Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 517.956.227

ОКОЛОВЕРШИННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ТОНКИХ МНОГОГРАННИКАХ

С. А. Назаров

Аннотация. При некоторых геометрических условиях показано, что собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа в тонком n-мерном многограннике локализуются около одной из вершин. Построены и обоснованы асимптотики собственных чисел и функций. Для волноводов — тонких слоев между периодическими многогранными поверхностями — установлено наличие лакун и найдены асимптотики их геометрических характеристик.

Ключевые слова: задача Дирихле, асимптотика спектра, локализация собственных функций, спектральные лакуны.

1. Постановка задачи и предварительное описание результатов. Пусть ω — открытый связный ограниченный многогранник в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$, $n \geq 2$, $H_\pm$ — кусочно линейные непрерывные функции на ω и

$$\Omega^\varepsilon = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \omega, \\ \zeta = \varepsilon^{-1} z \in \Upsilon(y) := (-H_-(y), H_+(y))\}. \quad (1)$$

Кроме того, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, и по предположению

$$H(y) = H_+(y) + H_-(y) > 0, \quad y \in \overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega, \quad (2)$$

т. е. Ω^ε — открытый и связный n-мерный многогранник (рис. 1). Рассмотрим спектральную задачу Дирихле

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \ x \in \Omega^\varepsilon, \quad u^\varepsilon(x) = 0, \ x \in \partial\Omega^\varepsilon, \quad (3)$$

вариационная формулировка которой выглядит так:

$$(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad \forall v^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon). \quad (4)$$

Здесь $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа, $\nabla_x = \operatorname{grad}$, λ^ε — спектральный параметр, $(\,,\,)_{\Omega^\varepsilon}$ — скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Omega^\varepsilon)$, скалярном или векторном, а $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ — подпространство функций из класса Соболева $H^1(\Omega^\varepsilon)$, обращающихся в нуль на поверхности $\partial\Omega^\varepsilon$. Задаче (4) отвечает последовательность собственных чисел

$$0 < \lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leq \lambda_3^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_j^\varepsilon \leq \dots \to +\infty, \quad (5)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00348).

© **2013 Назаров С. А.**

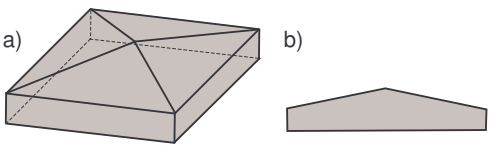

Рис. 1. Тонкий многогранник и изображающая его двумерная фигура.

занумерованных при учете кратностей, а соответствующие собственные функции $u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon, \dots, u_j^\varepsilon, \dots \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u_j^\varepsilon, u_k^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \delta_{j,k}, \quad j,k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ — натуральный ряд.

Основная цель работы — построить и обосновать асимптотику собственных чисел и функций, а также проследить для последних *эффект локализации* в предположении, что функция толщины (2) имеет единственный глобальный строгий максимум в точке $y^0 \in \omega$,

$$H(y) < H(y^0) \quad \text{при } y \in \overline{\omega},\ y \neq y^0, \tag{7}$$

$$H(y) = H(y^0) + rh(\varphi), \quad y \in \mathscr{V}, \tag{8}$$

где $\mathscr{V}$ — некоторая окрестность точки y^0, (r,φ) — система сферических координат в $\mathbb{R}^{n-1}$ с центром y^0, $r = |y - y^0|$, а h — кусочно гладкая и положительная в силу требования (7) функция на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-2} \ni \varphi$. Далее обозначаем

$$H_0 = H(y^0) > 0, \quad h_0 = \min\{h(\varphi) \mid \varphi \in \mathbb{S}^{n-2}\} > 0. \tag{9}$$

Многогранник взят в качестве сечения ω тонкой области (1) исключительно для того, чтобы сделать однотипными формы оснований и боковой поверхности. Установленный эффект локализации собственных функций показывает, что строение множества Ω^ε на удалении от точки $(y^0, 0)$ не играет никакой роли.

В задаче Дирихле на тонкой области эффект локализации собственных функций, заключающийся в экспоненциальном их затухании при удалении от множества малого диаметра, встречается достаточно часто: упомянем статьи [1–3] и [4–7]. В первой группе статей этот эффект был обнаружен около нескольких точек скошенной поверхности трехмерной пластины и около искривленного торца многомерного стержня, а во второй, имеющей прямое отношение к предмету настоящей работы, рассматривались тонкие области, двумерные [4–6] и многомерные [7], а локализация собственных функций происходила в окрестности точки глобального максимума гладкой функции толщины, по предположению единственного и строгого. Во всех цитированных работах, за исключением [3], где обсуждаемый эффект вызван появлением экспоненциально затухающего решения у предельной задачи в полубесконечном цилиндре с искривленным торцом, асимптотика собственных чисел и функций конструируется из решений обыкновенного дифференциального уравнения о гармоническом осцилляторе:

$$-\partial_\eta^2 w(\eta) + A\eta^2 w(\eta) = \mu w(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R},$$

где $A > 0$ и μ — спектральный параметр, или его многомерного аналога. В рассматриваемой задаче (3) эффект локализации также описывается при помощи

«быстрой» переменной η (см. далее определение (14), (19)), однако возникающую в п. 2 предельную задачу следует считать многомерным аналогом уравнения Эйри: в случае $n = 2$, $h = h_0$ она принимает вид

$$-\partial_\eta^2 w(\eta) + Ah_0|\eta|w(\eta) = \mu w(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где $A = 2\pi^2 H_0^{-3}$. Уравнение (10) обладает дискретным спектром, а его собственные функции исчезают на бесконечности со скоростью $O(e^{-A^{1/2}|\eta|^{3/2}})$ (см., например, [8]). Далее в п. 2 выводится похожее на (10), но с множителем $A|\eta|h(\varphi)$ предельное дифференциальное уравнение в частных производных на $\mathbb{R}^{n-1} \ni \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$, исследуется его спектр (дискретный) и проверяется свойство экспоненциального затухания собственных функций на бесконечности (лемма 1). При помощи аналогичных технических приемов в п. 3 (лемма 2) выводятся весовые (с экспоненциально большими вне окрестности точки y^0 множителями) оценки собственных функций исходной задачи (4) (или (3) в дифференциальном форме). Эти оценки позволяют далее обосновать асимптотику, построенную формально в п. 2: сначала в п. 4 получен первичный результат о сходимости (теорема 3), а затем в п. 5 установлена окончательная оценка остатка (теорема 5).

В п. 6 перечисляются возможные, в значительной степени очевидные, обобщения, связанные с изменением краевого условия на одном из оснований $\Sigma_\pm^\varepsilon$ или на боковой поверхности Σ_0^ε тонкой «пластины» (1),

$$\Sigma_\pm^\varepsilon = \{x : y \in \omega,\ z = \pm\varepsilon H_\pm(y)\}, \quad \Sigma_0^\varepsilon = \{x : y \in \partial\omega,\ -\varepsilon H_-(y) < z < \varepsilon H_+(y)\}. \tag{11}$$

Кроме того, реализуется идея [4] о раскрытии лакун в спектре задачи Дирихле для оператора Лапласа на периодическом слое

$$\Pi^\varepsilon = \{x : y \in \mathbb{R}^{n-1},\ -\varepsilon H_-(y) < z < \varepsilon H_+(y)\}; \tag{12}$$

здесь $H_\pm$ — непрерывные кусочно линейные функции, периодические (с периодами $l_q > 0$ по переменным y_q) и удовлетворяющие условиям (2), (7)–(9) в случае

$$\omega = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 < y_q < l_q,\ q = 1, \ldots, n-1\}. \tag{13}$$

Отметим, что методы исследования из [4, 5] и [6, 7] требуют гладкости профильных функций, так что в двумерном случае $n = 2$ результат настоящей работы также новый.

В завершение сформулированы несколько вопросов, которые автор вынужден оставить без ответов.

2. Формальный асимптотический анализ и спектр предельной задачи. Для описания явления пограничного слоя вблизи точки $x^0 = (y^0, 0)$ введем растянутые координаты

$$\eta = \varepsilon^{-\gamma}(y - y^0) \tag{14}$$

с некоторым показателем $\gamma > 0$ и примем следующие асимптотические анзацы:

$$\lambda_m^\varepsilon = \pi^2 H_0^{-2}\varepsilon^{-2} + \mu_m\varepsilon^{-2\gamma} + \ldots, \tag{15}$$

$$u_m^\varepsilon(x) = \alpha_m(\varepsilon)\sin\left(\pi\frac{z + \varepsilon H_-(y)}{\varepsilon H(y)}\right)w_m(\eta) + \ldots. \tag{16}$$

Многоточие заменяет младшие асимптотические члены, несущественные для предпринимаемого анализа, а $\alpha_m(\varepsilon)$ — некоторый нормирующий коэффициент. Далее для краткости не пишем индекс m у собственных чисел и функций, а множитель $\sin(\dots)$ из (16) обозначаем через $S_\varepsilon(y,z)$. Подставим разложения (15) и (16) в задачу (3) и произведем формальное (без учета гладкости функций $H_\pm$) дифференцирование. Имеем

$$\Delta_x u^\varepsilon(x)+\lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x)=\alpha_m(\varepsilon)S_\varepsilon(y,z)\Big(-\frac{\pi^2}{\varepsilon^2H(y)^2}w(\eta)+\varepsilon^{2\gamma}\Delta_\eta w(\eta) \\ +\frac{\pi^2}{\varepsilon^2H_0^2}w(\eta)+\varepsilon^{2\gamma}\mu w(\eta)\Big)+\dots. \quad (17)$$

Благодаря требованию (8) в окрестности $\mathscr{V}\ni y^0$ верна формула

$$\frac{1}{H(y)^2}-\frac{1}{H_0^2}=\frac{1-(1-rH_0^{-1}h(\varphi))^2}{H_0^2+\dots}=\frac{2}{H_0^3}rh(\varphi)+\dots=\frac{2\varepsilon^\gamma}{H_0^3}|\eta|h(\varphi)+\dots. \quad (18)$$

Таким образом, в правой части (17) заведомо исчезает слагаемое $O(\varepsilon^{-2})$, но при условии

$$\varepsilon^{-2}\varepsilon^\gamma=\varepsilon^{-2\gamma}\quad\Rightarrow\quad\gamma=2/3 \quad (19)$$

обращается в нуль и слагаемое $O(\varepsilon^{-4/3})$, если только выполнено дифференциальное уравнение

$$-\Delta_\eta w(\eta)+a(\eta)w(\eta)=\mu w(\eta),\quad \eta\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad (20)$$

где μ — новый спектральный параметр, пришедший из анзаца (15), $\rho=|\eta|$, и в силу соотношений (18), (8)

$$a(\eta)=2\pi^2H_0^{-3}\rho h(\varphi)\ge c_a\rho,\quad c_a>0. \quad (21)$$

Объявим (20) предельной задачей и исследуем ее спектр.

