$

при $1 \le j \le k$.

Через $\mathrm{CT}^{\bar{\sigma}}(\sigma)$ обозначим совокупность всех конечных последовательностей $\bar{t}(t^1(\bar{x}),\dots,t^k(\bar{x}))$ схем вида (3) сигнатуры σ.

Для последовательности $\bar{t} \in \mathrm{CT}^{\bar{\sigma}}(\sigma)$ через $\bar{t}_s$ $(1 \le s \le m)$ обозначим последовательность $\left\langle t_s^1,\dots,t_s^k\right\rangle$ термов сигнатуры σ.

Для двух последовательностей $\bar{t}\langle t^1,\dots,t^k\rangle$, $\bar{g}\langle g^1,\dots,g^k\rangle$ из $\mathrm{CT}^{\bar{\sigma}}(\sigma)$, где

$$t^i(\bar{x}) = \begin{cases} J_1(\bar{x}) \to t_1^i(\bar{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ J_m(\bar{x}) \to t_m^i(\bar{x}), \end{cases} \quad g^i(\bar{x}) = \begin{cases} J_1(\bar{x}) \to g_1^i(\bar{x}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ J_m(\bar{x}) \to g_m^i(\bar{x}), \end{cases}$$

через $\Psi_{\bar{t},\bar{g}}$ обозначим формулу

$$\begin{aligned} \forall\bar{x}\left(\bigvee_{i=1}^m J_i(\bar{x})\right) \& \forall\bar{x} \mathop{\&}_{i=1}^m \left(J_i(\bar{x}) \to \bigvee_{j=1}^m \mathrm{Sub}_{\bar{\sigma}}^{\bar{t}_i} J_i(\bar{x})\right) \\ \& \forall\bar{x} \mathop{\&}_{i=1}^m \left(J_i(\bar{x}) \to \mathop{\&}_{l=1}^m \mathrm{Sub}_{\bar{\sigma}}^{\bar{t}_i} g_l^i(\bar{x}) = f_l(\bar{x})\right) \\ \to \bigvee_{\pi\in\mathrm{Sym}\,\sigma} \left(\mathop{\&}_{i=1}^m \forall\bar{x}\left(J_i(\bar{x}) \to \mathop{\&}_{i=1}^m t_l^i(\bar{x}) = f_l^\pi(\bar{x})\right)\right). \end{aligned}$$

Через $\mathrm{T}_\sigma^{rc,c}$ обозначим совокупность всех формул вида $\Psi_{\bar{t},\bar{g}}$, где $\bar{t},\bar{g} \in \mathrm{CT}^{\bar{\sigma}}(\sigma)$.

Очевидно

Утверждение 6. *Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$ конечной сигнатуры σ условно рационально категорична тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models T_\sigma^{cr,c}$.*

Аналогичным образом строится система элементарных формул $T_\sigma^{pcr,c}$ сигнатуры σ такая, что имеет место

Утверждение 7. *Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$ конечной сигнатуры σ позитивно условно рационально категорична тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models T_\sigma^{pcr,c}$.*

В силу того, что формулы из $T_\sigma^{pcr,c}$ и $T_\sigma^{cr,c}$ эквивалентны как $\forall\exists$-, так и $\exists\forall$-формулам, вытекает

Следствие 3. *Совокупность условно рационально (позитивно условно рационально) категоричных алгебр конечной сигнатуры σ замкнута как относительно ультрапроизведений, так и относительно объединения возрастающих (по включению) цепей алгебр. Для любой условно рационально (позитивно условно рационально) категоричной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$ конечной сигнатуры σ существует ее не более чем счетная подалгебра $\mathfrak{B} = \langle B;\sigma\rangle$ такая, что все подалгебры $\mathfrak{C} = \langle C;\sigma\rangle$ алгебры $\mathfrak{A}$, лежащие между $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$, условно рационально (позитивно условно рационально) категоричны.*

По аналогии с утверждениями 5 и 6 без особого труда выписываются формулы $\Psi_{\bar t,\bar g}^{\mathrm{iso}}$, $\Psi_{\bar t,\bar g}^{\mathrm{ihm}}$ языка $L_{\omega_1,\omega}$, аксиоматизирующие классы абстрактно категоричных (Iso-определимых) и неявно категоричных (Ihm-определимых) алгебр фиксированной конечной сигнатуры. Причем, как и выше, эти аксиомы могут быть записаны в виде как $\forall\exists$-, так и $\exists\forall$-$L_{\omega_1,\omega}$-формул.

