Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 512.54

ГРУППЫ С ТЕМ ЖЕ ГРАФОМ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, ЧТО И ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРУППА $B_n(3)$

З. Момен, Б. Хосрави

Аннотация. Пусть G — конечная группа. Граф простых чисел G обозначается символом $\Gamma(G)$. В [1] показано, что если G — конечная группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(B_p(3))$, где $p > 3$ — нечетное простое число, то G изоморфна $B_p(3)$ или $C_p(3)$. В качестве основного результата данной статьи мы доказываем, что если G — конечная группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(B_n(3))$, где $n \geq 6$, то в G имеется единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный $B_n(3)$ или $C_n(3)$. Если $\Gamma(G) = \Gamma(B_4(3))$, то в G имеется единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный $B_4(3)$, $C_4(3)$ или ${}^2D_4(3)$. С целью развития результатов из [2] доказано, что $B_{2k+1}(3)$ распознаваема по множеству порядков элементов. Также получена квазираспознаваемость $B_{2k}(3)$ по множеству порядков элементов.

Ключевые слова: граф простых чисел, простая группа, распознаваемость, квазираспознаваемость.

1. Введение

Для целого числа n обозначим символом $\pi(n)$ множество всех простых делителей n. Если G — конечная группа, то $\pi(|G|)$ обозначается символом $\pi(G)$. Мы строим *граф простых чисел* группы G, обозначаемый через $\Gamma(G)$, следующим образом: $\pi(G)$ — множество вершин и два различных простых числа p и p' соединяются ребром тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка pp'. Пусть $s(G)$ — число связных компонент $\Gamma(G)$, и пусть $\pi_1(G), \pi_2(G), \dots, \pi_{s(G)}(G)$ — связные компоненты $\Gamma(G)$. Иногда будем использовать обозначение π_i вместо $\pi_i(G)$. Если $2 \in \pi(G)$, то всегда предполагаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Пусть m и n — натуральные числа. Будем писать $m \sim n$ тогда и только тогда, когда r смежно с s в $\Gamma(G)$ для любых простых делителей $r \in \pi(m)$ и $s \in \pi(n)$. *Спектр* конечной группы G, обозначаемый через $\pi_e(G)$, — это множество порядков ее элементов. Подмножество X множества вершин графа называется *независимым множеством*, если индуцированный на X подграф не имеет ребер. Пусть G — конечная группа и $r \in \pi(G)$. Символом $\rho(G)$ обозначим некоторое независимое множество вершин $\Gamma(G)$ с максимальным числом элементов. Независимое множество вершин в $\Gamma(G)$, содержащее r, с максимальным числом элементов обозначается символом $\rho(r, G)$. Положим $t(G) = |\rho(G)|$ и $t(r, G) = |\rho(r, G)|$.

Конечная неабелева простая группа P называется *квазираспознаваемой по графу простых чисел* (соответственно *по спектру*), если всякая конечная группа G со свойством $\Gamma(G) = \Gamma(P)$ $(\pi_e(G) = \pi_e(P))$ имеет единственный композиционный фактор, изоморфный P. Символом $k(\Gamma(G))$ (соответственно $h(\pi_e(G))$) будем обозначать число классов изоморфных конечных групп H со свойством $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ $(\pi_e(G) = \pi_e(H))$. Для натурального числа r конечная группа G называется *r-распознаваемой по графу простых чисел* (*по спектру*), если

$k(\Gamma(G)) = r$ $(h(\pi_e(G)) = r)$, и *нераспознаваемой*, если $k(\Gamma(G))$ $(h(\pi_e(G)))$ бесконечно. Обычно группа, 1-*распознаваемая* по графу простых чисел (по спектру), называется группой, *распознаваемой* по графу простых чисел (по спектру).

Заметим, что квазираспознаваемость (распознаваемость) по графу простых чисел влечет квазираспознаваемость (распознаваемость) по порядкам элементов, но обратное, вообще говоря, неверно. Квазираспознаваемость (распознаваемость) по графу простых чисел, вообще говоря, труднее установить, чем квазираспознаваемость (распознаваемость) по порядкам элементов, потому что в этом случае некоторые методы не работают.

В [3] Хаги определил конечные группы G с условием $\Gamma(G) = \Gamma(S)$, где S — спорадическая простая группа. Группа G называется CIT-*группой*, если G имеет четный порядок и централизатор всякой инволюции в G есть 2-группа. В [4] описаны конечные группы с тем же графом простых чисел, что и простая CIT-группа. Доказано, что если $q = 3^{2n+1}$ $(n > 0)$, то простая группа $^2G_2(q)$ распознаваема по графу простых чисел [5, 6]. Также в [7] доказано, что группа $\mathrm{PSL}(2,p)$, где $p > 11$ — простое число и $p \not\equiv 1 \pmod{12}$, распознаваема по графу простых чисел. В [8, 9] описаны конечные группы с тем же графом простых чисел, что и у $\mathrm{PSL}(2,q)$, где q не простое. В [10, 11] найдены конечные группы с тем же графом простых чисел, что и у $^2F_4(q)$, где $q = 2^{2n+1} > 2$, и $F_4(q)$, где $q = 2^n > 2$. В [12, 13] установлена распознаваемость по графу простых чисел группы $^2D_n(3)$, где $n = 2^k + 1$ (см. также [14]). В [15] доказано, что если p — простое число, не являющееся простым числом Мерсенна или Ферма, $p \neq 11$, 13, 19 и $\Gamma(G) = \Gamma(\mathrm{PGL}(2,p))$, то в G имеется единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный $\mathrm{PSL}(2,p)$. Если p и $k > 1$ нечетные и $q = p^k$ — степень простого числа, то $\mathrm{PGL}(2,q)$ однозначно определяется своим графом простых чисел [16]. В [17–21] получены конечные группы с тем же графом простых чисел, что и у $L_n(2)$, $U_n(2)$, $D_n(2)$ и $^2D_n(2)$.

В [22] доказано, что $h(\pi_e(B_3(3))) = 2$, в [23] — что группа $B_2(3)$ нераспознаваема по спектру. В [2] установлено, что если $p > 3$ — нечетное простое число и G — конечная группа, у которой $\pi_e(G) = \pi_e(B_p(3))$, то $G \cong B_p(3)$. Авторы доказали в [1], что если G — конечная группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(B_p(3))$, где $p > 3$ — нечетное простое число, то $G \cong B_p(3)$ или $C_p(3)$. Если же $\Gamma(G) = \Gamma(B_3(3))$, то $G \cong B_3(3)$, $C_3(3)$, $D_4(3)$ или $G/O_2(G) \cong \mathrm{Aut}(^2B_2(8))$. В качестве обобщения этих результатов в данной статье доказано, что если G — конечная группа, у которой $\Gamma(G) = \Gamma(B_n(3))$, где $n \geq 6$, то G имеет единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный $B_n(3)$ или $C_n(3)$. Если же $\Gamma(G) = \Gamma(B_4(3))$, то G имеет единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный $B_4(3)$, $C_4(3)$ или $^2D_4(3)$. Как следствие получаем, что если $n \geq 6$ нечетно, то $B_n(3)$ распознаваема по спектру, и это обобщает результаты из [2]. Установлено, что если $n \geq 6$ четно и G — конечная группа такая, что $\pi_e(G) = \pi_e(B_n(3))$, то $G/O_2(G) \cong B_n(3)$, т. е. $B_n(3)$ квазираспознаваема по спектру. Если p — нечетное простое число, то граф простых чисел группы $B_p(3)$ несвязен, и задачи о распознаваемости по спектру и графу простых чисел решены для него в [1, 2]. Заметим, что если $n \neq 2^m$ и n не просто, то граф простых чисел группы $B_n(3)$ связен, поэтому для решения задачи о распознаваемости группы $B_n(3)$ необходимы новые методы. Наконец, дан утвердительный ответ на вопрос 12.39 из [24] для простой группы $B_n(3)$. Для доказательства основной теоремы использована классификация конечных простых групп. Всюду далее все группы предполагаются конечными и под простыми группами мы понимаем неабелевы простые группы. Все не определяемые обозначения стандартны и взяты из [25]. Символом $A^+_{m-1}(q)$ обозначается простая группа $A_{m-1}(q)$ и $A^-_{m-1}(q)$ — простая группа ${}^2A_{m-1}(q)$, $D^+_n(q)$ — простая группа $D_n(q)$ и $D^-_n(q)$ — простая группа ${}^2D_n(q)$. Иногда используются оба обозначения.

2. Предварительные результаты

Лемма 2.1 [26, теорема 1]. *Пусть G — конечная группа такая, что $t(G) \geq 3$ и $t(2, G) \geq 2$. Тогда*

(1) *существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \mathrm{Aut}(S)$ для некоторой максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G;*

(2) *для каждого независимого подмножества ρ в $\pi(G)$ такого, что $|\rho| \geq 3$, не более одного простого числа из ρ делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$, в частности, $t(S) \geq t(G) - 1$;*

(3) *справедливо одно из следующих утверждений:*

(a) *каждое простое число $r \in \pi(G)$, не смежное с 2 в $\Gamma(G)$, не делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$, в частности, $t(2, S) \geq t(2, G)$.*

(b) *существует простое число $r \in \pi(G)$, не смежное с 2 в $\Gamma(G)$; в этом случае $t(G) = 3$, $t(2, G) = 2$ и $S \cong \mathrm{Alt}_7$ или $A_1(q)$ для некоторого нечетного q.*

Замечание 2.2. В лемме 2.1 для каждого нечетного простого числа $p \in \pi(S)$ имеем $t(p, S) \geq t(p, G) - 1$.