После умножения уравнения (20) на пробную функцию $v\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, бесконечно дифференцируемую и имеющую компактный носитель, и интегрирования по частям приходим к вариационной формулировке предельной задачи

$$\langle w,v\rangle:=(\nabla_\eta w,\nabla_\eta v)+(aw,v)=\mu(w,v)\quad\forall v\in\mathscr{H}, \quad (22)$$

при этом $(\,,\,)=(\,,\,)_{\mathbb{R}^{n-1}}$, а $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, которое получено пополнением линейного множества $C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ по норме, порожденной скалярным произведением $\langle\,,\,\rangle$. В силу соотношения (21) находим, что

$$\langle w,v\rangle\ge c_{\mathscr{H}}(\|\nabla_\eta w\|^2+\|(1+\rho)^{1/2}w\|^2),\quad c_{\mathscr{H}}>0, \quad (23)$$

здесь и далее $\|W\|=\|W;L_2(\mathbb{R}^{n-1})\|$. Таким образом, пространство $\mathscr{H}$ состоит из тех функций $w\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n-1})$, для которых конечны нормы, указанные в правой части (23). Вложение $\mathscr{H}\subset L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ компактно: его оператор можно представить как сумму компактного — на шаре $\mathbb{B}_R^{n-1}=\{\eta:|\eta|<R\}$ — и малого — на внешности шара, поскольку

$$\big\|w;L_2\big(\mathbb{R}^{n-1}\setminus\mathbb{B}_R^{n-1}\big)\big\|^2\le c_a^{-1}R^{-1}(aw,w)\le c_a^{-1}R^{-1}\|w;\mathscr{H}\|^2.$$

В итоге по теоремам 10.1.5 и 10.2.2 из [7] спектр задачи (22) оказывается дискретным и образует неограниченную последовательность собственных чисел:

$$0<\mu_1<\mu_2\le\mu_3\le\dots\le\mu_j\le\dots\to+\infty, \quad (24)$$

составленную при учете кратностей. Как обычно, первое собственное число простое, а соответствующую собственную функцию w_1 можно взять положительной. Она и другие собственные функции допускают следующие условия ортогональности и нормировки:

$$(w_j,w_k)=\delta_{j,k},\quad j,k\in\mathbb{N}. \quad (25)$$

Лемма 1. *При некотором $\delta > 0$ и любом $j \in \mathbb{N}$ верны весовые оценки*

$$\|E_\delta \nabla_\eta w_j\| + \|(1+\rho)^{1/2} E_\delta w_j\| \le C_j(\delta), \tag{26}$$

в которых $E_\delta(\eta) = e^{\delta(1+\rho^2)^{3/4}}$, а $C_j(\delta)$ — величина, зависящая только от μ_j и δ.

Доказательство. Введем непрерывную ограниченную весовую функцию

$$E^t_\delta(\eta) = \begin{cases} E_\delta(\rho) & \text{при } \rho \le t, \\ E_\delta(t) & \text{при } \rho \ge t, \end{cases} \tag{27}$$

где $t > 0$ — параметр, который будет устремлен к бесконечности. Заметим, что

$$E^t_\delta(\eta) \le E_\delta(t) = \mathrm{const}, \quad \bigl|\nabla_\eta E^t_\delta(\rho)\bigr| \le \frac{3}{2}\,\delta\sqrt{\rho} E^t_\delta(\rho).$$

Поэтому, в частности, функция $v = E^t_\delta W_j$, где $W_j = E^t_\delta w_j$, по-прежнему принадлежит пространству $\mathscr{H}$. Подставив ее в качестве пробной функции в интегральное тождество (20) для спектральной пары $\{\mu_j, w_j\}$, находим

$$\begin{aligned} \mu_j\|W_j\|^2 &= \bigl(\nabla_\eta w_j, \nabla_\eta\bigl(E^t_\delta W_j\bigr)\bigr) + (aW_j, W_j) = \bigl(E^t_\delta \nabla_\eta w_j, \nabla_\eta W_j\bigr) \\ &+ \bigl(E^t_\delta \nabla_\eta w_j, W_j\bigl(E^t_\delta\bigr)^{-1}\nabla_\eta E^t_\delta\bigr) + (aW_j, W_j) = \|\nabla_\eta W_j\|^2 - \bigl(W_j\bigl(E^t_\delta\bigr)^{-1}\nabla_\eta E^t_\delta, \nabla_\eta W_j\bigr) \\ &+ \bigl(\nabla_\eta W_j, W_j\bigl(E^t_\delta\bigr)^{-1}\nabla_\eta E^t_\delta\bigr) - \bigl\|W_j\bigl(E^t_\delta\bigr)^{-1}\nabla_\eta E^t_\delta\bigr\|^2 + (aW_j, W_j). \end{aligned} \tag{28}$$

Подчеркнем, что все интегралы сходятся абсолютно, а второе и третье слагаемые в правой части взаимно уничтожаются. Теперь, используя оценки (21), (23) и условие нормировки (25), при помощи несложных преобразований обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} E^t_\delta(R)^2\mu_j &\ge \mu_j\bigl\|W_j; L_2\bigl(\mathbb{B}^{n-1}_R\bigr)\bigr\|^2 \\ &= \|\nabla_\eta W_j\|^2 - \bigl\|W_j\bigl(E^t_\delta\bigr)^{-1}\nabla_\eta E^t_\delta\bigr\|^2 + (aW_j, W_j) - \mu_j\bigl\|W_j; L_2\bigl(\mathbb{R}^{n-1}\setminus\mathbb{B}^{n-1}_R\bigr)\bigr\|^2 \\ &\ge \langle W_j, W_j\rangle - \frac{9}{4}\delta^2\|\sqrt{\rho}\,W_j\|^2 - \mu_j\bigl\|W_j; L_2\bigl(\mathbb{R}^{n-1}\setminus\mathbb{B}^{n-1}_R\bigr)\bigr\|^2 \\ &\ge \langle W_j, W_j\rangle - c_a^{-1}\left(\frac{9}{4}\delta^2 + \frac{\mu_j}{R}\right)(aW_j, W_j) \ge \left(1 - c_a^{-1}\left(\frac{9}{4}\delta^2 + \frac{\mu_j}{R}\right)\right)\|W_j; \mathscr{H}\|^2. \end{aligned}$$

Фиксируя малый показатель δ и большой радиус R, приходим к неравенству

$$\bigl\|E^t_\delta \nabla_\eta w_j\bigr\|^2 + \bigl\|(1+\rho)^{1/2} E^t_\delta w_j\bigr\|^2 \le c\|W_j; \mathscr{H}\|^2 \le C_j. \tag{29}$$

Левая часть (29) равномерно ограничена и монотонно возрастает при $t \to +\infty$, а значит, в силу определения (27) предельный переход переделывает формулу (29) в нужное неравенство (26). □

Поскольку функции $E_\delta a w_j$, $\mu_j E_\delta w_j$ попадают в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$, при помощи локальных оценок решений уравнений Пуассона нетрудно убедиться в том, что $E_{\delta/2} w_j \in H^2(\mathbb{R}^{n-1})$.

3. Весовая оценка собственных функций. Проверка очередного утверждения опирается на тот же прием (28), что и в доказательстве леммы 1.

Лемма 2. *Пусть*

$$0 \le \delta < \frac{2}{3}\pi H_0^{-3/2} h_0^{1/2} \tag{30}$$

и при некотором $j \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство*

$$\lambda_j^\varepsilon \le \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} + \Lambda_j \varepsilon^{-4/3}, \tag{31}$$

где $\Lambda_j > 0$ *— некоторое число. Тогда найдутся такие положительные* $\varepsilon_j(\delta)$ *и* $c_j(\delta)$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j(\delta)]$ *собственная функция* u_j^ε, *нормированная равенством* (6), *удовлетворяет соотношению*

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \mathscr{E}_\delta(y)^2 \big(\varepsilon^{4/3} \big|\nabla_y u_j^\varepsilon(x)\big|^2 + (1 + \varepsilon^{-2/3}|y - y^0|) \big|u_j^\varepsilon(x)\big|^2\big)\, dx \le c_j(\delta), \tag{32}$$

где $\mathscr{E}_\delta$ *— весовая функция,*

$$\mathscr{E}_\delta(y) = \begin{cases} e^{\delta r^{3/2}/\varepsilon} & \text{при } r \le R, \\ e^{\delta R^{3/2}/\varepsilon} & \text{при } r \ge R, \end{cases} \tag{33}$$

а $R > 0$ *— подходящий радиус.*

Доказательство. Подставим пробную функцию $v^\varepsilon = \mathscr{E}_\delta U_j^\varepsilon = \mathscr{E}_\delta^2 u_j^\varepsilon$ в тождество (4) и не будем далее писать индекс j. Повторив с незначительными изменениями выкладку (28), получаем, что

$$\lambda^\varepsilon \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = \|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \big\|U^\varepsilon \mathscr{E}_\delta^{-1} \nabla_y \mathscr{E}_\delta; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|^2. \tag{34}$$

В силу определения (33) имеем

$$|\nabla_y \mathscr{E}_\delta(y)| \le \frac{3}{2} \begin{cases} \delta \varepsilon^{-1} r^{1/2} \mathscr{E}_\delta(y), & x \in \Omega_R^\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega^\varepsilon \setminus \Omega_R^\varepsilon, \end{cases} \tag{35}$$

где $\Omega_R^\varepsilon = \big\{x \in \Omega^\varepsilon : y \in \mathbb{B}_R^{n-1}(y^0)\big\}$ и $\mathbb{B}_R^{n-1}(y^0) = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y - y^0| < R\}$. При учете требований (2) и (7), (8) зафиксируем R так, чтобы выполнялось формула

$$\frac{\pi^2}{H(y)^2} - \frac{\pi^2}{H_0^2} \ge \begin{cases} (t + 9\delta^2/4) r & \text{при } y \in \mathbb{B}_R^{n-1}(y^0), \\ T & \text{при } y \in \omega \setminus \mathbb{B}_R^{n-1}(y^0) \end{cases} \tag{36}$$

с некоторыми положительными t и T (напоминаем про принятые условия (9), (30) и проделанное преобразование (18) — именно они обеспечивают возможность добиться выполнения соотношений (36)). Неравенство Фридрихса

$$\int\limits_{-\varepsilon H_-(y)}^{\varepsilon H_+(y)} |\partial_z U^\varepsilon(y,z)|^2\, dz \ge \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H(y)^2} \int\limits_{-\varepsilon H_-(y)}^{\varepsilon H_+(y)} |U^\varepsilon(y,z)|^2\, dz, \tag{37}$$

проинтегрированное по $y \in \omega$, показывает, что

$$\|\partial_z U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \ge \pi^2 \varepsilon^{-2} \|H^{-1} U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \ge \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2. \tag{38}$$

В результате, принимая во внимание предположение (31), превращаем формулу (34) в цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-4/3} \Lambda \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 &\ge \|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \big\|U^\varepsilon \mathscr{E}_\delta^{-1} \nabla_y \mathscr{E}_\delta; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|^2 \\ &\quad - \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \ge \|\nabla_y U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\Omega_R^\varepsilon} \left(\frac{\pi^2}{H(y)^2} - \frac{\pi^2}{H_0^2} - \frac{9}{4}\delta^2 r\right) |U^\varepsilon(x)|^2\, dx + \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \int\limits_{\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_R^\varepsilon} \left(\frac{1}{H(y)^2} - \frac{1}{H_0^2}\right) |U^\varepsilon(x)|^2\, dx \\ &\ge \|\nabla_y U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^{-2} t \big\|r^{1/2} U^\varepsilon; L_2\big(\Omega_R^\varepsilon\big)\big\| + \varepsilon^{-2} T \big\|U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_R^\varepsilon\big)\big\|^2. \end{aligned} \tag{39}$$

Заметим, что $2\Lambda \le \varepsilon^{-2/3}T$ при малом $\varepsilon > 0$ и

$$2\Lambda \le t\varepsilon^{-2/3}r \text{ при } r \ge \varepsilon^{2/3}\varrho := \varepsilon^{2/3}2\Lambda t^{-1}, \quad e^{\delta\varepsilon^{-1}r^{3/2}} \le C_\delta := e^{\delta\varrho^{3/2}} \text{ при } r \le \varepsilon^{2/3}\varrho.$$

Поскольку $\|u^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\| = 1$, выводим из цепочки (39) (без средней ее части), что

$$\begin{aligned} C_\delta^2\varepsilon^{-4/3}\Lambda &\ge \varepsilon^{-4/3}\big\|U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon_{\varepsilon^{2/3}\varrho}\big)\big\|^2 \ge \|\nabla_y U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \\ &\quad + \varepsilon^{-2}t\big\|r^{1/2}U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon_R\big)\big\|^2 - \varepsilon^{-4/3}\Lambda\big\|U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon_R \setminus \Omega^\varepsilon_{\varepsilon^{2/3}\varrho}\big)\big\|^2 \\ &\quad + \varepsilon^{-2}T\big\|U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega^\varepsilon_R\big)\big\|^2 - \varepsilon^{-4/3}\Lambda\big\|U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega^\varepsilon_R\big)\big\|^2 \\ &\ge \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}t\big\|r^{1/2}U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon_R\big)\big\|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}T\big\|U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega^\varepsilon_R\big)\big\|^2 \ge \varepsilon^{-2}\tau\|r^{1/2}U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2, \end{aligned} \tag{40}$$

здесь τ — некоторое положительное число. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\|\mathscr{E}_\delta u^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = \big\|\mathscr{E}_\delta u^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon_{\varepsilon^{2/3}\varrho}\big)\big\|^2 + \big\|\mathscr{E}_\delta u^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega^\varepsilon_{\varepsilon^{2/3}\varrho}\big)\big\|^2 \\ &\le C_\delta^2\|u^\varepsilon; L_2(\Omega^2(\varrho))\|^2 + \varepsilon^{-2/3}\varrho^{-1}\big\|r^{1/2}U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega^\varepsilon_{\varepsilon^{2/3}\varrho}\big)\big\|^2 \le C_\delta^2 + C_\delta^2\Lambda\tau^{-1}\varrho^{-1}. \end{aligned} \tag{41}$$

Благодаря неравенству (35) выполнено соотношение

$$\|\mathscr{E}_\delta\nabla_y u^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\| \le 2\|\nabla_y U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + c\varepsilon^{-2}\|r^{1/2}U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2.$$

Осталось обработать его правую часть при помощи оценок (39)–(41). $\square$

Поскольку весовая функция экспоненциально возрастает при удалении от точки y^0, неравенство (32) устанавливает экспоненциальную малость собственной функции u_j^ε вне всякой фиксированной окрестности точки максимума толщины H.

4. Теорема о сходимости. В п. 5 будет показано, что соотношение (31) с некоторой величиной $\Lambda_j > 0$ верно при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j]$, здесь $\varepsilon_j > 0$. Для собственной функции u_j^ε задачи (4) положим

$$\overline{u_j^\varepsilon}(y) = \frac{2}{\varepsilon H(y)} \int\limits_{\Upsilon^\varepsilon(y)} S_\varepsilon(y,z)u_j^\varepsilon(y,z)\,dz, \quad y \in \mathscr{V}, \tag{42}$$

где S_ε — множитель $\sin(\dots)$ из анзаца (16), причем

$$S_\varepsilon(y,z) > 0 \ \text{ при } z \in \Upsilon^\varepsilon(y) = (-\varepsilon H_-(y), \varepsilon H_+(y)), \quad 2\|S_\varepsilon; L_2(\Upsilon^\varepsilon(y))\|^2 = \varepsilon H(y). \tag{43}$$

Благодаря оценке (32) имеем

$$\begin{aligned} &\int\limits_\omega \mathscr{E}_\delta(y)^2 r\big|\overline{u_j^\varepsilon}(y)\big|^2\,dy \\ &\qquad \le \frac{4}{\varepsilon^2}\int\limits_\omega \mathscr{E}_\delta(y)^2\frac{r}{H(y)^2}\int\limits_{\Upsilon^\varepsilon(y)} S_\varepsilon(y,z)^2\,dz \int\limits_{\Upsilon^\varepsilon(y)} \big|u_j^\varepsilon(y,z)\big|^2\,dzdy \\ &\qquad\qquad \le \frac{c}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \mathscr{E}_\delta(y)^2 r\big|u_j^\varepsilon(x)\big|^2\,dx \le \frac{c_j}{\varepsilon^{1/3}}. \end{aligned} \tag{44}$$

Дифференцируя равенство (42) при учете краевых условий $u_j^\varepsilon(y, \pm\varepsilon H_\pm(y)) = 0$, находим

$$\nabla_y \overline{u_j^\varepsilon}(y) = \overline{\nabla_y u_j^\varepsilon}(y) - H(y)^{-1}\nabla_y H(y)\overline{u_j^\varepsilon}(y) + \mathscr{U}_j^\varepsilon(y,z),$$
$$\mathscr{U}_j^\varepsilon(y) = \frac{2\pi}{\varepsilon H(y)^3}\int\limits_{\Upsilon^\varepsilon(y)} \left(H(y)\nabla_y H_-(y) - \left(\frac{z}{\varepsilon} + H_-(y)\right)\nabla_y H(y)\right) C_\varepsilon(y,z)u_j^\varepsilon(y,z)\,dz. \tag{45}$$

Здесь $C_\varepsilon(y,z)$ — выражение $S_\varepsilon(y,z)$ с cos на месте sin. Применив лемму 2, получим формулы

$$\int\limits_\omega \mathscr{E}_\delta(y)^2\left|\overline{\nabla_y u_j^\varepsilon}(y)\right|^2 dy \le c\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \mathscr{E}_\delta(y)^2\left|\nabla_y u_j^\varepsilon(x)\right|^2 dx \le c_j\varepsilon^{-7/3},$$
$$\int\limits_\omega \mathscr{E}_\delta(y)^2\left(\frac{|\nabla_y H(y)|^2}{H(y)^2}\left|\overline{u_j^\varepsilon}(y)\right|^2 + \left|\mathscr{U}_j^\varepsilon(y)\right|^2\right) dy \le c\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \mathscr{E}_\delta(y)^2\left|u_j^\varepsilon(x)\right|^2 dx \le \frac{c_j}{\varepsilon}. \tag{46}$$

Введем на всем пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ функцию

$$\overline{w_j^\varepsilon}(y) = \varepsilon^{\frac{1}{3}(n-1)+\frac{1}{2}}\beta_j(\varepsilon)\chi(y^0 + \varepsilon^{2/3}\eta)\overline{u_j^\varepsilon}(y^0 + \varepsilon^{2/3}\eta), \tag{47}$$

где $\beta_j(\varepsilon)$ — нормирующий множитель, подлежащий определению, но заранее подчиненный условию

$$0 < \beta_j^- \le \beta_j(\varepsilon) \le \beta_j^+, \tag{48}$$

а $\chi \in C_c^\infty(\mathscr{V})$ — срезка, равная единице в окрестности точки y^0. В силу проведенных оценок имеем

$$\left\|\overline{w}_j^\varepsilon; \mathscr{H}\right\|^2 = \varepsilon^{\frac{2}{3}(n-1)+1}\int\limits_{\mathscr{V}} \left(\varepsilon^{4/3}\left|\nabla_y\left(\chi(y)\overline{u_j^\varepsilon}(y)\right)\right|^2 + \varepsilon^{-2/3}r\left|\chi(y)\overline{u_j^\varepsilon}(y)\right|^2\right) dy\varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)}$$
$$\le c\int\limits_{\mathscr{V}} \left(\varepsilon^{7/3}\left|\nabla_y\overline{u_j^\varepsilon}(y)\right|^2 + \varepsilon^{1/3}r\left|\overline{u_j^\varepsilon}(y)\right|^2\right) dy \le c_j. \tag{49}$$

Таким образом, согласно неравенствам (31) и (49) найдется бесконечно малая положительная последовательность $\{\varepsilon_p\}$, вдоль которой имеют место сходимости

$$\mu_j^\varepsilon := \varepsilon^{4/3}\left(\lambda_j^\varepsilon - \pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2}\right) \to \bar{\mu}_j^0, \tag{50}$$
$$\overline{w}_j^\varepsilon \to \overline{w}_j^0 \quad \text{слабо в } \mathscr{H} \text{ и сильно в } L_2(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{51}$$

Далее в п. 5 будет проверено, что за счет нормирующего множителя (48) можно соблюсти требование $\left\|\overline{w}_j^\varepsilon; \mathscr{H}\right\| = 1$. Таким образом, $\left\|\overline{w}_j^0; \mathscr{H}\right\| = 1$ в силу последней (сильной) сходимости. Ближайшая цель — убедиться в том, что $\left\{\bar{\mu}_j^0, \overline{w}_j^0\right\}$ — собственная пара предельной задачи (22).

Сначала получим вспомогательную оценку для разности

$$u_j^{\varepsilon\perp}(y,z) = u_j^\varepsilon(y,z) - S_\varepsilon(y,z)\overline{u_j^\varepsilon}(y), \qquad \int\limits_{\Upsilon^\varepsilon(y)} S_\varepsilon(y,z)u_j^{\varepsilon\perp}(y,z)\,dz = 0. \tag{52}$$

Последнее условие ортогональности, вытекающее из самого определения и второго соотношения (43), обеспечивает неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_{-\varepsilon H_-(y)}^{\varepsilon H_+(y)} \left|\frac{\partial u_j^{\varepsilon\perp}}{\partial z}(y,z)\right|^2 dz \le \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2 H(y)^2}\int\limits_{-\varepsilon H_-(y)}^{\varepsilon H_+(y)} \left|u_j^{\varepsilon\perp}(y,z)\right|^2 dz,$$

которое влечет за собой оценку

$$4\pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2}\bigl\|u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2\le 4\pi^2\varepsilon^{-2}\bigl\|H^{-1}u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2\le\bigl\|\partial_z u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2$$

(ср. формулы (37), (38)). Подчеркнем, что $4\pi^2\varepsilon^{-2}H(y)^{-2}$ — второе собственное число задачи Дирихле на отрезке $\Upsilon^\varepsilon(y)$, причем S_ε — собственная функция, отвечающая первому собственному числу $\pi^2\varepsilon^{-2}H(y)^{-2}$. Обработаем правую часть соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_j^\varepsilon=\lambda_j^\varepsilon\bigl\|u_j^\varepsilon;L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2&=\bigl\|\nabla_x u_j^\varepsilon;L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2\\&=\bigl\|\nabla_y u_j^\varepsilon;L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2+\bigl\|\partial_z\bigl(u_j^{\varepsilon\perp}+\overline{u_j^\varepsilon}S_\varepsilon\bigr);L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2\\&=\bigl\|\nabla_y u_j^\varepsilon;L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2+\bigl\|\partial_z u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2+\bigl\|\overline{u_j^\varepsilon}S_\varepsilon;L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2+2I^\varepsilon.\end{aligned}$$

В силу оценки (32) с показателем $\delta=0$ имеем $\bigl\|\nabla_y u_j^\varepsilon;L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2\le c_j\varepsilon^{-4/3}$. Кроме того,

$$\begin{aligned}I^\varepsilon:=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\overline{u_j^\varepsilon}(y)\partial_z S_\varepsilon(x)\partial_z u_j^{\varepsilon\perp}(x)\,dx&=-\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\overline{u_j^\varepsilon}(y)u_j^{\varepsilon\perp}(x)\partial_z^2 S_\varepsilon(x)\,dx\\&=\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\frac{1}{H(y)^2}\overline{u_j^\varepsilon}(y)u_j^{\varepsilon\perp}(y,z)S_\varepsilon(y,z)\,dydz\\&=\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Bigl(\frac{1}{H(y)^2}-\frac{1}{H_0^2}\Bigr)\overline{u_j^\varepsilon}(y)u_j^{\varepsilon\perp}(y,z)S_\varepsilon(y,z)\,dydz,\end{aligned}$$

$$|I^\varepsilon|\le c\varepsilon^{-2}\bigl\|r\overline{u_j^\varepsilon};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|\bigl\|u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|\le c_j\varepsilon^{-5/3}\bigl\|u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|.$$

Пояснение: сначала учли, что функция $z\mapsto S_\varepsilon(y,z)$ гладкая (хотя у $\nabla_y S_\varepsilon(y,z)$ разрывы есть), затем приписали вычитаемое H_0^{-2}, исходя из условия ортогональности (52), и, наконец, опять применили оценку (32) с $\delta=0$. Заметим, что та же оценка обеспечивает формулы

$$\begin{aligned}\bigl\|\overline{u_j^\varepsilon}\partial_z S_\varepsilon;L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2&=\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{\omega}\frac{1}{H(y)^2}\bigl|\overline{u_j^\varepsilon}(y)\bigr|^2\int\limits_{\Upsilon^\varepsilon(y)}C_\varepsilon(y,z)^2\,dzdy\\&=\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{\omega}\frac{1}{H(y)^2}\bigl|\overline{u_j^\varepsilon}(y)\bigr|^2\int\limits_{\Upsilon^\varepsilon(y)}S_\varepsilon(y,z)^2\,dzdy=\frac{\pi^2}{\varepsilon^2H_0^2}\bigl\|S_\varepsilon\overline{u_j^\varepsilon};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2+J^\varepsilon,\end{aligned}$$

$$|J^\varepsilon|=\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}\Bigl|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Bigl(\frac{1}{H(y)^2}-\frac{1}{H_0^2}\Bigr)S_\varepsilon(x)^2\bigl|\overline{u_j^\varepsilon}(x)\bigr|^2\,dx\Bigr|\le\frac{c}{\varepsilon^2}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}r\bigl|\overline{u_j^\varepsilon}(x)\bigr|^2\,dx\le\frac{c}{\varepsilon^{4/3}}.$$

Собирая приведенные неравенства, имеем

$$\begin{aligned}\frac{3\pi^2}{\varepsilon^2H_0^2}\bigl\|u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2&\le\bigl\|\partial_z u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2-\frac{\pi^2}{\varepsilon^2H_0^2}\bigl\|u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2\\&\le\lambda_j^\varepsilon-\frac{\pi^2}{\varepsilon^2H_0^2}\bigl(\bigl\|S_\varepsilon\overline{u_j^\varepsilon};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2+\bigl\|u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2\bigr)-2I^\varepsilon-J^\varepsilon.\end{aligned}$$

При этом

$$\bigl\|S_\varepsilon\overline{u_j^\varepsilon};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2+\bigl\|u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2=\bigl\|u_j^\varepsilon;L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2=1\tag{53}$$

в силу соотношений (6) и (52), а значит, при учете (31) обнаруживаем, что

$$\bigl\|u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2\le c_j\varepsilon^2\varepsilon^{-4/3}=c_j\varepsilon^{2/3}. \tag{54}$$

При помощи формул (8), (44) и (53), (32), (33) выводим, что

$$\Bigl|\bigl\|S_\varepsilon\overline{u_j^\varepsilon};L^2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2-\varepsilon\frac{H_0}{2}\int\limits_\omega\bigl|\overline{u_j^\varepsilon}(y)\bigr|^2\,dy\Bigr|=\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\omega rh(\varphi)\bigl|\overline{u_j^\varepsilon}(y)\bigr|^2\,dy$$

$$\le c\varepsilon\bigl\|r^{1/2}\overline{u}_j^\varepsilon;L_2(\omega)\bigr\|^2\le c\varepsilon^{3/2},$$

$$\varepsilon\frac{H_0}{2}\bigl\|\overline{u_j^\varepsilon};L_2(\omega)\bigr\|^2\ge1-\bigl\|u_j^{\varepsilon\perp};L_2(\Omega^\varepsilon)\bigr\|^2-c_j\varepsilon^{2/3}\ge1-C_j\varepsilon^{2/3},$$

$$\bigl\|(1-\chi^2)^{1/2}\overline{u_j^\varepsilon};L_2(\omega)\bigr\|^2\le ce^{-\delta R^{3/2}/\varepsilon}\bigl\|\overline{u_j^\varepsilon};L_2(\omega)\bigr\|^2\le C\varepsilon^{-1}e^{-\delta R^{3/2}/\varepsilon}.$$

Следовательно, верно соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\bigl|\overline{w}_j^\varepsilon(\eta)\bigr|^2\,d\eta=\varepsilon\int\limits_\omega\chi(y)^2\bigl|\overline{u_j^\varepsilon}(y)\bigr|^2\,dy=\frac{2}{H_0}+O(\varepsilon^{2/3}),$$

которое гарантирует выполнение условий (48) для нормирующего множителя $\beta_j(\varepsilon)$ в определении (47).

Подставим в интегральное тождество (4) для спектральной пары $\{\lambda_j^\varepsilon,u_j^\varepsilon\}$ специально подобранную пробную функцию

$$v^\varepsilon(x)=\beta_j(\varepsilon)\varepsilon^{-\frac{n}{3}+\frac{7}{6}}(2H_0)^{-1}\chi(y)V(\varepsilon^{-2/3}(y-y^0))S_\varepsilon(y,z),\quad V\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}), \tag{55}$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon=\varepsilon_p\to+0$ с целью вывести равенство

$$\bar\mu_j^0\bigl(\overline{w}_j^0,V\bigr)-\bigl(a\overline{w}_j^0,V\bigr)=\bigl(\nabla_\eta\overline{w}_j^0,\nabla_\eta V\bigr), \tag{56}$$

которое как раз и означает, что $\bar\mu_j^0$ — собственное число, а $\overline{w}_j^0$ — соответствующая собственная функция предельной задачи (22) (напоминаем, что предел (51) нормирован в пространстве Лебега $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$). Для обработки интегрального тождества

$$\lambda_j^\varepsilon\bigl(u_j^\varepsilon,v^\varepsilon\bigr)_{\Omega^\varepsilon}-\bigl(\partial_zu_j^\varepsilon,\partial_zv^\varepsilon\bigr)_{\Omega^\varepsilon}=\bigl(\nabla_yu_j^\varepsilon,\nabla_yv^\varepsilon\bigr)_{\Omega^\varepsilon} \tag{57}$$

будем использовать полученные ранее оценки, в частности весовую (32). Благодаря присутствию в ней экспоненциального множителя (33), удовлетворяющего соотношениям

$$\sup_{y\in\omega}(r^k\mathscr{O}_\delta(y)^{-1})\le c_k\varepsilon^{2k/3},\ k>0,\quad \sup_{y\in\omega}|\mathscr{O}_\delta(y)^{-1}\nabla_y\chi(y)|\le c_\omega\varepsilon^{-\delta_\omega/\varepsilon} \tag{58}$$

с положительными c_k и c_ω,δ_ω (в последнем случае заметили, что носитель функции $|\nabla_y\chi|$ отделен от точки y^0), будет нетрудно перенести множители χ и S_ε от V (см. определение (55)) к u_j^ε и сформировать выражение (47) (см. также определение (42)).

Начнем с рассмотрения более простой, но вполне представительной левой части (57). Она равна

$$\lambda_j^\varepsilon\frac{\beta_j^\varepsilon(\varepsilon)}{2H_0}\varepsilon^{-\frac{n}{3}+\frac{7}{6}}\int\limits_\omega V(\eta)\chi(y)\int\limits_{\Upsilon^\varepsilon(y)}S_\varepsilon(y,z)u_j^\varepsilon(y,z)\,dzdy+\bigl(u_j^\varepsilon,\partial_z^2v^\varepsilon\bigr)_{\Omega^\varepsilon}$$

$$=\left(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2H_0^2}+\varepsilon^{-\frac{4}{3}}\mu_j^\varepsilon\right)\varepsilon^{\frac{4}{3}}\varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)}\int\limits_\omega\frac{H(y)}{H_0}V(\eta)\overline{w}_j^\varepsilon(\eta)\,dy$$

$$-\frac{\pi^2}{\varepsilon^2H_0^2}\varepsilon^{\frac{4}{3}}\varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)}\int\limits_\omega\frac{H_0}{H(y)}V(\eta)\overline{w}_j^\varepsilon(\eta)\,dy. \tag{59}$$

В силу соотношений (14), (19) замена $y \mapsto \eta$ переменной интегрирования устраняет множитель $\varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)}$. Вытекающие из равенства (8) формулы

$$\begin{gathered} H_0^{-1}H(y) = 1 - H_0^{-1}rh(\varphi) = 1 - \varepsilon^{2/3}H_0^{-1}|\eta|h(\varphi), \\ H(y)^{-1}H_0 = 1 + H_0^{-1}rh(\varphi) + O(r^2) \end{gathered} \tag{60}$$

приводят к возникновению скалярного произведения $\bigl(a\overline{w_j^\varepsilon}, V\bigr)$ с весовым множителем (21). При этом главные члены с коэффициентом $\pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2}$ взаимно уничтожаются, а член, происходящий от остатка $O(r^2)$ в представлении (60), мажорируется выражением

$$\begin{aligned} c\varepsilon^{-2}\varepsilon^{\frac{4}{3}}\varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)} \int\limits_\omega r^2\bigl|\overline{w_j^\varepsilon}\bigr||V|\,dy &\le c\varepsilon^{-\frac{1}{6}}\bigl\|r^2\chi\overline{u_j^\varepsilon}; L_2(\omega)\bigr\|\varepsilon^{-\frac{1}{3}(n-1)}\|V; L_2(\omega)\| \\ &\le c(V)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\varepsilon\bigl\|r^{1/2}\mathscr{O}_\delta\overline{u_j^\varepsilon}; L_2(\omega)\bigr\| \le c_j(V)\varepsilon^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

и потому оказывается бесконечно малой; здесь приняты во внимание формулы (47), (44), а также первая формула (58) с $k = 3/2$. Итак, пределом суммы (59), т. е. левой части (57), действительно служит левая часть (56).

Если, как планировалось, в скалярном произведении из правой части (57) вынести множители χ и S_ε из-под градиента пробной функции, то возникает новое скалярное произведение

$$\frac{\beta_j(\varepsilon)}{2H_0}\varepsilon^{-\frac{n}{3}+\frac{7}{6}}\bigl(S_\varepsilon\nabla_y u_j^\varepsilon, \chi\nabla_y V\bigr)_{\Omega^\varepsilon} = \beta_j(\varepsilon)\varepsilon^{-\frac{n}{3}+\frac{7}{6}}\varepsilon\int\limits_\omega \frac{H(y)}{H_0}\overline{\nabla_y u_j^\varepsilon}(y)\chi(y)\nabla_y V(\eta)\,dy. \tag{61}$$

Поскольку $\|\nabla_y V; L_2(\omega)\| = \varepsilon^{\frac{1}{3}(n-1)}\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\|\nabla_\eta V; L_2(\mathbb{R}^{n-1})\|$, формула (45) и оценки (46), (58) показывают, что с допустимой погрешностью $O(\varepsilon^{1/6})$ можно совершить следующие действия: заменить функцию $\overline{\nabla_y u_j^\varepsilon}$ функцией $\nabla_y\overline{u_j^\varepsilon}$, занести срезку χ под знак градиента и, наконец, вместо $H_0^{-1}H(y)$ написать единицу. В результате согласно определению (47) выражение (61) после замены $y \mapsto \eta$ и вычисления предела превращается в правую часть (56):

$$\varepsilon^{-\frac{n}{3}+\frac{7}{6}}\varepsilon\varepsilon^{-\frac{1}{3}(n-1)-\frac{1}{2}}\int\limits_\omega \nabla_y\overline{w_j^\varepsilon}(\eta)\nabla_y V(\eta)\,dy = \bigl(\nabla_\eta\overline{w_j^\varepsilon}, \nabla_\eta V\bigr) \to \bigl(\nabla_\eta\overline{w}_j^0, \nabla_\eta V\bigr)$$

при $\varepsilon \to +0$. Осталось отметить, что отброшенные ранее скалярные произведения

$$\frac{\beta_j(\varepsilon)}{2H_0}\varepsilon^{-\frac{n}{3}+\frac{7}{6}}\bigl(\nabla_y u_j^\varepsilon, S_\varepsilon V\nabla_y\chi\bigr)_{\Omega^\varepsilon} \quad \text{и} \quad \frac{\beta_j(\varepsilon)}{2H_0}\varepsilon^{-\frac{n}{3}+\frac{7}{6}}\bigl(\nabla_y u_j^\varepsilon, \chi V\nabla_y S_\varepsilon\bigr)_{\Omega^\varepsilon},$$

по сути уже обрабатывались ранее при помощи весовой оценки (32). Первое из них экспоненциально мало, а второе оказывается бесконечно малым благодаря равномерной ограниченности модуля производных $\nabla_y S_\varepsilon(y, z)$ (ср. формулы (58) и (45)).

Теорема 3. *При любом $j \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение*

$$\varepsilon^{4/3}\bigl(\lambda_j^\varepsilon - \pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2}\bigr) \to \mu_j \quad \textit{при } \varepsilon \to +0,$$

где λ_j^ε и μ_j — соответственные члены последовательностей (5) *и* (24) *собственных чисел исходной* (4) *и предельной* (22) *задач.*

Доказательство сформулированной теоремы о сходимости будет закончено в п. 5: нужно еще проверить априорную оценку (31) для λ_j^ε и убедиться в том, что предел $\bar{\mu}_j^0$ из формулы (50) совпадает с собственным числом μ_j.

5. Обоснование собственных чисел и функций. В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}^\varepsilon = H^1_0(\Omega^\varepsilon)$ введем скалярное произведение

$$\langle u^\varepsilon, v^\varepsilon\rangle_\varepsilon = (\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} + \big(\varepsilon^{-4/3} - \pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2}\big)(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \tag{62}$$

и непрерывный компактный самосопряженный оператор $\mathscr{T}^\varepsilon$,

$$\langle \mathscr{T}^\varepsilon u^\varepsilon, v^\varepsilon\rangle_\varepsilon = (u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}, \quad u^\varepsilon, v^\varepsilon \in \mathscr{H}^\varepsilon. \tag{63}$$

Нужные свойства билинейной формы (62) обеспечены неравенством (38) и требованиями (2), (7). Согласно определениям (63), (62) и интегральному тождеству (4) собственные числа τ_j^ε оператора $\mathscr{T}^\varepsilon$, образующие бесконечно малую положительную последовательность, находятся по формуле

$$\tau_j^\varepsilon = \big(\lambda_j^\varepsilon - \pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2} + \varepsilon^{-4/3}\big)^{-1},$$

где λ_j^ε — члены последовательности (5). Следующее простое утверждение известно как лемма «о почти собственных числах и векторах» (см. обзор [9], а также, например, монографию [10, гл. 6]).

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{u}^\varepsilon \in \mathscr{H}^\varepsilon$ и $\mathfrak{t}^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ таковы, что*

$$\|\mathfrak{u}^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathscr{T}^\varepsilon\mathfrak{u}^\varepsilon - \mathfrak{t}^\varepsilon\mathfrak{u}^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon\| = t \in (0, \mathfrak{t}^\varepsilon).$$

Тогда сегмент $[\mathfrak{t}^\varepsilon - t, \mathfrak{t}^\varepsilon + t]$ содержит собственное число оператора $\mathscr{T}^\varepsilon$. Более того, при каждом $t_* \in (t, \mathfrak{t}^\varepsilon)$ найдутся коэффициенты $a_J^\varepsilon, \dots, a_{J+K-1}^\varepsilon$, для которых верны формулы

$$\left\| \mathfrak{u}^\varepsilon - \sum_{k=J}^{J+K-1} a_k^\varepsilon \mathfrak{U}_k^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon \right\| \le 2\frac{t}{t_*}, \quad \sum_{k=J}^{J+K-1} \big|a_k^\varepsilon\big|^2 = 1,$$

причем $\big\{\tau_J^\varepsilon, \dots, \tau_{J+K-1}^\varepsilon\big\}$ — список всех собственных чисел оператора $\mathscr{T}^\varepsilon$ на сегменте $[\mathfrak{t}^\varepsilon - t_*, \mathfrak{t}^\varepsilon + t_*]$, а собственные векторы $\mathfrak{U}_J^\varepsilon, \dots, \mathfrak{U}_{J+K-1}^\varepsilon$ подчинены условиям ортогональности и нормировки $\big\langle \mathfrak{U}_j^\varepsilon, \mathfrak{U}_k^\varepsilon\big\rangle_\varepsilon = \delta_{j,k}$.

Пусть μ_m — собственное число задачи (22) с кратностью $\varkappa_m$, т. е.

$$\mu_{m-1} < \mu_m = \dots = \mu_{m+\varkappa_m-1} < \mu_{m+\varkappa_m} \tag{64}$$

в последовательности (24). Приближенные решения уравнения $\mathscr{T}^\varepsilon\mathfrak{u}^\varepsilon = \tau^\varepsilon\mathfrak{u}^\varepsilon$ определим формулами

$$\mathfrak{t}_j^\varepsilon = \varepsilon^{4/3}(1+\mu_m)^{-1}, \quad \mathfrak{u}_j^\varepsilon = \big\|\mathfrak{w}_j^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon\big\|^{-1}\mathfrak{w}_j^\varepsilon, \tag{65}$$

$$\mathfrak{w}_j^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\frac{1}{3}n+\frac{1}{2}}\chi(y)w_j(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}(y-y^0))S_\varepsilon(y,z), \quad j = m, \dots, m+\varkappa_m-1, \tag{66}$$

где $w_m, \dots, w_{m+\varkappa_m-1}$ — собственные функции задачи (22).

Вычислим скалярные произведения

$$\big\langle \mathfrak{w}_j^\varepsilon, \mathfrak{w}_j^\varepsilon\big\rangle_\varepsilon = \big(\nabla_y\mathfrak{w}_j^\varepsilon, \nabla_y\mathfrak{w}_k^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} - \big(\partial_z^2\mathfrak{w}_j^\varepsilon, \mathfrak{w}_k^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} - \pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2}\big(\mathfrak{w}_j^\varepsilon, \mathfrak{w}_k^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} + \varepsilon^{-4/3}\big(\mathfrak{w}_j^\varepsilon, \mathfrak{w}_k^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon}. \tag{67}$$

Последнее слагаемое равно

$$\varepsilon^{-\frac{4}{3}}\varepsilon^{-\frac{2}{3}n+1}\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\omega H(y)\chi(y)^2 w_j(\eta)w_k(\eta)\,dy = \frac{H_0}{2}((w_j, w_k) + O(\varepsilon^{3/2})).$$

Порядок остатка обусловлен заменой $y \mapsto \eta$, уничтожающей множитель $\varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)}$ при интеграле слева, а также экспоненциальным затуханием при $\rho = |\eta| \to +\infty$ собственных функций, т. е. леммой 1. Те же доводы вместе с очевидной оценкой $|\nabla_y S_\varepsilon(y,z)| \le c$ (ср. второе подынтегральное выражение (45)) показывают, что

$$\big(\nabla_y \mathfrak{w}_j^\varepsilon, \nabla_y \mathfrak{w}_k^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} = \frac{H_0}{2}((\nabla_\eta w_j, \nabla_\eta w_k) + O(\varepsilon^{3/2})).$$

Наконец, похожие преобразования при учете формулы (18) приводят к соотношению

$$\begin{aligned} &- \big(\partial_z^2 \mathfrak{w}_j^\varepsilon, \mathfrak{w}_k^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} - \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} \big(\mathfrak{w}_j^\varepsilon, \mathfrak{w}_k^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} \\ &\qquad = \varepsilon^{-\frac{2}{3}n+1} \frac{\pi^2}{2\varepsilon} \int\limits_\omega H(y) \bigg(\frac{1}{H(y)^2} - \frac{1}{H_0^2} \bigg) \chi(y)^2 w_j(\eta) w_k(\eta)\, dy \\ &\qquad = \frac{\pi^2}{H_0^2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho h(\varphi) w_j(\eta) w_k(\eta)\, d\eta + O(\varepsilon^{2/3}) = \frac{H_0}{2}(aw, w) + O(\varepsilon^{2/3}). \end{aligned}$$

В итоге интегральное тождество (22) и условия (25) показывают, что

$$\Big| \big\langle \mathfrak{w}_j^\varepsilon, \mathfrak{w}_k^\varepsilon \big\rangle_\varepsilon - \frac{H_0}{2}(1+\mu_m)\delta_{j,k} \Big| \le c_m \varepsilon^{2/3}, \quad j,k = k, m, \dots, m + \varkappa_m - 1. \tag{68}$$

Оценим фигурирующие в лемме 4 величины

$$\begin{aligned} t_j &= \big\| \mathscr{T}^\varepsilon \mathfrak{u}_j^\varepsilon - \mathfrak{t}_j^\varepsilon \mathfrak{u}_j^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon \big\| = \sup \big| \big\langle \mathscr{T}^\varepsilon \mathfrak{u}_j^\varepsilon - \mathfrak{t}_j^\varepsilon \mathfrak{u}_j^\varepsilon, v^\varepsilon \big\rangle_\varepsilon \big| \\ &= \big\| \mathfrak{u}_j^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon \big\|^{-1} \sup \bigg| \big(\mathfrak{w}_j^\varepsilon, v^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{1+\mu_m} \bigg(\big(\nabla_x \mathfrak{w}_j^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} \\ &\quad - \bigg(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} - \varepsilon^{-\frac{4}{3}} \bigg) (\mathfrak{w}^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \bigg) \bigg| = \frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{1+\mu_m} \big\| \mathfrak{u}_j^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon \big\|^{-1} \sup \Big| \big(\nabla_y \mathfrak{w}_j^\varepsilon, \nabla_y v^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} \\ &\qquad - \bigg(\bigg(\partial_z^2 + \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} \bigg) \mathfrak{w}_j^\varepsilon, v^\varepsilon \bigg)_{\Omega^\varepsilon} - \varepsilon^{-\frac{4}{3}} \mu_m \big(\mathfrak{w}_j^\varepsilon, v^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} \Big|. \end{aligned} \tag{69}$$

При этом сначала воспользовались одним из определений нормы, т. е. все супремумы в (69) вычисляются по таким функциям $v^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$, что $\|v^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon\| = 1$, а затем приняли во внимание соотношения (66) и (63). Имеем

$$\varepsilon^{-\frac{4}{3}} (\mathfrak{w}^\varepsilon \varepsilon_j, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \varepsilon^{-\frac{4}{3}} \varepsilon^{-\frac{1}{3}n+\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon}{2} \varepsilon^{-\frac{1}{3}n+\frac{1}{2}} \int\limits_\omega H(y) w_j(\eta) V^\varepsilon(\eta)\, dy,$$

где

$$\begin{gathered} V^\varepsilon(\eta) = \varepsilon^{\frac{1}{3}n-\frac{1}{2}} \chi(y^0 + \varepsilon^{\frac{2}{3}}\eta) \overline{v^\varepsilon}(y^0 + \varepsilon^{\frac{2}{3}}\eta), \\ \|V^\varepsilon; L_2(\mathbb{R}^{n-1})\| \le c\varepsilon^{-\frac{1}{3}} \|\overline{v^\varepsilon}; L_2(\omega)\|^2 \le c\varepsilon^{-\frac{4}{3}} \|v^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \le c \|v^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon\|^2 = c. \end{gathered} \tag{70}$$

Последняя оценка вытекает из формулы (62) для скалярного произведения в пространстве $\mathscr{H}^\varepsilon$ и неравенства Фридрихса (38). Итак,

$$\begin{aligned} \bigg| \varepsilon^{-\frac{4}{3}} (\mathfrak{w}^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - \frac{H_0}{2}(w, V^\varepsilon) \bigg| &\le c\varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)} \bigg| \int\limits_\omega (H(y) - H_0) w_j(\eta) V^\varepsilon(\eta)\, dy \bigg| \\ &\le c\varepsilon^{\frac{2}{3}} \|\rho w_j; L_2(\mathbb{R}^{n-1})\| \, \|V^\varepsilon; L_2(\mathbb{R}^{n-1})\| \le c_j \varepsilon^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \tag{71}$$

Подчеркнем, что L_2-норма произведения ρw_j конечна благодаря экспоненциальному затуханию собственных функций предельной задачи (см. лемму 1). Аналогично получаем равенство

$$-\left(\left(\partial_z^2+\frac{\pi^2}{\varepsilon^2H_0^2}\right)\mathfrak{w}_j^\varepsilon,v^\varepsilon\right)_{\Omega^\varepsilon}=\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}\frac{\varepsilon}{2}\varepsilon^{-\frac{2}{3}n+1}\int\limits_\omega H(y)\left(\frac{1}{H(y)^2}-\frac{1}{H_0^2}\right)w_j(\eta)V^\varepsilon(\eta)\,d\eta$$

и, поскольку $H(y)^{-1}-H_0^{-2}H(y)=2rh(\varphi)+O(r^2)$, также неравенство

$$\begin{aligned}&\left|\left(\left(\partial_z^2+\pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2}\right)\mathfrak{w}_j^\varepsilon,v^\varepsilon\right)_{\Omega^\varepsilon}+(aw_j,V^\varepsilon)\right|\\&\quad\le c\varepsilon^{-\frac{2}{3}n}\int\limits_\omega r^2|w_j(\eta)||V^\varepsilon(\eta)|\,dy\le c\varepsilon^{\frac{2}{3}}\|\rho^2w_j;L_2(\mathbb{R}^{n-1})\|\|V^\varepsilon;L_2(\mathbb{R}^{n-1})\|\le c_j\varepsilon^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}\tag{72}$$

Наконец, соотношение

$$\left|\left(\nabla_y\mathfrak{w}_j^\varepsilon,\nabla_yv^\varepsilon\right)_{\Omega^\varepsilon}-(\nabla_\eta w_j,\nabla_\eta V^\varepsilon)\right|\le c_j\varepsilon^{2/3}\tag{73}$$

проверяется по ставшей уже привычной схеме: перенос множителей $\chi(y)$ и $S_\varepsilon(y,z)$ из выражения (66) к пробной функции $v^\varepsilon(y,z)$ и трансформация ее в $V^\varepsilon(\eta)$ согласно определениям (70) и (42). Единственный новый момент — применение неравенства $\|\nabla_yv^\varepsilon;L_2(\Omega^\varepsilon)\|\le\|v^\varepsilon;\mathscr{H}^\varepsilon\|$, обусловленного формулами (67) и (38).

Из соотношений (71)–(73) и (68) вытекает, что ввиду интегрального тождества (22) с ингредиентами $w=w_j$, $v=V^\varepsilon$ и $\mu=\mu_m$ величина $\sup|\dots|$ из цепочки (69) не превосходит $c_m\varepsilon^{2/3}$, а значит, $t_j\le C_m\varepsilon^2$, и по лемме 4 найдутся собственные числа $\tau^\varepsilon_{\mathfrak{N}(j)}$, $j=m,\dots,m+\varkappa_m-1$, оператора $\mathscr{T}^\varepsilon$, для которых

$$\begin{aligned}c_m\varepsilon^2\ge\left|\tau^\varepsilon_{\mathfrak{N}(j)}-\mathfrak{t}^\varepsilon_j\right|=\left|\left(\lambda^\varepsilon_{\mathfrak{N}(j)}-\pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2}+\varepsilon^{-4/3}\right)^{-1}-\varepsilon^{4/3}(1+\mu_m)^{-1}\right|\\\Rightarrow\left|\lambda^\varepsilon_{\mathfrak{N}(j)}-\pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2}-\varepsilon^{-4/3}\mu_j\right|\le C_m\varepsilon^{-2/3}.\end{aligned}\tag{74}$$

С целью убедиться в том, что последнему неравенству (74) удовлетворяют не менее $\varkappa_m$ собственных чисел исходной задачи (4), воспользуемся второй частью леммы 4, а именно, возьмем

$$t_*=M\varepsilon^2\in\left(\max\left\{t^\varepsilon_m,\dots,t^\varepsilon_{m+\varkappa_m-1}\right\},\frac{\varepsilon^{4/3}}{1+\mu_m}\right)$$

с большим коэффициентом M и найдем нормированные столбцы коэффициентов $a^{\varepsilon j}=\left(a^{\varepsilon j}_J,\dots,a^{\varepsilon j}_{J+K-1}\right)\in\mathbb{R}^K$, $j=m,\dots,m+\varkappa_m-1$, для которых

$$\left\|\mathfrak{u}^\varepsilon_j-\mathfrak{S}^\varepsilon_j;\mathscr{H}^\varepsilon\right\|\le2\frac{t_j}{t_*}\le\frac{2C_m}{M},\quad\mathfrak{S}^\varepsilon_j=\sum_{p=J}^{J+K-1}a^{\varepsilon j}_p\mathfrak{U}^\varepsilon_p.$$

Поскольку $\left|\left\langle\mathfrak{u}^\varepsilon_j,\mathfrak{u}^\varepsilon_k\right\rangle_\varepsilon-\delta_{j,k}\right|\le C_m\varepsilon^{2/3}$ согласно формулам (65) и (68), при учете условий ортогональности и нормировки для собственных векторов $\mathfrak{U}^\varepsilon_J,\dots,\mathfrak{U}^\varepsilon_{J+K-1}$ оператора $\mathscr{T}^\varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned}&|(a^{\varepsilon j},a^{\varepsilon k})_{\mathbb{R}^K}-\delta_{j,k}|=\left|\left\langle\mathfrak{S}^\varepsilon_j,\mathfrak{S}^\varepsilon_k\right\rangle_\varepsilon-\delta_{j,k}\right|\\&\quad=\left|\left\langle\mathfrak{S}^\varepsilon_j-\mathfrak{u}^\varepsilon_j,\mathfrak{S}^\varepsilon_k\right\rangle_\varepsilon+\left\langle\mathfrak{u}^\varepsilon_j,\mathfrak{S}^\varepsilon_k-\mathfrak{u}^\varepsilon_k\right\rangle_\varepsilon+\left\langle\mathfrak{u}^\varepsilon_j,\mathfrak{u}^\varepsilon_k\right\rangle_\varepsilon-\delta_{j,k}\right|\le4c_mM^{-1}+C_m\varepsilon^{2/3}.\end{aligned}$$

В итоге при малом ε и большом M столбцы $a^{\varepsilon m},\dots,a^{\varepsilon m+\varkappa_m-1}$ оказываются «почти ортонормированными» в K-мерном пространстве $\mathbb{R}^K$, что возможно только в случае $K\ge\varkappa_m$, т. е. действительно найдутся собственные числа

$$\lambda^\varepsilon_{\mathfrak{N}^\varepsilon(m)},\dots,\lambda^\varepsilon_{\mathfrak{N}^\varepsilon(m+\varkappa_m-1)}\quad(\mathfrak{N}^\varepsilon(j)=\mathfrak{N}^\varepsilon(m)+j-m\ \text{ при } j=m,\dots,m+\varkappa_m-1)$$

задачи (4), удовлетворяющие неравенству (74) (может быть, с новой постоянной C_m, связанной с введенной величиной M). Отсюда сразу вытекает, что $\mathfrak{N}^\varepsilon(m)\ge m$ при достаточно малом ε, а значит, выполнено востребованное ранее соотношение (31). Вместе с тем, если оказалось, что $\mathfrak{N}^\varepsilon(m)>m$, то обнаружено собственное число $\lambda^\varepsilon_{\mathfrak{N}^\varepsilon}\in\bigl(0,\pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2}+\varepsilon^{-4/3}\mu_m+C_m\varepsilon^{-2/3}\bigr]$, для которого

$$\bigl(u^\varepsilon_{\mathfrak{N}^\varepsilon},u^\varepsilon_{\mathfrak{U}^\varepsilon(j)}\bigr)_{\Omega^\varepsilon}=0,\quad j=1,\dots,m+\varkappa_m-1. \tag{75}$$

Применив результат п. 4, видим, что указанные формулами (50) и (51) пределы $\bar\mu^0_{\mathfrak{N}^0}$ и $\overline{w}^0_{\mathfrak{N}^0}\in\mathscr{H}$ обладают абсурдным свойством: собственное число $\bar\mu^0_{\mathfrak{N}^0}$ попадает на сегмент $[0,\mu_m]$, но соответствующая собственная функция $\overline{w}^0_{\mathfrak{N}^0}$ ортогональна в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ собственным функциям $w_1,\dots,w_{m+\varkappa_m-1}$ в ситуации (64) (отметим, что упомянутая ортогональность унаследована от условий (75) ввиду сильной сходимости (51) и оценок (49), (54)). Итак, $\mathfrak{N}^\varepsilon(m)=m$, и доказано основное утверждение работы.

Теорема 5. *Последовательности* (5) *и* (24) *собственных чисел исходной и предельной задач находятся в отношении*

$$\bigl|\lambda^\varepsilon_j-\pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2}-\varepsilon^{-4/3}\mu_j\bigr|\le c_j\varepsilon^{-2/3}\quad\text{при }\varepsilon\in(0,\varepsilon_j], \tag{76}$$

где c_j и ε_j — положительные величины, зависящие от номера $j\in\mathbb{N}$.

Попутно закончена проверка теоремы о сходимости. Поскольку неравенство указывает также и скорость сходимости, теорема 3 становится ненужной, однако схема доказательства теоремы 5 существенно опирается на полученный в п. 4 промежуточный результат.

6. Доступные обобщения и открытые вопросы. 1°. Спектральные лакуны. Пусть ω — параллелепипед (13), а Π^ε — периодический слой (12). Известно (см., например, [11]), что спектр σ^ε задачи Дирихле для оператора Лапласа в Π^ε имеет чересполосную структуру

$$\sigma^\varepsilon=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\sigma^\varepsilon_k, \tag{77}$$

где σ^ε_k — замкнутые связные сегменты на вещественной положительной полуоси $\mathbb{R}_+$,

$$\sigma^\varepsilon_k=\bigl\{\lambda=\lambda^\varepsilon_k(\eta):\eta=(\eta_1,\dots,\eta_{n-1})\in\mathbb{L}\bigr\}, \tag{78}$$

η — двойственная переменная преобразования Гельфанда [12], $\mathbb{L}=\{\eta:0\le\eta_p<2\pi/l_p,\ p=1,\dots,n-1\}$, а $\lambda^\varepsilon_k(\eta)$ — элементы последовательности

$$0<\lambda^\varepsilon_1(\eta)\le\lambda^\varepsilon_2(\eta)\le\dots\le\lambda^\varepsilon_j(\eta)\le\dots\to+\infty \tag{79}$$

собственных чисел модельной задачи на ячейке периодичности (1)

$$\begin{gathered}-\Delta_x u^\varepsilon(\eta;x)=\lambda(\eta)u^\varepsilon(\eta;x),\ x\in\Omega^\varepsilon,\quad u^\varepsilon(\eta;x)=0,\ x\in\Sigma^\varepsilon_\pm,\\ u^\varepsilon|_{y_j=l_j}=e^{i\eta_j}u^\varepsilon|_{y_j=0},\quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_j}\biggr|_{y_j=l_j}=e^{i\eta_j}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_j}\biggr|_{y_j=0},\quad j=1,\dots,n-1.\end{gathered} \tag{80}$$

Вариационная формулировка задачи (80) сводится к интегральному тождеству

$$(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \lambda(\eta)(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad \forall v^\varepsilon \in \mathscr{H}^\varepsilon(\eta), \tag{81}$$

где $\mathscr{H}^\varepsilon(\eta)$ — подпространство функций из класса Соболева $H^1(\Omega^\varepsilon)$, обращающихся в нуль на основаниях $\Sigma^\varepsilon_\pm$ и удовлетворяющих первому (устойчивому) условию квазипериодичности (8), назначенному на боковой поверхности Σ^ε_0 ячейки (см. определение (11)).

Метод доказательства леммы 2 мало восприимчив к изменения краевых условий на боковой поверхности Σ^ε_0, так как используется интегральное тождество (81) с пробной функцией $v^\varepsilon = \mathscr{E}^2_\delta u^\varepsilon_j$, пропорциональной собственной функции u^ε_j около Σ^ε_0 (см. определение (33)) и потому попадающей в $\mathscr{H}^\varepsilon(\eta)$. Единственное нововведение — комплекснозначные собственные функции, требующие вычисления вещественных частей скалярных произведений в промежуточной выкладке (ср. преобразование (28)), однако финальное соотношение (34) остается прежним. Таким образом, асимптотическая формула (76) сохраняется и для собственных чисел (79), причем в ней оба выделенных члена асимптотики не зависят от параметра η, а множитель c_m в мажоранте также можно взять общим для всех $\eta \in \mathbb{L}$. Отсюда сразу вытекает, что сегменты (78) ложатся вовнутрь множеств

$$\Xi^\varepsilon_m = \big[\pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2} + \varepsilon^{-4/3}\mu_m - c_m\varepsilon^{-2/3}, \pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2} + \varepsilon^{-4/3}\mu_m + c_m\varepsilon^{-2/3}\big],$$

причем $\Xi^\varepsilon_m \cap \Xi^\varepsilon_p = \varnothing$ в случае $\mu_m \neq \mu_p$ при малом ε. Как и в [4], сделанное наблюдение показывает, что в спектре (77) открыты *лакуны* — интервалы на $\mathbb{R}_+$, свободные от точек спектра, но имеющие оба конца в σ^ε. Количество раскрытых лакун неограниченно возрастает при $\varepsilon \to +0$. Отметим, что благодаря экспоненциальному затуханию собственных функций, выраженному оценкой (32), нетрудно при помощи максиминимального принципа [10, теорема 10.2.2] значительно улучшить оценку сверху для длины сегмента (78) — она (длина) не превосходит $C_m e^{-\delta\varepsilon^{-2/3}}$ с некоторыми положительными C_m и δ.

2°. Другие краевые задачи. Как уже пояснялось, замена на боковой поверхности Σ^ε_0 условия Дирихле, например, условием Неймана не приводит к каким-либо изменениям в результате и способе его проверки. Незначительная модификация нужна и в том случае, если на одном основании, скажем Σ^ε_-, сохранено условие Дирихле, а на другом — назначено условие Неймана. В этом случае нужны подстановки

$$\sin\Big(\pi\frac{z+\varepsilon H_-(y)}{\varepsilon H(y)}\Big) \;\mapsto\; \sin\Big(\frac{\pi}{2}\frac{z+\varepsilon H_-(y)}{\varepsilon H(y)}\Big), \qquad \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} \;\mapsto\; \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2 H_0^2}$$

в асимптотических анзацах (16) и (15), (19), а все последующие действия повторяются практически без изменений.

Если на обоих основаниях $\Sigma^\varepsilon_\pm$ поставлено условие Неймана, то коренным образом меняется структура асимптотики: простейший результат состоит в том, что члены λ^ε_j последовательности (5) сходятся при $\varepsilon \to +0$ к собственным числам M_j следующей предельной задачи в области ω:

$$(H\nabla_y w, \nabla_y v)_\omega = M(Hw, v)_\omega \quad \forall v \in H^1_0(\omega)$$

(на боковой поверхности Σ^ε_0 сохранили условие Дирихле, перешедшее на границу $\partial\omega$). Иными словами, справедливо асимптотическое представление $\lambda^\varepsilon_j =$

$M_j + O(\varepsilon^{1/2})$ (см., например, книгу [13, § 7.1], где требуются лишь косметические поправки, вызванные недостаточной гладкостью функции H). Вместе с тем в частном случае $H_+ = H_-$, т. е. при наличии симметрии области Ω^ε, в спектре рассматриваемой спектральной краевой задачи удается обнаружить серии собственных чисел с устойчивыми асимптотиками вида (76). В самом деле, действуя по схеме [14], сузим задачу на подпространство функций, нечетных относительно переменной z, и тем самым поставим ее на верхней половине $\Omega^\varepsilon_+ = \{x \in \Omega^\varepsilon : z > 0\}$ области (1), но назначим искусственные условия Дирихле на поверхности $\{x \in \Omega^\varepsilon : z = 0\}$. В итоге приходим к ситуации, обсуждавшейся в предыдущем абзаце.

Рис. 2. Двумерные фигуры, изображающие тонкие многогранники.

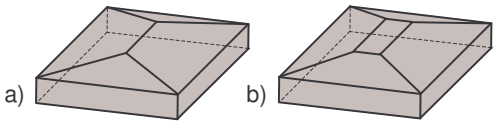

Рис. 3. Многогранники, у которых максимум толщины приходится на одномерное и двумерное подмногообразия.

3°. Вариации формы. Если у функции H имеется локальный максимум в точке $y^1 \in \omega$ (см. рис. 2,a) и $H(y^1) < H(y^0)$, то появляется новая серия собственных чисел с устойчивыми асимптотиками

$$\lambda^\varepsilon_{N^\varepsilon(j)} = \pi^2 \varepsilon^{-2} H(y^1)^{-2} + \varepsilon^{-4/3} \mu^1_j + \dots, \tag{82}$$

где μ^1_j — собственные числа еще одной предельной задачи (22) с новым коэффициентом $a^1(\eta)$. Подчеркнем, что номер $N^\varepsilon(y)$ в левой части (82) неограничено возрастает при $\varepsilon \to +0$, так как в последовательности (5) собственному числу $\lambda^\varepsilon_{N^\varepsilon(j)}$ предшествует все больше и больше собственных чисел с асимптотиками (15), (19).

Может случиться, что $H(y) = H(y^1)$ при $y \in \omega^1$, где ω^1 — подмногообразие в области $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с положительной размерностью (ср. рис. 3,a,b). Автор не знает, как выглядят асимптотические структуры в такой ситуации.

Еще один открытый вопрос связан с наличием нескольких глобальных максимумов у функции H (см. рис. 2,b). Тогда возникает набор предельных дифференциальных уравнений (20) в $\mathbb{R}^{n-1}$, а в асимптотическом анзаце (15), (19) фигурируют точки μ_m объединения их спектров. В результате не исключен случай $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{\kappa_1 - 1} < \mu_{\kappa_n}$ с $\kappa_1 > 1$, но первое собственное число λ^ε_1 задачи (3) заведомо простое, и совершенно непонятно, как происходит «расщепление» идентичных анзацев (15), (19) для $\lambda^\varepsilon_1, \dots, \lambda^\varepsilon_{\kappa_1 - 1}$.

Отметим, наконец, что если точка y^0 глобального максимума функции H попала на границу $\partial\omega$, то опять-таки нужны лишь очевидные изменения в асимптотическом анализе, а предельная задача ставится либо в полупространстве, либо в многогранном угле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Камоцкий И. В., Назаров С. А.* О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Науч. кн., 1999. Вып. 19. С. 105–148.
2. *Nazarov S. A.* Localization effects for eigenfunctions near to the edge of a thin domain // Math. Bohem. 2002. V. 127, N 2. P. 283–292.
3. *Cardone G., Durante T., Nazarov S. A.* The localization effect for eigenfunctions of the mixed boundary value problem in a thin cylinder with distorted ends // SIAM J. Math. Anal. 2010. V. 42, N 6. P. 2581–2609.
4. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of narrow periodic waveguides // Russ. J. Math. Phys. 2008. V. 15, N 2. P. 238–242.
5. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // Israel J. Math. 2009. V. 170. P. 337–354.
6. *Borisov D., Freitas P.* Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire. 2009. V. 26, N 2. P. 547–560.
7. *Borisov D., Freitas P.* Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in $\mathbb{R}^d$ // J. Funct. Anal. 2010. V. 258, N 3. P. 893–912.
8. *Бабич В. М. Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
9. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
10. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
11. *Кучмент П. А.* Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 4. С. 3–52.
12. *Гельфанд И. М.* Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.
13. *Назаров С. А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. кн., 2002.
14. *Evans D. V., Levitin M., Vassiliev D.* Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.

Статья поступила 25 февраля 2012 г.

Назаров Сергей Александрович
Институт проблем машиноведения РАН,
В.О. Большой пр., 61, Санкт-Петербург 199178;
Санкт-Петербургский гос. университет,
математико-механический факультет,
Университетский пр., 28, Старый Петергоф, Санкт-Петербург 198504
srgnazarov@yahoo.co.uk