В [21] на основе неверно выписанной формулы $\Psi_{\bar t,\bar g}^{\mathrm{iso}}$ ошибочно утверждалась наследственность класса абстрактно категоричных алгебр сигнатуры σ.

Действительно, рассмотрим сигнатуру σ, состоящую, к примеру, из двух одноместных функций $\langle f(x), g(x)\rangle$, и биунар $\mathfrak{A}_0\langle\{0,1\};\sigma\rangle$ такой, что $f(0) = f(1) = 1$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Очевидно, что $\mathfrak{A}$ не абстрактно категоричный (Iso-определимый). К примеру, если $\mathfrak{A}_1 = \langle\{0,1\};\sigma\rangle$ и $f(0) = f(1) = 1$, $g(0) = g(1) = 1$, то $\mathfrak{A}_0 \neq \mathfrak{A}_1$, хотя $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}_1$. Пусть $\mathfrak{A}_2,\dots,\mathfrak{A}_k$ — все иные с точностью до изоморфизма двухэлементные биунары, попарно не изоморфные между собой и такие, что $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}_i = \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}_0$ $(0 \le i \le k)$ и $\mathfrak{B}$ — дизъюнктное объединение алгебр $\mathfrak{A}_0,\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_k$. Без труда замечается, что $\mathfrak{B}$ — абстрактно категоричная алгебра, содержащая подалгебру $\mathfrak{A}_0$, не являющуюся таковой.

Тем не менее некоторая «ограниченная наследственность» для класса абстрактно категоричных алгебр имеет место.

Утверждение 8. *Для любой абстрактно категоричной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$, любой ее подалгебры $\mathfrak{B} = \langle B;\sigma\rangle$ такой, что существует алгебра $\mathfrak{D}$, полугруппа $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{D}$ которой сопряжена (некоторой биекцией) полугруппе $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{B}$ и не изоморфная никакой алгебре вида $\mathfrak{C}^\pi$ для $\mathfrak{C} \in \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$, $\pi \in \mathrm{Sym}\,\sigma$, с полугруппой $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{C}$, сопряженной полугруппе $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{B}$, абстрактно категоричной будет и алгебра $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть $\mathfrak{D} = \langle B;\sigma\rangle$ — алгебра такая, что $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{D} = \mathrm{Iso}\,\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{D} \not\cong \mathfrak{C}^\pi$ ни для какого $\pi \in \mathrm{Sym}\,\sigma$ и ни для какой $\mathfrak{C} \in \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$ такой, что $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{C}$ сопряжена с $\mathrm{Iso}\,\mathfrak{B}$. Пусть Φ — совокупность всех внутренних изоморфизмов φ алгебры $\mathfrak{A}$ таких, что $\mathrm{Dom}\,\varphi = B$. Определим новую σ-алгебру $\mathfrak{A}'$ на множестве A следующим образом: если $g(x_1,\dots,x_n) \in \sigma$ и $a_1,\dots,a_n \in \varphi(B)$ для некоторого $\varphi \in \Phi$, то полагаем $g^{\mathfrak{A}'}(a_1,\dots,a_n) = \varphi g^{\mathfrak{D}}(\varphi^{-1}(a_1),\dots,\varphi^{-1}(a_n))$. Если же $a_1,\dots,a_n$ не входят ни в какое из множеств вида $\varphi(B)$, то полагаем $g^{\mathfrak{A}'}(a_1,\dots,a_n) = g^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)$. Непосредственно проверяются корректность определения алгебры $\mathfrak{A}'$ и то, что $\operatorname{Iso}\mathfrak{A}' = \operatorname{Iso}\mathfrak{A}$, но при этом $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}^\pi$ ни для какого $\pi \in \operatorname{Sym}\sigma$, что противоречит предположению об абстрактной категоричности алгебры $\mathfrak{A}$. Утверждение доказано. □