Лемма 2.3 (теорема Жигмонди) [27]. *Пусть p — простое число и n — положительное целое число. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(i) *существует примитивное простое p' для $p^n - 1$, т. е. $p' \mid (p^n - 1)$, но $p' \nmid (p^m - 1)$ для каждого $1 \leq m < n$;*

(ii) *$p = 2$, n, равном 1 или 6;*

(iii) *p — простое число Мерсенна и $n = 2$.*

Лемма 2.4 [28, леммы 2.7, 2.8]. (1) *Если $G = A_{n-1}(q)$, то G содержит фробениусову подгруппу с ядром порядка q^{n-1} и циклическим дополнением порядка $(q^{n-1} - 1)/(n, q - 1)$.*

(2) *Если $G = C_n(q)$, то G содержит фробениусову подгруппу с ядром порядка q^n и циклическим дополнением порядка $(q^n - 1)/(2, q - 1)$.*

(3) *Если $G = {}^2D_n(q)$ и у числа $q^{2n-2} - 1$ существует примитивный простой делитель r, то G содержит фробениусову подгруппу с ядром порядка q^{2n-2} и циклическим дополнением порядка r.*

(4) *Если $G = B_n(q)$ или $D_n(q)$ и у числа $q^m - 1$ существует примитивный простой делитель r_m числа $q^m - 1$, где $m = n$ или $n - 1$ таково, что m нечетно, то G содержит фробениусову подгруппу с ядром порядка $q^{m(m-1)/2}$ и циклическим дополнением порядка r_m.*

Лемма 2.5 [29, лемма 1]. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что G/N — фробениусова группа с фробениусовым ядром F и циклическим фробениусовым дополнением C. Если $(|N|, |F|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $p|C| \in \pi_e(G)$, где p — простой множитель $|N|$.*

Замечание 2.6 [30]. Если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(q, r) = 1$, то символом $e(r, q)$ обозначим наименьшее натуральное m такое, что $q^m \equiv 1 \pmod r$. Для нечетного q положим $e(2, q) = 1$, если $q \equiv 1$

(mod 4), и $e(2,q)=2$, если $q \equiv -1 \pmod 4$. В силу малой теоремы Ферма если r — нечетное простое число такое, что $r \mid (q^n-1)$, то $e(r,q) \mid n$.

Пусть m — положительное целое число и p — простое число. Обозначим через m_p p-часть числа m. Другими словами, $m_p = p^k$, если $p^k \mid m$, но $p^{k+1} \nmid m$.

Лемма 2.7 [31, предложение 2.1]. *Пусть $G = A_{n-1}(q)$ — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p. Пусть r и s — нечетные простые числа и $r, s \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Положим $k = e(r,q)$ и $l = e(s,q)$ и предположим, что $2 \le k \le l$. Тогда r и s несмежны, если и только если $k + l > n$ и k не делит l.*

Лемма 2.8 [31, предложение 2.2]. *Пусть $G = {}^2A_{n-1}(q)$ — конечная простая группа лиевского типа над полем характеристики p. Положим*

$$\nu(m) = \begin{cases} m, & m \equiv 0 \pmod 4, \\ m/2, & m \equiv 2 \pmod 4, \\ 2m, & m \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Пусть r и s — нечетные простые числа и $r,\ s \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Положим $k = e(r,q)$, $l = e(s,q)$ и предположим, что $2 \le \nu(k) \le \nu(l)$. Тогда r и s несмежны, если и только если $\nu(k) + \nu(l) > n$ и $\nu(k)$ не делит $\nu(l)$.

Лемма 2.9 [32, предложение 2.4]. *Пусть G — одна из простых групп лиевского типа, $B_n(q)$ или $C_n(q)$, над полем характеристики p. Положим*

$$\eta(m) = \begin{cases} m, & \text{если } m \text{ нечетно}, \\ \frac{m}{2} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть r и s — нечетные простые числа такие, что $r, s \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Положим $k = e(r,q)$, $l = e(s,q)$ и предположим, что $1 \le \eta(k) \le \eta(l)$. Тогда r и s несмежны если и только если $\eta(k) + \eta(l) > n$ и l/k не является нечетным натуральным числом.

Лемма 2.10 [32, предложение 2.5]. *Пусть $G = D_n^{\epsilon}(q)$ — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p и $\eta(m)$ — функция, определенная в лемме 2.9. Пусть r и s — нечетные простые числа и $r, s \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Положим $k = e(r,q)$, $l = e(s,q)$ и $1 \le \eta(k) \le \eta(l)$. Тогда r и s несмежны, если и только если $2\eta(k) + 2\eta(l) > 2n - (1 - \epsilon(-1)^{k+l})$ и l/k не является нечетным натуральным числом, и если $\epsilon = +$, то цепочка равенств $n = l = 2\eta(l) = 2\eta(k) = 2k$ неверна.*

3. Основные результаты

Лемма 3.1. *Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям леммы 2.1, и группы K и S, как в лемме 2.1. Предположим, что существуют $p \in \pi(K)$ и $p' \in \pi(S)$ такие, что $p \nsim p'$ в $\Gamma(G)$ и S содержит фробениусову подгруппу с ядром F и циклическим дополнением C, для которой $(|F|, |K|) = 1$. Тогда $p|C| \in \pi_e(G)$.*

Доказательство. Так как $KC_G(K)/K \trianglelefteq G/K$, то $S \cap KC_G(K)/K \trianglelefteq S$. Пусть $F : C = T/K$ и $F \le KC_T(K)/K \le KC_G(K)/K$. Тогда $S \cap KC_G(K)/K \neq 1$, поэтому $S \cap KC_G(K)/K = S$, откуда следует, что $S \le KC_G(K)/K$. Тем самым для любых $t' \in \pi(S)$ и $t \in \pi(K)$ имеем $t \sim t'$; противоречие. Значит, F не содержится в $KC_G(K)/K$. Таким образом, по лемме 2.5 $p|C| \in \pi_e(G)$.

Таблица 1

S	Условия	Нижняя оценка	Верхняя оценка
	$[m/2] < k$; $2 < k$	$t(S)$	$t(S)$
$A_{m-1}(q)$	$2 < k \leq [m/2]$; $(m, q) = (7, 2), (8, 2), (9, 2),$ $(10, 2), (11, 2)$	$k - 1$	$k - 1$
	$2 < k \leq [m/2]$; $(m, q) \neq (7, 2), (8, 2), (9, 2),$ $(10, 2), (11, 2)$	k	k
${}^2A_{m-1}(q)$	$[m/2] < \nu(k)$; $2 < \nu(k)$	$t(S)$	$t(S)$
	$2 < \nu(k) \leq [m/2]$	$\nu(k)$	$\nu(k)$
$B_m(q)$ или $C_m(q)$	$m = 2$ или $\eta(k) \geq (m + 1)/2$	$t(S)$	$t(S)$
	$m > 2$; $\eta(k) < (m + 1)/2$; $(m, q) \neq (3, 2), (4, 2)$; k четно	$[k/4] + k/2$	$[k/4] + k/2 + 2$
	$m > 2$; $\eta(k) < (m + 1)/2$; $(m, q) \neq (3, 2), (4, 2)$; k нечетно	$(3k - 1)/2$	$3(k + 1)/2$
$D_m(q)$	$\eta(k) \geq (m + 1)/2$	$t(S)$	$t(S)$
	$\eta(k) < (m + 1)/2$; $(m, q) \neq (4, 2), (5, 2), (6, 2)$; k четно	$[(k + 2)/4] + k/2$ $-1 - a$	$[(k + 2)/4] + k/2$ $+1 - a$
	$\eta(k) < (m + 1)/2$; $(m, q) \neq (4, 2), (5, 2), (6, 2)$; k нечетно	$(3k - 1)/2 - b$	$3(k + 1)/2 - b$
${}^2D_m(q)$	$\eta(k) > m/2$	$t(S)$	$t(S)$
	$\eta(k) \leq m/2$; $(m, q) \neq (4, 2), (5, 2), (6, 2), (7, 2)$; k четно	$[(k - 2)/4] + k/2$	$[(k - 2)/4] + k/2 + 3$
	$\eta(k) \leq m/2$; $(m, q) \neq (4, 2), (5, 2), (6, 2), (7, 2)$; k нечетно	$(3k - 1)/2$	$3(k + 1)/2$

Замечание 3.2. Согласно [25, 31] $|B_n(3)| = 3^{n^2} \prod\limits_{i=1}^{n} (3^{2i} - 1)$ и $t(B_n(3)) = [(3n + 5)/4]$. Если n нечетно, то $\rho(2, B_n(3)) = \{2, r_n\}$, а если n четно, то $\rho(2, B_n(3)) = \{2, r_{2n}\}$. Поэтому $t(2, B_n(3)) = 2$.

Теорема 3.3. *Пусть $S = {}^dX_m(q)$ — простая классическая группа лиева типа ранга m над полем $\mathrm{GF}(q)$, где $q = p^\alpha$. Пусть $r \in \pi(S)\backslash\{2, p\}$ и $k = e(r, q)$. Справедливы верхние и нижние оценки для $t(r, S)$ из табл. 1. (Для $k = m$ и нечетного $m/2$ полагаем $a = 1$, иначе $a = 0$; для $k = m/2$ нечетного полагаем $b = 1$, иначе $b = 0$.)*

Доказательство. Пусть r_i — примитивный простой делитель числа $q^i - 1$, $s \in \pi(S)\backslash\{2, p\}$ и $l = e(s, q)$.

Случай 1. Пусть $S = A_{m-1}(q)$, где $q = p^\alpha$.

Если $k > [m/2]$ и $k > 2$, то согласно [31, табл. 8] можно предполагать, что $r \in \rho(S)$. Поэтому $t(r, S) = t(S)$. Допустим, что $2 < k \leq [m/2]$. Тогда $m \geq 6$. Если $(m, q) = (6, 2)$, то $k = 3$. Теперь $r_3 = 7$ и $\rho(7, S) = \{5, 7, 31\}$ из [31, табл. 8]. Поэтому $t(7, S) = 3$, так что результат установлен. Пусть $r \nsim s$ в $\Gamma(S)$. Тогда по лемме 2.7 $k + l > m$, l/k и k/l не целые. Пусть $A_1 = \{r_i \mid m - k + 1 \leq$

$i \le m, k \nmid i\}$. Так как $k \le [m/2]$, для каждого i такого, что $r_i \in A_1$, имеем $k \le [m/2] < m - [m/2] + 1 \le m - k + 1 \le i$, т. е. $k < i$. Стало быть, $r \notin A_1$, и k/i не целое. С другой стороны, для каждого i такого, что $r_i \in A_1$, имеем $i+k > m$. Следовательно, по лемме 2.7 каждый элемент A_1 не смежен с r. Покажем, что A_1 — независимое множество. Так как $k \le [m/2]$, то $[m/2] < m - k + 1 \le i$. Таким образом, в силу [31, табл. 8] A_1 — независимое множество. Поэтому $\rho(r, S) = A_1 \cup \{r\}$. Отметим, что в точности один элемент из $[m-k+1, m]$ делится на k, откуда следует, что $|A_1| \le k - 1$. Значит, $t(r, S) = k - 1$, когда $q = 2$ и $7 \le m \le 11$, в силу теоремы Жигмонди (поскольку r_6 не существует); иначе $t(r, S) = k$.

Случай 2. Пусть $S = {}^2A_{m-1}(q)$, где $q = p^\alpha$.

Если $\nu(k) > [m/2]$ и $\nu(k) > 2$, то в силу [31, табл. 8] можно предполагать, что $r \in \rho(S)$. Поэтому $t(r, S) = t(S)$. Предположим, что $2 < \nu(k) \le [m/2]$, откуда следует, что $m \ge 6$. Пусть $r \nsim s$ в $\Gamma(S)$. По лемме 2.8 $\nu(k) + \nu(l) > m$, $\nu(k)/\nu(l)$ и $\nu(l)/\nu(k)$ не целые. Пусть $A_2 = \{r_i \mid m - \nu(k) + 1 \le \nu(i) \le m, \nu(k) \nmid \nu(i)\}$. Так как $\nu(k) \le [m/2]$, для каждого i такого, что $r_i \in A_2$, имеем $\nu(k) \le [m/2] < m - [m/2] + 1 \le m - \nu(k) + 1 \le \nu(i)$, т. е. $\nu(k) < \nu(i)$. Поэтому $r \notin A_2$ и $\nu(k)/\nu(i)$ не целое. С другой стороны, для каждого i такого, что $r_i \in A_2$, имеем $\nu(k) + \nu(i) > m$. Используя лемму 2.8, видим, что всякий элемент A_2 не смежен с r. Покажем, что A_2 — независимое множество. Так как $\nu(k) \le [m/2]$, то $[m/2] < m - \nu(k) + 1 \le \nu(i)$. Таким образом, в силу [31, табл. 8] A_2 — независимое множество. Из приведенных выше рассуждений заключаем, что $\rho(r, S) = A_2 \cup \{r\}$. Так как ν взаимно однозначно, $\nu(k)$ делит в точности один элемент в промежутке $[m - \nu(k) + 1, m]$, стало быть, $t(r, S) = k$. Заметим, что $m \ge 6$, и так как $\nu(6) = 3 \le [m/2] < m - \nu(k) + 1 \le \nu(i)$, имеем $i \ne 6$, когда $q = 2$.

Случай 3. Пусть S совпадает с $B_m(q)$ или $C_m(q)$, где $q = p^\alpha$ и $(m, q) \ne (3, 2), (4, 2)$.

Если $m = 2$, то для любого $r \in \pi(S)$ имеем $t(r, S) = t(S) = 2$ по лемме 2.9. Пусть $m > 2$. Если $\eta(k) \ge (m+1)/2$, то согласно [31, табл. 8] можно считать, что $r \in \rho(S)$. Поэтому $t(r, S) = t(S)$. Предположим, что $\eta(k) < (m+1)/2$. Пусть $r \nsim s$ в $\Gamma(S)$. Рассмотрим два случая.

• Пусть k четное. Тогда $k < m + 1$.

По лемме 2.9 $r \nsim s$ в $\Gamma(S)$ в том и только в том случае, когда $\eta(k) + \eta(l) > m$ и k/l, l/k не являются нечетными целыми числами. Пусть $A_3 = \{r_i \mid m - k/2 + 1 \le i \le m,\ i \equiv 1 \pmod 2\}$ и $A_3' = \{r_{2i} \mid m - k/2 + 1 \le i \le m,\ 2i/k$ не является нечетным целым$\}$. Тогда, как упомянуто выше, $\rho(r, S) \subseteq A_3 \cup A_3' \cup \{r\}$. Покажем, что $r \notin A_3 \cup A_3'$ и $A_3 \cup A_3'$ — независимое множество. Так как k четно, то $r \notin A_3$. С другой стороны, поскольку $k/2 = \eta(k) < (m+1)/2$, имеем $(m+1)/2 < m - k/2 + 1$. Стало быть, $r \notin A_3'$, и для любого $r_{2i} \in A_3'$ число $k/2i$ не целое. Так как $(m+1)/2 < m - k/2 + 1$, согласно [31, табл. 8] $A_3 \cup A_3'$ — независимое множество. Ввиду изложенного всякий элемент $A_3 \cup A_3'$ не смежен с r. Поэтому $\rho(r, S) = A_3 \cup A_3' \cup \{r\}$. По предположению если $q = 2$, то $m \ge 5$ и потому $3 < m - k/2 + 1 \le i$ в определении A_3'. Тем самым $[k/4] \le |A_3| \le [k/4] + 1$ и $k/2 - 1 \le |A_3'| \le k/2$, ибо $2i/k$ может быть нечетным целым не более чем в одном случае. Следовательно, для четного k будет $L = [k/4] + (k/2 - 1) + 1$ и $U = ([k/4] + 1) + k/2 + 1$.

• Пусть k нечетное, тогда $k < (m+1)/2$.

По лемме 2.9 $r \nsim s$ тогда и только тогда, когда $\eta(k) + \eta(l) = k + \eta(l) > m$, так как k нечетно и l/k, k/l не являются нечетными целыми. Пусть $A_4=\{r_{2i}\mid m-k+1\le i\le m\}$ и $A_4'=\{r_i\mid m-k+1\le i\le m,\ i\equiv 1 \pmod 2),\ i/k$ не является нечетным целым$\}$. Значит, $\rho(r,S)\subseteq A_4\cup A_4'\cup\{r\}$. Покажем, что $\rho(r,S)=A_4\cup A_4'\cup\{r\}$. Так как $k<(m+1)/2$, то $(m+1)/2<m-k+1$. Поэтому в силу [31, табл. 8] $A_4\cup A_4'$ — независимое множество. Поскольку $k<(m+1)/2<m-k+1$, то $r\notin A_4'$ и k/i не целое, где $r_i\in A_4'$. Следовательно, всякий элемент $A_4\cup A_4'$ не смежен с r. Таким образом, $\rho(r,S)=A_4\cup A_4'\cup\{r\}$. Заметим, что по предположению если $q=2$, то $m\ge 5$ и потому $3<m-k+1\le i$ в определении A_4. Тем самым $|A_4|=k$ и $[k/2]-1\le|A_4'|\le[k/2]+1$. Следовательно, $L=(3k-1)/2$ и $U=(3k+3)/2$.

Случай 4. Пусть $S=D_m(q)$, где $q=p^\alpha$ и $(m,q)\ne(4,2),(5,2),(6,2)$.

Если $\eta(k)\ge(m+1)/2$, то в силу [31, табл. 8] можно предполагать, что $r\in\rho(S)$. Тогда $t(r,S)=t(S)$. Предположим, что $\eta(k)<(m+1)/2$. Пусть $r\nsim s$ в $\Gamma(S)$. Аналогично предыдущему случаю рассмотрим два подслучая.

• Пусть k четное. Тогда $k/2<(m+1)/2$.

По лемме 2.10 $r\nsim s$ в $\Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда $2\eta(k)+2\eta(l)>2m-(1-(-1)^{k+l})$ и k/l, l/k не являются нечетными целыми. Пусть $A_5=\{r_i\mid m-k/2\le i\le m,\ i\equiv 1 \pmod 2)\}$ и $A_5'=\{r_{2i}\mid m-k/2+1\le i\le m-1,\ 2i/k$ не является нечетным целым$\}$. Заметим, что $r_{2m}\notin\pi(D_m(q))$. В силу леммы 2.10 $\rho(r,S)\subseteq A_5\cup A_5'\cup\{r\}$. Так как k четно, то $r\notin A_5$. С другой стороны, $(m+1)/2<m-k/2+1$ ввиду $k/2=\eta(k)<(m+1)/2$. Следовательно, $r\notin A_5'$, и для любого $r_{2i}\in A_5'$, получаем, что $k/2i$ не целое число. Так как $(m+1)/2<m-k/2+1$, из [31, табл. 8] следует, что $A_5\cup A_5'$ — независимое множество. Аналогично предыдущему случаю если $q=2$, то $2i>6$ в определении A_5'. Поэтому $[(k+2)/4]\le|A_5|\le[(k+2)/4]+1$ и $(k-2)/2-1\le|A_5'|\le(k-2)/2$. Согласно рассмотренному выше каждый элемент $A_5\cup A_5'$ не смежен с r. Если $k=m$ и $m/2$ нечетно, то $r_{m/2}\in A_5$, но $r_{m/2}\sim r_m$ по лемме 2.10. Поэтому $\rho(r,S)=A_5\cup A_5'\cup\{r\}\setminus\{r_{m/2}\}$; в противном случае $\rho(r,S)=A_5\cup A_5'\cup\{r\}$. Тем самым $L=([(k+2)/4]-a)+((k-2)/2-1)+1$ и $U=([(k+2)/4]+1-a)+(k-2)/2+1$, где $a=1$, если $k=m$ и $m/2$ нечетно, иначе $a=0$.

• Пусть k нечетное и потому $k<(m+1)/2$.

Пусть $A_6=\{r_{2i}\mid m-k\le i\le m-1\}$ и $A_6'=\{r_i\mid m-k+1\le i\le m,\ i\equiv 1 \pmod 2),\ i/k$ не является нечетным целым$\}$. По лемме 2.10 $\rho(r,S)\subseteq A_6\cup A_6'\cup\{r\}$. Поскольку k нечетно, то $r\notin A_6$. С другой стороны, так как $\eta(k)=k<(m+1)/2<m-k+1$, то $r\notin A_6'$ и k/i не целое, где $r_i\in A_6'$. По лемме 2.10 каждый элемент $A_6\cup A_6'$ не смежен с r. Заметим, что если $q=2$, то $m\ge 7$ и потому $2i>6$ в определении A_6. Если $k=m/2$ нечетно, то в силу леммы 2.10 $r\sim r_m$ и согласно вышеизложенному и [31, табл. 8] $\rho(r,S)=(A_6\setminus\{r_m\})\cup A_6'\cup\{r\}$. Если $k\ne m/2$, то $\rho(r,S)=A_6\cup A_6'\cup\{r\}$. Тем самым $L=(k-b)+([k/2]-1)+1=(3k-1)/2-b$ и $U=(k-b)+([k/2]+1)+1=(3k+3)/2-b$, где $b=1$, если $k=m/2$ нечетно, иначе $b=0$.

Случай 5. Пусть $S={}^2D_m(q)$, где $q=p^\alpha$ и $(m,q)\ne(4,2),(5,2),(6,2),(7,2)$.

Так как доказательство этого случая аналогично доказательству случая 4, для удобства опустим детали. Заметим лишь, что $r_m\notin\pi({}^2D_m(q))$ тогда и только тогда, когда m нечетно.

Замечание 3.4. Согласно [31, табл. 8] $[(m-1)/2]\le t(A_{m-1}(q))$ и $[(m+1)/2]\le t({}^2A_{m-1}(q))$. Если $(m,q)\ne(\alpha,2)$, где $2\le\alpha\le 7$, то $t(B_m(q))=[(3m+5)/4]$, $t(D_m(q))\ge[(3m+1)/4]$, $t({}^2D_m(q))=[(3m+4)/4]$.

Теорема 3.5. *Если G — конечная группа такая, что $\Gamma(G)=\Gamma(B_n(3))$, где $n\geq 6$, то G имеет единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный $B_n(3)$ или $C_n(3)$.*

Доказательство. Если n — простое число, то результат следует из [1]. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что n не простое. В силу леммы 2.1 и замечания 3.2 существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S\leq \overline{G}=G/K\leq \mathrm{Aut}(S)$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K в G. Кроме того, $t(S)\geq t(G)-1$. Рассмотрим все возможности для S согласно таблицам в [31, 32]. Ниже символом r_i обозначаем примитивный простой делитель числа 3^i-1, и на каждом шаге если S — простая группа лиева типа над $\mathrm{GF}(q)$, где $q=p^\alpha$, то u_i обозначает примитивный простой делитель q^i-1. В доказательстве также предполагаем, что p — нечетное простое число число.

Шаг 1. Докажем сначала, что простая группа S не изоморфна знакопеременной группе.

Пусть $S\cong A_m$.

• Пусть $n\geq 8$.

По замечанию 3.2 и лемме 2.1 $t(S)\geq t(G)-1\geq 6$. Поэтому простым вычислением получаем, что $m\geq 43$. Пусть $s\in\pi(S)$. Согласно [31, предложение 1.1] $s\nsim 17$ тогда и только тогда, когда $s+17>m$. Поэтому $s\in[m-16,m]$. Имеется по меньшей мере 11 элементов в $[m-16,m-1]$, делящихся на 2 или 3, потому что $[16/2]+[16/3]-[16/6]=11$. Тем самым есть не более шести простых чисел в промежутке $[m-16,m]$. Значит, $t(17,S)\leq 7$. Поэтому ввиду замечания 2.2 $t(17,G)\leq 8$. С другой стороны, $e(17,3)=16$ и $17\in\pi(G)$, поскольку $n\geq 8$.

Если $\eta(16)=8\geq(n+1)/2$, то по теореме 3.3 и замечанию 3.4 $t(17,G)=t(G)=[(3n+5)/4]$. Таким образом, по замечанию 2.2 имеем $[(3n+5)/4]-1=t(17,G)-1\leq t(17,S)\leq 7$ и потому $n\leq 10$. Следовательно, $n\in\{8,9,10\}$. Так как $e(31,3)=30$, во всех случаях $31\in\pi(S)\backslash\pi(G)$; противоречие.

Поэтому $\eta(16)=8<(n+1)/2$. Теперь по теореме 3.3 $12\leq t(17,G)$, и потому по замечанию 2.2 имеем $11\leq t(17,G)-1\leq t(17,S)\leq 7$; противоречие.

• Пусть $n=6$. Тогда $r_{2n}=r_{12}=73\in\pi(S)$ и $r_{12}\nsim 2$ в силу леммы 2.1. Поэтому в силу [31, предложение 1.1] $73\leq m\leq 76$. Значит, $71\in\pi(S)\backslash\pi(B_6(3))$; противоречие.

Шаг 2. Докажем теперь, что простая группа S не изоморфна простой классической группе над полем характеристики $p\neq 3$.

Пусть $A_1=\{r_{2(n-1)},r_{2(n-2)},r_{2(n-3)},r_{2(n-4)}\}$. Если n нечетно, то рассмотрим $B=\{r_n\}\cup A_1$, а если n четно, то рассмотрим $B=\{r_{2n}\}\cup A_1$. Заметим, что если $n\geq 8$, то согласно [31] B — независимое множество в $\Gamma(B_n(3))$. Поэтому по лемме 2.1 $|B\cap\pi(S)|\geq 4$. Очевидно, $p\notin B$. Так как $t(p,S)\leq 3$, для любой простой классической группы $S\neq {}^2D_m(q)$ согласно табл. 4, 6 в [31]. Тем самым p смежно по крайней мере двум элементам B в $\Gamma(S)$, и потому p смежно им в $\Gamma(G)$. Согласно таблицам из [31] $\rho(2,S)\backslash\{2\}\subseteq\rho(p,S)$ для любой простой группы S, так что $p\nsim r_n$, когда n нечетно, и $p\nsim r_{2n}$, когда n четно. Докажем, что во всех случаях $p\in\{2,5,7,13,41\}$. Например, пусть p смежно с $r_{2(n-2)}$ и $r_{2(n-4)}$. Пусть $l=e(p,3)$. В силу леммы 2.9 поскольку $p\sim r_{2(n-2)}$, получаем, что $\eta(l)+(n-2)\leq n$ или $2(n-2)/l$ — нечетное натуральное число. Аналогично так как $p\sim r_{2(n-4)}$, выводим, что $\eta(l)+(n-4)\leq n$ или $2(n-4)/l$ — нечетное число. Поэтому во всех случаях $\eta(l)\leq 4$, значит, $p\in\{2,5,7,13,41\}$.

Случай 1. Пусть $S\cong A^{\epsilon}_{m-1}(q)$, где $q=p^\alpha$.

• Пусть $n \geq 8$. Тогда $t(G) \geq 7$ и так как $t(S) \geq t(G) - 1$, имеем $t(S) \geq 6$. Из [31, табл. 8] вытекает, что $t(S) \leq [(m+1)/2]$, так что $m \geq 11$. Поэтому $(q^{10} - 1) \mid |S|$.

Пусть $p = 2$. Заметим, что $e(31, 2) = 5$, т. е. $31 \in \pi(S)$. Следовательно, $31 \in \pi(G)$, и так как $e(31, 3) = 30$, получаем, что $n \geq 15$. В силу замечания 2.2 $t(31, G) - 1 \leq t(31, S)$.

Если $\eta(30) = 15 \geq (n+1)/2$, т. е. $n \leq 29$, то по теореме 3.3 и замечанию 3.4 $t(31, G) = [(3n+5)/4]$. По теореме 3.3 $t(31, G) - 1 = [(3n+5)/4] - 1 \leq t(31, S) \leq 10$; противоречие, поскольку $n \geq 15$.

Получили, что $n > 29$. Аналогично вышесказанному по теореме 3.3 $[30/4] + 30/2 - 1 = 21 \leq t(31, G) - 1 \leq t(31, S) \leq 10$; противоречие.

Пусть $p = 5$. Так как $e(521, 5) = 10$, то $521 \in \pi(S)$, потому что $m \geq 11$. Поскольку $e(521, 3) = 520$, то $n \geq 260$. Если $n \leq 519$, то по теореме 3.3 и замечанию 3.4 $t(521, G) = [(3n+5)/4]$. По теореме 3.3 $t(521, G) - 1 = [(3n+5)/4] - 1 \leq t(521, S) \leq 10$; противоречие, поскольку $n \geq 260$. Поэтому $n > 519$. Аналогично по теореме 3.3 $389 \leq t(521, G) - 1 \leq t(521, S) \leq 10$; противоречие.

Пусть $p = 7$. Так как $e(191, 7) = 10$, то $191 \in \pi(S)$. Теперь $e(191, 3) = 95$ влечет, что $n \geq 95$. Если $n \leq 189$, то $t(191, G) = [(3n+5)/4]$ и аналогично получаем, что $n \leq 14$; противоречие. Поэтому $n > 189$. Снова по аналогии с вышесказанным $141 \leq t(191, G) - 1 \leq t(191, S) \leq 10$; противоречие.

Пусть $p = 13$. Тогда $2411 \in \pi(S)$, так как $e(2411, 13) = 10$, то $e(2411, 3) = 1205$ и потому $n \geq 1205$. Если $n \leq 2409$, то $t(2411, G) = [(3n+5)/4]$ и аналогично получаем, что $n \leq 14$; противоречие. Следовательно, $n > 2409$. Стало быть, $1806 \leq t(2411, G) - 1 \leq t(2411, S) \leq 10$; противоречие.

Пусть $p = 41$. Так как $e(4111, 41) = 10$, то $4111 \in \pi(S)$ и $e(4111, 3) = 822$, значит, $n \geq 411$. Если $n \leq 821$, то аналогично $t(4111, G) = [(3n+5)/4]$ и $n \leq 14$; противоречие с $n > 821$. Тогда $615 \leq t(4111, G) - 1 \leq t(4111, S) \leq 10$; противоречие.

• Пусть $n = 6$. Тогда $t(B_6(3)) = 5$ и $m \geq 7$. Если $\epsilon = +$ или $\epsilon = -$ и α нечетно, то для любого $p \in \pi(S) \subseteq \pi(B_6(3))$ число $p^7 - \epsilon$ имеет простой делитель, не лежащий в $\pi(B_6(3))$, так как $\pi(p^7 - \epsilon) \subseteq \pi(S) \subseteq \pi(B_6(3))$; противоречие. Поэтому $\epsilon = -$ и α четно. Значит, $\alpha \geq 2$. Тогда для любого $p \in \pi(S)$ число $p^8 - 1$ имеет простой делитель, не лежащий в $\pi(B_6(3))$; противоречие.

Получили, что S не изоморфна группе $A^{\epsilon}_{m-1}(q)$.

Случай 2. Пусть $S \cong B_m(q)$ или $C_m(q)$, где $q = p^{\alpha}$.

• Пусть $n \geq 8$. Тогда $m \geq 7$. Поэтому $q^{10} - 1$ — делитель $|S|$ и в точности аналогично случаю 1 получаем противоречие.

• Пусть $n = 6$. Тогда $t(S) \geq 4$ и $m \geq 4$. Следовательно, $(p^8 - 1) \mid |S|$. Теперь легко убеждаемся, что для любого $p \in \pi(B_6(3))$ верно $\pi(p^8 - 1) \nsubseteq \pi(B_6(3))$; противоречие.

Если $S \cong D_m(q)$, где $q = p^{\alpha}$, то аналогично получаем противоречие.

Случай 3. Пусть $S \cong {}^2D_m(q)$, где $q = p^{\alpha}$.

• Пусть $n \geq 10$. Тогда $m \geq 8$. Пусть $A = \{r_{2(n-1)}, r_{2(n-2)}, r_{2(n-3)}, r_{2(n-4)}, r_{2(n-5)}\}$. Если n нечетно, то положим $B = \{r_n\} \cup A$, а если n четно, то $B = \{r_{2n}\} \cup A$. Согласно [31] B — независимое множество в $\Gamma(G)$. По лемме 2.1 $|B \cap \pi(S)| \geq 5$. Так как $t(p, S) \leq 4$, то $p \notin B$. Поэтому p смежно по крайней мере двум элементам B в $\Gamma(S)$, а значит, и в $\Gamma(G)$. Аналогично вышесказанному $p \in \{2, 5, 7, 13, 41, 61\}$. Если $p \in \{2, 5, 7, 13, 41\}$, то, так как $(p^{10} - 1) \mid |S|$, совершенно аналогично случаю 1 получаем противоречие. Пусть $p = 61$. Заметим, что $e(131, 61) = 5$. Тогда $131 \in \pi(S)$. Поскольку $e(131, 3) = 65$, то $n \geq 65$. Если $n \leq 129$, то $131 \in \rho(B_n(3))$. Поэтому $t(131, G) = [(3n+5)/4]$. Аналогично $t(131, G) - 1 = [(3n+5)/4] - 1 \leq t(131, S) \leq 10$, откуда $n \leq 14$; противоречие. Поэтому $n > 129$, стало быть, $96 \leq t(131, G) - 1 \leq t(131, S) \leq 10$; противоречие.

• Пусть $n \in \{6, 8, 9\}$. Для удобства рассмотрим только $n = 9$. Если $n = 9$, то $t(G) = 8$, поэтому $m \geq 8$. Тогда $(p^{14} - 1) \mid |S|$. С другой стороны, $p \in \pi(S) \subseteq \pi(G)$. Видно, что для каждого $p \in \pi(B_9(3))\backslash\{3\}$ число $p^{14} - 1$ имеет простой делитель, не лежащий в $\pi(B_9(3))$; противоречие.

Шаг 3. Докажем, что простая группа S не изоморфна простой исключительной группе лиева типа.

Случай 1. Пусть S изоморфна $F_4(q)$, $E_6(q)$ или ${}^2E_6(q)$, где $q = p^\alpha$.

Имеем $t(S) \leq 5$, и так как $t(G) - 1 \leq t(S)$, то $n = 6$. Заметим, что $p \in \pi(B_6(3))$. Если $p \neq 3$, то $\pi(p^8 - 1) \nsubseteq \pi(B_6(3))$. Следовательно, $p = 3$. В дальнейшем пользуемся [31, табл. 7] и леммой 2.1.

Если $S \cong F_4(q)$, то $r_{12} = u_{12}$. С другой стороны, $12\alpha \leq 12$, поскольку $\pi(S) \subseteq \pi(B_6(3))$. Поэтому $\alpha = 1$ и $S \cong F_4(3)$. Заметим, что $e(13, 3) = 3$ и $e(61, 3) = 10$. Следовательно, в силу [32, предложение 2.7] и леммы 2.9 $13 \sim 61$ в $\Gamma(F_4(3))$, но $13 \nsim 61$ в $\Gamma(B_6(3))$; противоречие.

Если $S \cong E_6(q)$, то $r_{12} = u_9$ или u_{12}. Если $r_{12} = u_9$, то $12 \mid 9\alpha$ и $9\alpha \leq 12$; противоречие. Поэтому $r_{12} = u_{12}$, следовательно, $\alpha = 1$. Далее, $e(73, 3) = 12$ и $e(13, 3) = 3$. Согласно [32, предложение 2.7] и лемме 2.9 $13 \sim 73$ в $\Gamma(E_6(3))$, но $13 \nsim 73$ в $\Gamma(B_6(3))$; противоречие.

Если $S \cong {}^2E_6(q)$, то аналогично убеждаемся, что $q = 3$. Далее, $r_{18} \in \pi(S)\backslash\pi(B_6(3))$; противоречие.

Случай 2. Пусть $S \cong E_7(q)$, где $q = p^\alpha$.

Тогда $t(S) = 8$, поэтому $n \leq 10$. Из [25] имеем $q(q^{18} - 1) \mid |S|$, следовательно, $19 \in \pi(S)$. Стало быть, n равно 9 или 10.

Пусть $n = 9$. Если $p \neq 3$, то $(p^{14} - 1) \mid |S|$, и во всех случаях $p^{14} - 1$ имеет простой делитель, не лежащий в $\pi(B_9(3))$. Поэтому $p = 3$. По лемме 2.1 r_9 равно u_7, u_9, u_{14} или u_{18}. Поэтому $\alpha \in \{1, 2\}$ и S изоморфна $E_7(3)$ или $E_7(9)$.

Если $S \cong E_7(9)$, то $r_{36} \in \pi(S)\backslash\pi(G)$; противоречие.

Если $S \cong E_7(3)$, то $r_{16} \in \pi(G)\backslash\pi(S)$. Поэтому $r_{16} \in \pi(K)$, ибо $\pi(\mathrm{Out}(S)) = \{2\}$. Заметим, что $r_4 \in \pi(S)$ и $r_4 \nsim r_{16}$ в $\Gamma(B_9(3))$. Согласно [33] $C_4(3) \leq A_7(3) \leq E_7(3)$, и по лемме 2.4 $C_4(3)$ содержит фробениусову подгруппу с ядром порядка 3^4 и циклическим дополнением порядка $(3^4 - 1)/2$. Следовательно, ввиду теоремы 3.1 $r_4 \sim r_{16}$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

Если $n = 10$, то аналогично получаем противоречие.

Случай 3. Пусть $S \cong E_8(q)$, где $q = p^\alpha$.

Согласно [31, табл. 9] $t(S) = 12$. Так как $t(G) - 1 \leq t(S) = 12$, то $n \leq 16$. Известно, что $q(q^{30} - 1) \mid |S|$, поэтому $31 \in \pi(S) \subseteq \pi(G)$. С другой стороны, $e(31, 3) = 30$, откуда $n \geq 15$. Таким образом, $n = 15, 16$.

• Пусть $p \neq 3$.

Так как $p \in \pi(S)$, то $p \in \pi(B_n(3))$, где $n = 15, 16$. Но для всякого $p \in \pi(B_n(3))\backslash\{3\}$, где $n = 15, 16$, число $p^{30} - 1$ имеет простой делитель, не лежащий в $\pi(G)$; противоречие.

• Пусть $p = 3$.

Пусть $n = 15$. Тогда ввиду [31, табл. 7] $r_{15} = u_{15}$ или u_{30}. Если $r_{15} = u_{15}$, то $\alpha \in \{1, 2\}$. Пусть $\alpha = 2$. Тогда $S \cong E_8(9)$ и $r_{36} \in \pi(E_8(9))\backslash\pi(B_{15}(3))$; противоречие. Поэтому $\alpha = 1$. Следовательно, $S \cong E_8(3)$. Далее, $r_{11} \in \pi(G)\backslash\pi(S)$. Тогда $r_{11} \in \pi(K)$, так как $|\operatorname{Out}(S)| = 1$. Заметим, что $r_7 \in \pi(S)$ и $r_7 \nsim r_{11}$ в $\Gamma(G)$. Согласно [33] $D_8(3) \leq E_8(3)$, и по лемме 2.4 $D_8(3)$ содержит фробениусову подгруппу с ядром порядка 3^{21} и циклическим дополнением порядка r_7. Поэтому по теореме 3.1 $r_7 \sim r_{11}$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

Если $r_{15} = u_{30}$ или $n = 16$, то аналогично получаем противоречие.

Случай 4. Пусть $S \cong {}^2B_2(q)$, где $q = 2^{2n'+1}$.

Имеем $t(S) = 4$ и $n = 6$. Таким образом, $r_{12} = 73 \in \{s_1, s_2, s_3\}$, где $s_1 \mid (q-1)$, $s_2 \mid (q-\sqrt{2q}+1)$ и $s_3 \mid (q+\sqrt{2q}+1)$ в силу табл. 5 из [31]. Поэтому $73 \mid (q^4-1)$. Следовательно, $9 \mid (2n'+1)$, поскольку $e(73, 2) = 9$. Значит, существует нечетное число t такое, что $2n'+1 = 9t$. Согласно [25] $(q^2+1) \mid |{}^2B_2(q)|$. Так как t нечетно, $(2^{18}+1) \mid |{}^2B_2(q)|$. Таким образом, $109 \in \pi(S)\backslash\pi(G)$; противоречие.

Случай 5. Пусть $S \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n'+1}$. Тогда $t(S) = 5$ и потому $n = 6$. Отсюда $r_{12} = 73 \in \{s_1, s_2\}$, где $s_1 \mid (q - \sqrt{3q} + 1)$ и $s_2 \mid (q + \sqrt{3q} + 1)$. Следовательно, $73 \mid (q^6 - 1)$. Так как $e(73, 3) = 12$, то $12 \mid 6(2n' + 1)$; противоречие.

Случай 6. Пусть $S \cong {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2n'+1} \geq 32$. Тогда $t(S) = 5$ и $n = 6$.

В силу леммы 2.1 и [31] аналогично предыдущим случаям $73 \mid (q^6+1)$ или $73 \mid (q^3 + 1)$. Поэтому $73 \mid (q^{12} - 1)$ и так как $e(73, 2) = 9$, то $9 \mid 12(2n' + 1)$ и существует нечетное число t такое, что $2n'+1 = 3t$. Таким образом, $(2^9+1) \mid |S|$ и $19 \in \pi(S)\backslash\pi(G)$; противоречие.

Шаг 4. Докажем, что простая группа S не изоморфна спорадической группе.

Пусть S — спорадическая группа. Тогда согласно [31] $t(S) \leq 11$ и так как $t(S) \geq t(G) - 1$, то $n \leq 15$.

• Пусть n — нечетное число. Тогда $n \in \{9, 15\}$ и $\rho(2, G) = \{2, r_n\}$. Легко видеть, что во всех случаях $r_n \notin \pi(S)$. В силу леммы 2.1 получаем противоречие. Например, $r_9 = 757 \notin \pi(S)$.

• Пусть n — четное число. Тогда $n = \{6, 8, 10, 12, 14\}$ и $\rho(2, G) = \{2, r_{2n}\}$. Но во всех случаях $r_{2n} \notin \pi(S)$; противоречие.

Шаг 5. Докажем, что простая группа S изоморфна $B_n(3)$ или $C_n(3)$.

Пока мы доказали, что S может быть изоморфна классической простой группе над полем характеристики 3.

Случай 1. Пусть $S \cong A_{m-1}(q)$, где $q = 3^\alpha$. Из леммы 2.1 получаем, что $t(G) - 1 \leq t(S)$. Тогда $[(3n + 5)/4] - 1 \leq [(m + 1)/2]$, откуда $n < m$, и так как $n \geq 6$, то $m \geq 7$.

• Пусть n нечетно. По замечанию 3.2 и лемме 2.1 $\rho(2, G) = \{2, r_n\} \subseteq \pi(S)$ и $r_n \nsim 2$ в $\Gamma(S)$. Согласно [31, табл. 6] $r_n = u_m$ или $r_n = u_{m-1}$.

Если $r_n = u_m$, то $n \mid \alpha m$ и по замечанию 3.2 $\alpha m \leq 2n$. Таким образом, $\alpha m = n$ или $\alpha m = 2n$. Так как $m > n$, имеем $m = 2n$ и $\alpha = 1$. Поэтому $r_{2n-1} \in \pi(S)\backslash\pi(G)$; противоречие.

Если $r_n = u_{m-1}$, то $\alpha(m - 1) = n$ или $2n$. Пусть $\alpha(m - 1) = n$. Если $\alpha \geq 2$, то, поскольку $n < m$, имеем $n < 2$; противоречие. Поэтому $\alpha = 1$, и тем самым $m = n + 1$. Так как $t(G) - 1 \leq t(S)$, то $(3n - 3)/4 < m/2 = (n + 1)/2$. Значит, $n < 5$; противоречие. Следовательно, $\alpha(m - 1) = 2n$. Если $\alpha = 1$, то

$m = 2n+1$. Ввиду того, что $r_{2n+1} \in \pi(S)\backslash\pi(G)$, получаем противоречие. Если $\alpha = 2$, то $m = n+1$, и аналогично вышесказанному приходим к противоречию. Если $\alpha \geq 3$, то $3(m-1) \leq \alpha(m-1) = 2n < 2m$ и потому $m < 3$; противоречие.

• Пусть n четно. По замечанию 3.2 и лемме 2.1 $\rho(2, G) = \{2, r_{2n}\} \subseteq \pi(S)$ и $r_{2n} \nsim 2$ в $\Gamma(S)$. Аналогично вышесказанному получаем, что $m = 2n$; противоречие.

Случай 2. Пусть $S \cong {}^2A_{m-1}(q)$, где $q = 3^\alpha$. Так как $t(G) - 1 \leq t(S)$, то $n < m$ и $m \geq 7$.

• Пусть n нечетно. По замечанию 3.2 и лемме 2.1 $\rho(2, G) = \{2, r_n\} \subseteq \pi(S)$ и $r_n \nsim 2$ в $\Gamma(S)$. Согласно [31, табл. 6] $r_n = u_{2m}$, если m нечетно, и $r_n \in \{u_{m/2}, u_m, u_{2m-2}\}$, если m четно. Для удобства дадим доказательство только для $r_n = u_{m/2}$ и $r_n = u_{2m-2}$, где m четно.

Пусть $r_n = u_{m/2}$. Тогда $n \mid \alpha m/2$. Известно, что $(3^{\alpha m} - 1) \mid |S|$. Таким образом, $\alpha m \leq 2n$, и так как $n \mid \alpha m/2$, то $\alpha m = 2n$. Поэтому $\alpha = 1$ и $m = 2n$, поскольку $n < m$. Следовательно, $r_{2(m-1)} = r_{2(2n-1)} \in \pi(S)\backslash\pi(G)$; противоречие.

Пусть $r_n = u_{2m-2}$. Таким образом, $\alpha(2m-2)$ равно n или $2n$. Предположим, что $\alpha(2m-2) = n$ и $\alpha \geq 2$. Поскольку $n < m$, то $2(2n-2) < n$; противоречие. Следовательно, $\alpha = 1$ и $2m - 2 = n$. Ввиду $t(G) - 1 \leq t(S)$ имеем $2m > 3n - 3$, откуда следует, что $4m < 9$; противоречие. Аналогично если $\alpha(2m-2) = 2n$ и $\alpha \geq 2$, то $n < 2$; противоречие. Поэтому $\alpha = 1$ и $m = n+1$. Так как $t(G) - 1 \leq t(S)$, то $3n < 2m + 3$ и тем самым $m < 6$; противоречие.

• Если n четно, то аналогично получаем противоречие.

Случай 3. Пусть $S \cong D_m(q)$, где $q = 3^\alpha$. Так как $t(G) - 1 \leq t(S)$, то $3n < 3m + 6$ или $n - 2 < m$. Поэтому $m \geq 5$.

• Пусть n нечетно. Тогда $r_n \in \pi(S)$ и $r_n \nsim 2$ в $\Gamma(S)$. Согласно [31, табл. 6] $r_n \in \{u_{m-1}, u_m, u_{2m-2}\}$.

Если $r_n = u_m$, то αm равно n или $\alpha m = 2n$. Пусть $\alpha m = n$ и $\alpha \geq 2$. Так как $n - 2 < m$, то $n < 4$; противоречие. Поэтому $\alpha = 1$ и $S \cong D_n(3)$. Известно, что $r_{2n} \notin \pi(S)$. Следовательно, $r_{2n} \in \pi(K) \cup \pi(\overline{G}/S)$. Так как $\pi(\overline{G}/S) \subseteq \pi(\mathrm{Out}(S)) = \{2\}$, то $r_{2n} \in \pi(K)$. В силу леммы 2.9 $r_n \in \pi(S)$ и $r_n \nsim r_{2n}$ в $\Gamma(G)$. Существует примитивный простой делитель r_n числа $3^n - 1$, и поскольку n нечетно, $D_n(3)$ содержит фробениусову подгруппу с ядром порядка $3^{n(n-1)/2}$ и циклическим дополнением порядка r_n по лемме 2.4, так что по теореме 3.1 $r_n \sim r_{2n}$ в $\Gamma(G)$; противоречие. Поэтому $\alpha m = 2n$. Если $\alpha \geq 3$, то так как $n - 2 < m$, то $n < 6$; противоречие. Следовательно, $\alpha \in \{1, 2\}$. Если $\alpha = 2$, то $S \cong D_n(9)$ и $r_{4(n-1)} \in \pi(S)\backslash\pi(G)$; противоречие. Если $\alpha = 1$, то $S \cong D_{2n}(3)$ и $r_{2(2n-1)} \in \pi(S)\backslash\pi(G)$; противоречие.

Если $r_n = u_{m-1}$ или u_{2m-2}, то аналогично $\alpha = 1$ и $m = n+1$. Следовательно, $S \cong D_{n+1}(3)$. Так как n нечетно, $(3^{2(n+3)/2} - 1) \mid |S|$. Поэтому $r_{n-1}, r_{n+3} \in \pi(D_{n+1}(3))$. Но $r_{n-1} \nsim r_{n+3}$ в $\Gamma(G) = \Gamma(B_n(3))$, в то время как $r_{n-1} \sim r_{n+3}$ в $\Gamma(D_{n+1}(3))$; противоречие.

• Пусть n четное. Тогда $r_{2n} \in \pi(S)$ и $r_{2n} \nsim 2$. Аналогично $S \cong D_{n+1}(3)$. Так как n четно, $r_{n+1} \in \pi(S)\backslash\pi(G)$; противоречие.

Случай 4. Пусть $S \cong {}^2D_m(q)$, где $q = 3^\alpha$.

Так как $t(G) - 1 \leq t(S)$, то $3n < 3m + 7$, откуда следует, что $n - 3 < m$. Поэтому $m \geq 4$.

• Пусть n нечетно. Тогда $r_n \in \pi(S)$ и $r_n \nsim 2$ в $\Gamma(S)$. Согласно [31, табл. 6] $r_n = u_{2m}$ или $r_n = u_{2m-2}$.

Если $r_n = u_{2m}$, то аналогично случаю 3 имеем $m = n$, $\alpha = 1$ и потому $S \cong {}^2D_n(3)$. Следовательно, $r_n \notin \pi(S)$, и так как $\pi(\mathrm{Out}(S)) = \{2\}$, то $r_n \in \pi(K)$. Известно, что $r_{n-1} \in \pi(S)$ и $r_n \nsim r_{n-1}$ в $\Gamma(G)$ по лемме 2.9. Далее, ${}^2D_n(3)$ содержит фробениусову подгруппу с ядром порядка 3^{2n-2} и циклическим дополнением порядка r_{2n-2}. Поэтому по теореме 3.1 $r_n \sim r_{2n-2}$ в $\Gamma(G)$. В силу леммы 2.9 получаем противоречие.

Если $r_n = u_{2m-2}$, то $S \cong {}^2D_{n+1}(3)$ и $r_{2(n+1)} \in \pi(S) \backslash \pi(G)$; противоречие.

• Пусть n четное. Тогда $r_{2n} \in \pi(S)$ и $r_{2n} \nsim 2$. Из [31, табл. 6] аналогично вышеприведенным рассуждениям следует, что $r_{2n} = u_{2m}$ и $n = \alpha m$.

Пусть $\alpha \geq 2$. Так как $n - 3 < m$, то $n < 6$; противоречие. Поэтому $\alpha = 1$ и $S \cong {}^2D_n(3)$. Заметим, что $r_{n-2} \nsim r_{2n-2}$ и $r_{n+2} \nsim r_{2n-2}$ в $\Gamma(G)$. Далее, $r_{n-2} \sim r_{n+2}$ в $\Gamma(G)$, но $r_{n-2} \nsim r_{n+2}$ в $\Gamma(S)$. Поскольку $\pi(\mathrm{Out}(S)) = \{2\}$, то $r_{n-2} \in \pi(K)$ или $r_{n+2} \in \pi(K)$. По лемме 2.4 ${}^2D_n(3)$ содержит фробениусову подгруппу с ядром порядка 3^{2n-2} и циклическим дополнением порядка r_{2n-2}. Поэтому в силу теоремы 3.1 $r_{n+2} \sim r_{2n-2}$ или $r_{n-2} \sim r_{2n-2}$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

Случай 5. Пусть $S \cong B_m(q)$, где $q = 3^\alpha$. Так как $t(G) - 1 \leq t(S)$, то $3n < 3m + 7$ или $n - 3 < m$. Поэтому $m \geq 4$.

• Пусть n — нечетное число. Тогда $r_n \in \pi(S)$ и $r_n \nsim 2$ в $\Gamma(S)$. Согласно [31, табл. 6] $r_n = u_m$ или $r_n = u_{2m}$.

Пусть $r_n = u_m$. Аналогично предыдущим случаям имеем $\alpha m = n$, так как $\pi(S) \subseteq \pi(G)$ и потому $2\alpha m \leq 2n$. Если $\alpha \geq 2$, то $n < 6$; противоречие. Поэтому $\alpha = 1$ и $S \cong B_n(3)$.

Если $r_n = u_{2m}$ или n четно, то аналогично $S \cong B_n(3)$.

Если $S \cong C_m(q)$, то $S \cong C_n(3)$.

Следовательно, $S \cong B_n(3)$ или $S \cong C_n(3)$. □

Теорема 3.6. *Если G — конечная группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(B_4(3))$, то G имеет единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный $B_4(3)$, $C_4(3)$ или ${}^2D_4(3)$.*

Доказательство. Согласно [25] граф простых чисел группы $B_4(3)$ состоит из двух компонент, причем $\pi_1(B_4(3)) = \{2, 3, 5, 7, 13\}$ и $\pi_2(B_4(3)) = \{41\}$. Ввиду [16, лемма 2.2] G не является фробениусовой или 2-фробениусовой группой, поэтому G — расширение нильпотентной группы K или $\pi_1(G)$-группы с помощью группы вида $S \cdot A$, где $S \leq S \cdot A \leq \mathrm{Aut}(S)$ для некоторой неабелевой простой группы S с несвязным $\Gamma(S)$. Имеем также, что $A = 1$ или A — π_1-группа, $s(S) \geq s(G)$ и для каждого $2 \leq i \leq s(G)$ существует $2 \leq j \leq s(S)$ такое, что $\pi_i(G) = \pi_j(S)$. Рассмотрим все возможности для S согласно таблицам из [31, 32].

Шаг 1. Пусть $S \cong A_m$, где $m-2$, $m-1$ или m — простое число. Так как $\pi_2(B_4(3)) = \pi_2(S)$, то $41 \leq m \leq 44$. Поэтому $37 \in \pi(S) \backslash \pi(B_4(3))$; противоречие.

Шаг 2. Докажем, что S неизоморфна спорадической простой группе.

Согласно [25] 41 не делит порядок никакой спорадической группы, кроме F_1. Если $S \cong F_1$, то $59 \in \pi(F_1) \backslash \pi(B_4(3))$; противоречие.

Шаг 3. Докажем, что S не изоморфна простой исключительной группе лиева типа. Так как доказательства аналогичны, рассмотрим детали только для ${}^3D_4(q)$.

Пусть $S \cong {}^3D_4(q)$, где $q = p^\alpha$. Тогда $\pi(q^4 - q^2 + 1) = \{41\}$. Поэтому $41 \mid (q^{12} - 1)$.

Пусть $p = 2$. Так как $e(41, 2) = 20$, то $20 \mid 12\alpha$, откуда следует, что $5 \mid \alpha$. Заметим, что $(q^6 - 1) \mid |S|$, поэтому $(2^{30} - 1) \mid |S|$. Таким образом, $151 \in \pi(S)\setminus\pi(B_4(3))$; противоречие.

Для $p \in \{3, 5, 7, 13\}$ получаем противоречие аналогичным образом.

Шаг 4. Докажем теперь, что S неизоморфна классической группе, кроме $B_4(3)$, $C_4(3)$ или ${}^2D_4(3)$. Так как доказательства аналогичны, опускаем детали некоторых случаев.

Случай 1. Пусть $S \cong {}^2A_{p'-1}(q)$, где $q = p^\alpha$.

Имеем
$$\pi((q^{p'} + 1)/(q + 1)(p', q + 1)) = \{41\}. \tag{1}$$
Известно, что $\pi(S) \subseteq \pi(B_4(3))$.

• Пусть $p = 2$. Так как $e(41, 2) = 20$, то $20 \mid 2\alpha p'$. Согласно (1) и лемме 2.3 $\alpha p' = 10$. Таким образом, $\alpha = 2$ и $p' = 5$. Поэтому $S \cong {}^2A_4(4)$ и $17 \in \pi(S)\setminus\pi(B_4(3))$; противоречие.

• Пусть $p = 3$. Тогда $8 \mid 2\alpha p'$. Так как $e(41, 3) = 8$, легко видеть, что уравнение (1) не имеет решений, поскольку p' — нечетное простое число.

Для $p \in \{5, 7, 13\}$ получаем противоречие аналогичным образом.

Случай 2. Пусть $S \cong {}^2D_n(q)$, где $q = p^\alpha$ и $n = 2^m \geq 4$.

Имеем аналогично вышесказанному
$$\pi((q^n + 1)/(2, q + 1)) = \{41\}. \tag{2}$$

• Пусть $p = 3$. Тогда $(\alpha, n) = (1, 4)$ — единственное решение (2). Поэтому $S \cong {}^2D_4(3)$.

Для $p \in \{2, 5, 7, 13\}$ легко убеждаемся, что (2) не имеет решений.

Случай 3. Пусть $S \cong C_n(q)$, где $q = p^\alpha$ и $n = 2^m \geq 2$. Тогда
$$\pi((q^n + 1)/(2, q - 1)) = \{41\}. \tag{3}$$

• Пусть $p = 3$. Тогда $(\alpha, n) = (1, 4), (2, 2)$ — решения (3). Следовательно, $S \cong C_2(9)$ или $C_4(3)$.

Если $S \cong C_2(9)$, то $7, 13 \notin \pi(C_2(9))$. Так как $\pi(\mathrm{Out}(C_2(9))) = \{2\}$, то $7, 13 \in \pi(K)$. Тогда $7 \sim 13$. Поскольку K нильпотентна, получаем противоречие. Поэтому $S \cong C_4(3)$.

Для $p \in \{2, 5, 7, 13\}$ уравнение (3) не имеет решений.

Для удобства опускаем детали для остальных случаев и аналогично вышесказанному выводим, что S изоморфна $B_4(3)$, $C_4(3)$ или ${}^2D_4(3)$. □

Теорема 3.7. *Пусть G — конечная группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(B_n(3))$, где $n \geq 6$ не простое. Тогда*

(i) *если n нечетно, то $G \cong B_n(3)$ или $G/K \cong C_n(3)$, где K — элементарная абелева r_m-группа такая, что $m \mid n$;*

(ii) *если n четно, то $G/O_2(G) \cong B_n(3)$ или $G/K \cong C_n(3)$, где K — элементарная абелева r_m-группа такая, что $\eta(m) \leq n/2$ или n/m нечетно.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.1 и теоремы 3.5 существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq G/K \leq \mathrm{Aut}(S)$ и K — максимальная нормальная разрешимая подгруппа G. Кроме того, S изоморфна $B_n(3)$ или $C_n(3)$.

Так как $|\operatorname{Out}(S)| = 2$, то $G/K = S$ или $G/K = S \cdot 2$ — расширение S с помощью диагонального автоморфизма S. Если S — простая группа лиева типа и $\widetilde{S} = S \cdot d$, где d — диагональный автоморфизм группы S, то $\widetilde{S}$ — группа лиева типа, в которой максимальные торы $\widetilde{T}$ имеют порядок $|T|d$, где $T = \widetilde{T} \cap S$ (в силу [34]). Поэтому $2 \sim r_n$ и $2 \sim r_{2n}$ в $\Gamma(S \cdot 2)$. Так как $2 \nsim r_n$ или $2 \nsim r_{2n}$ в $\Gamma(G)$, то $G/K = S$. Пусть существует p такое, что $p \mid |K|$. В силу [19] можно считать, что K — элементарная абелева p-группа. Согласно [35] $B_n(3)$ и $C_n(3)$ действуют унисингулярно. Следовательно, $p \neq 3$. Пусть $m = e(p, 3)$.

• Пусть $S \cong B_n(3)$.

Если n нечетно, то по лемме 2.4 G/K содержит фробениусову подгруппу с ядром порядка $3^{n(n-1)/2}$ и циклическим дополнением порядка r_n. Заметим, что $p \neq 3$, поэтому если $p \nsim r_n$ в $\Gamma(G)$, то по теореме 3.1 получаем противоречие. Таким образом, $p \sim r_n$. Тем самым $p \neq 2$, ибо $r_n \in \rho(2, G)$. Так как по лемме 2.9 $p \sim r_n$, то n/m — нечетное целое число. Следовательно, m нечетно. Покажем, что $p \nsim r_{2n}$. Если $p \sim r_{2n}$, то по лемме 2.9 $2n/m$ нечетное; противоречие с нечетностью m. Поэтому $p \nsim r_{2n}$. Согласно [33] ${}^2D_n(3) \leq B_n(3)$, стало быть, ${}^2D_n(3) \leq G/K$. Следовательно, по лемме 2.4 G/K содержит фробениусову подгруппу вида $3^{2n-2} : r_{2n-2}$. Ввиду того, что $p \nsim r_{2n}$, по теореме 3.1 $p \sim r_{2n-2}$. Как замечено выше, m нечетно. Аналогично так как $p \sim r_{2n-2}$ и $(2n-2)/m$ не является нечетным целым числом, то $\eta(m) = 1$. Поскольку m нечетно, $m = 1$; противоречие. Поэтому $K = 1$.

Пусть n четно. Аналогично G/K содержит фробениусову подгруппу вида $3^{(n-1)(n-2)/2} : r_{n-1}$. Покажем, что $p \nsim r_{2n}$ или $p \nsim r_{2n-2}$. Если $p \sim r_{2n}$ и $p \sim r_{2n-2}$, то по лемме 2.9 $2n/m$ и $(2n-2)/m$ нечетны или $2n/m$ нечетно и $\eta(m) = 1$. Поэтому $m = 2$ и, значит, $p = 2$; противоречие с $r_{2n} \in \rho(2, G)$. Так как $p \neq 3$, по теореме 3.1 $p \sim r_{n-1}$. Из [33] имеем $B_{n-2}(3) \leq B_n(3)$. По лемме 2.4 G/K содержит фробениусову подгруппу вида $3^{(n-3)(n-4)/2} : r_{n-3}$. Следовательно, по теореме 3.1 $p \sim r_{n-3}$. Так как $p \sim r_{n-1}$ и $p \sim r_{n-3}$, по лемме 2.9 $m \in \{1, 2, 3\}$ и $p \in \{2, 13\}$.

Пусть $p = 13$. Ввиду [33] ${}^2D_n(3) \leq B_n(3)$. В силу леммы 2.4 ${}^2D_n(3)$ содержит фробениусову подгруппу вида $3^{2n-2} : r_{2n-2}$. Поскольку $p \nsim r_{2n}$ или $p \nsim r_{2n-2}$, по теореме 3.1 $13 \sim r_{2n-2}$; противоречие с $e(13, 3) = 3$. Следовательно, K — 2-группа.

• Пусть $S \cong C_n(3)$.

По лемме 2.4 $C_n(3)$ содержит фробениусову подгруппу вида $3^n : (3^n - 1)/2$. Аналогично $p \sim r_n$. Поэтому если n нечетно, то n/m — нечетное натуральное число по лемме 2.9 и если n четно, то $\eta(m) \leq n/2$ или n/m нечетно. □

В [2] доказано, что $h(\pi_e(B_p(3))) = 1$, где $p > 3$ — нечетное простое число. В следующей теореме обобщим этот результат и докажем, что если n нечетно, то $B_n(3)$ распознаваема по спектру.

В [36] доказано, что если G — конечная группа такая, что $\pi_e(G) = \pi_e(B_4(3))$, то в G имеется единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный $B_4(3)$, $C_4(3)$ или ${}^2D_4(3)$. Поэтому в дальнейшем рассматриваем $n \geq 6$.

Теорема 3.8. *Если $n \geq 6$ нечетно, то конечная простая группа $B_n(3)$ распознаваема по спектру. Если $n \geq 6$ четно, то $B_n(3)$ квазираспознаваема по спектру.*

Доказательство. Согласно [37] $3(3^{n-1} + 1) \in \pi_e(C_n(3)) \setminus \pi_e(B_n(3))$. Поэтому по теореме 3.7 если $n \geq 6$ нечетно, то $G \cong B_n(3)$, так что $B_n(3)$ распознаваема по спектру, и если $n \geq 6$ четно, то $G/O_2(G) \cong B_n(3)$, т. е. $B_n(3)$ квазираспознаваема по спектру. $\square$

Следствие 3.9. *Если G — конечная группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(B_n(3))$ и $|G| = |B_n(3)|$, где $n \geq 6$, то $G \cong B_n(3)$ или $C_n(3)$.*

Доказательство. По теореме 3.5 S изоморфна $B_n(3)$ или $C_n(3)$. Заметим, что $|B_n(3)| = |C_n(3)|$ в силу [25]. Следовательно, $|G| = |S|$, и, значит, $|G| = |G/K|$. Поэтому $|K| = 1$. Аналогично доказательству теоремы 3.7 G изоморфна $B_n(3)$ или $C_n(3)$. $\square$

Следствие 3.10. *Если G — конечная группа такая, что $\pi_e(G) = \pi_e(B_n(3))$ и $|G| = |B_n(3)|$, где $n \geq 6$, то $G \cong B_n(3)$.*

Доказательство. По теореме 3.8 и следствию 3.9 имеем $G \cong B_n(3)$, так как согласно [37] $\pi_e(B_n(3)) \neq \pi_e(C_n(3))$. $\square$

Таким образом, дан положительный ответ на вопрос 12.39 в [24] для простой группы $B_n(3)$. Заметим, что положительный ответ на этот вопрос был получен также в [38].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Momen Z., Khosravi B.* On r-recognition by prime graph of $B_p(3)$ where p is an odd prime // Monatsh. Math. 2012. V. 166, N 2. P. 239–253.
2. *Зиновьева М. Р., Шен Р., Ши В.* Распознавание простых групп $B_p(3)$ по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 303–315.
3. *Hagie M.* The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. V. 31, N 9. P. 4405–4424.
4. *Khosravi B., Khosravi B., Khosravi B.* Groups with the same prime graph as a CIT simple group // Houston J. Math. 2007. V. 33, N 4. P. 967–977.
5. *Хосрави А., Хосрави Б.* Квазираспознавание простой группы $^2G_2(q)$ по графу простых чисел // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 707–716.
6. *Заварницын А. В.* Распознавание конечных групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.
7. *Khosravi B., Khosravi B., Khosravi B.* On the prime graph of $\mathrm{PSL}(2,p)$ where $p > 3$ is a prime number // Acta Math. Hung. 2007. V. 116, N 4. P. 295–307.
8. *Khosravi B.* n-Recognition by prime graph of the simple group $\mathrm{PSL}(2,q)$ // J. Algebra Appl. 2008. V. 7, N 6. P. 735–748.
9. *Хосрави А., Хосрави Б.* 2-Распознаваемость $\mathrm{PSL}(2,p^2)$ по графу простых чисел // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 934–944.
10. *Akhlaghi Z., Khatami M., Khosravi B.* Quasirecognition by prime graph of the simple group $^2F_4(q)$ // Acta. Math. Hung. 2009. V. 122, N 4. P. 387–397.
11. *Khosravi B., A. Babai* Quasirecognition by prime graph of $F_4(q)$, where $q = 2^n > 2$ // Monatsh. Math. 2011. V. 162, N 3. P. 289–296.
12. *Бабаи А., Хосрави Б.* Распознавание групп $^2D_{2^m+1}(3)$ по графу простых чисел // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 993–1003.
13. *Babai A., Khosravi B., Hasani N.* Quasirecognition by prime graph of $^2D_p(3)$, where $p = 2^n+1 \geq 5$ is a prime // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2). 2009. V. 32, N 3. P. 343–350.
14. *Khosravi B., Akhlaghi Z., Khatami M.* Quasirecognition by prime graph of simple group $D_n(3)$ // Publ. Math. Debrecen. 2011. V. 78, N 2. P. 469–484.
15. *Khatami M., Khosravi B., Akhlaghi Z.* NCF-distinguishability by prime graph of $\mathrm{PGL}(2,p)$, where p is a prime // Rocky Mountain J. Math. 2011. V. 41, N 5. P. 1523–1545.
16. *Akhlaghi Z., Khosravi B., Khatami M.* Characterization by prime graph of $\mathrm{PGL}(2,p^k)$ where p and $k > 1$ are odd // Int. J. Algebra Comput. 2010. V. 20, N 7. P. 847–873.
17. *Хосрави Б.* Квазираспознаваемость $L_{10}(2)$ по графу простых чисел // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 446–452.
18. *Khosravi B.* Some characterizations of $L_9(2)$ related to its prime graph // Publ. Math. Debrecen. 2009. V. 75, N 3–4. P. 375–385.

19. *Khosravi B., Khosravi B., Khosravi B.* A characterization of the finite simple group $L_{16}(2)$ by its prime graph // Manuscripta Math. 2008. V. 126, N 1. P. 49–58.
20. *Khosravi B., Moradi H.* Quasirecognition by prime graph of finite simple groups $L_n(2)$ and $U_n(2)$ // Acta Math. Hung. 2011. V. 132, N 1–2. P. 140–153.
21. *Khosravi B., Moradi H.* Quasirecognition by prime graph of some orthogonal groups over the binary field // J. Algebra Appl. 2012. V. 11, N 3. P. 1–15.
22. *Shi W., Tang C. Y.* A characterization of some finite orthogonal simple groups // Progr. Natur. Sci. 1997. V. 7, N 2. P. 155–162.
23. *Lipschutz S., Shi W.* Finite groups whose element orders do not exceed twenty // Progr. Natur. Sci. 2000. V. 10, N 1. P. 11–21.
24. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. 16-е изд. Новосибирск: Ин-т математики им. С. С. Соболева, 2006.
25. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985.
26. *Васильев А. В., Горшков И. Б.* О распознавании конечных простых групп со связным графом простых чисел // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 292–299.
27. *Zsigmondy K.* Zür Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3, Heft 1. S. 265–284.
28. *He H., Shi W.* Recognition of some finite simple groups of type $D_n(q)$ by spectrum // Int. J. Algebra Comput. 2009. V. 19, N 5. P. 681–698.
29. *Мазуров В. Д.* Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
30. *Ireland K., Rosen M.* A classical introduction to modern number theory. New York: Springer-Verl., 1990.
31. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
32. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
33. *Stensholt E.* Certain embeddings among finite groups of Lie type // J. Algebra. 1978. V. 53, N 1. P. 136–187.
34. *Lucido M. S.* Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1999. V. 102. P. 1–14.
35. *Guralnick R. M., Tiep P. H.* Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. V. 6, N 3. P. 271–310.
36. *Васильев А. В., Горшков И. Б., Гречкосеева М. А., Кондратьев А. С., Старолетов А. М.* О распознаваемости по спектру конечных простых групп типов B_n, C_n и ${}^2D_n$ при $n = 2^k$ // Тр. Ин-та математики и механики Уральского отд-ния РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 58–73.
37. *Shi W.* Pure quantitative characterization of finite simple groups // Front. Math. China. 2007. V. 2, N 1. P. 123–125.
38. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д.* Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 685–728.

Статья поступила 25 августа 2011 г.

Zahra Momen (Момен Захра), Behrooz Khosravi (Хосрави Бехруз)
Dept. of Pure Math., Faculty of Math. and Computer Sci.
Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic)
424, Hafez Ave., Tehran 15914, Iran
zahramomen@yahoo.com, bkhosravi@aut.ac.ir, khosravibbb@yahoo.com