В силу отмеченной выше неверности утверждения о наследственности класса Iso-определимых алгебр доказательство единственности построенного в [21] трехэлементного Iso-определимого группоида $\mathfrak{G}^3_{\mathrm{iso}}$ (основанное на неверном предположении об отсутствии у таковых группоидов двухэлементных подгруппоидов ввиду отсутствия двухэлементных Iso-определимых группоидов) неверно и исправленная версия соответствующего утверждения из [21] должна выглядеть так: существует единственный с точностью до изоморфизма трехэлементный Iso-определимый группоид, не имеющий двухэлементных подгруппоидов.

Было бы интересно выяснить, насколько эта единственность трехэлементных Iso-определимых группоидов имеет место и без предположения об отсутствии у них двухэлементных подгруппоидов. Тем не менее утверждение следствия 2 из [21] о существовании сколь угодно больших конечных и бесконечных Iso-определимых группоидов (строящихся в [21] на основе группоида $\mathfrak{G}^3_{\mathrm{iso}}$) остается в силе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Структурная характеристика некоторых классов алгебр // Докл. АН СССР. 1952. Т. 120, № 1. С. 29–32.

2. *Пинус А. Г.* Об условных термах и тождествах на универсальных алгебрах // Вычислительные системы. 1996. Т. 156. С. 59–78.

3. *Пинус А. Г.* Внутренние гомоморфизмы и позитивно условные термы // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 2. С. 158–173.

4. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.

5. *Пинус А. Г.* Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 4. С. 35–72.

6. *Пинус А. Г.* Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 4. С. 432–459.

7. *Пинус А. Г.* Позитивно условные многообразия // Алгебра и теория моделей. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. Вып. 3. С. 99–106.

8. *Пинус А. Г.* Характеризация условно термальных функций // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 161–165.

9. *Пинус А. Г.* О функциях коммутирующих с полугруппами преобразований алгебр // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1409–1418.

10. *Пинус А. Г.* О рационально и условно рационально эквивалентных алгебрах // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 326–334.

11. *Pinus A. G.* The positive and generalized discriminators don't exist // Discuss. Math., Gen. Algebra Appl. 2000. V. 20. P. 121–128.

12. *Eilenberg S., Schutzenberger M. P.* On pseudovarieties // Adv. Math. 1976. V. 19, N 3. P. 413–465.

13. *Пинус А. Г.* Неявно эквивалентные универсальные алгебры // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1077–1090.

14. *Пинус А. Г., Журков С. В.* Шкалы потенциалов вычислимости конечных алгебр: результаты и проблемы // Фунд. и прикл. математика. 2003. Т. 9, № 3. С. 145–164.

15. *Пинус А. Г.* Шкала потенциалов вычислимости всех конечных алгебр // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 668–673.

16. *Post E.* The two-valued iterative systems of mathematical logic // Princeton, NJ.: Princeton Univ. Press, 1941. (Ann. Math. Studies; V. 5).

17. *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 144–146.

18. *Шеврин Л. Н., Овчинников А. Я.* Полугруппы и их пополугрупповые решетки. Свердловск: Изд-во УрГУ, 1990, Ч. 1; 1991, Ч. 2.

19. *Пинус А. Г.* Полные вложения категорий алгебраических систем и определимость модели полугруппой ее эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 1982. № 1. С. 80–83.

20. *Пинус А. Г.* Об определимости конечных алгебр производными структурами // Изв. вузов. Математика. 2001. № 4. С. 38–42.

21. *Пинус А. Г.* Определимость локально конечных и конечных алгебр полугруппами своих преобразований // Избранные вопросы алгебры. Барнаул: Изд-во АГУ, 2007. С. 173–198.

Статья поступила 26 марта 2012 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru