Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 519.65

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С НЕСТРОГО ЯКОБИЕВОЙ МАТРИЦЕЙ

В. В. Богданов

Аннотация. Для трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений с нестрого якобиевой диагонально доминантной по столбцам матрицей установлены достаточные условия, при выполнении которых все компоненты решения системы неотрицательны.

Ключевые слова: система линейных уравнений, матрица монотонного вида, трехдиагональная матрица, неотрицательное решение.

При решении систем линейных алгебраических уравнений в различных приложениях порой возникает вопрос: будет ли решение положительным (неотрицательным), если правая часть положительна (неотрицательна)? Коллатцем [1] даже введен класс матриц *монотонного вида* таких, что при любой неотрицательной правой части решение системы неотрицательно. Конечно, решение может оказаться неотрицательным для некоторой конкретной правой части и в том случае, когда матрица системы не принадлежит указанному классу. Поэтому представляет интерес вопрос о дополнительных ограничениях на правую часть, обеспечивающих неотрицательность решения системы с матрицами из других классов.

Для трехдиагональных систем уравнений В. Л. Мирошниченко [2] нашел ограничения на правую часть, гарантирующие неотрицательность решения. Это сделано им для класса матриц с диагональным преобладанием и неотрицательными элементами. Его работа [2] послужила толчком для исследований такого рода и нашла многочисленные применения, например, в задачах формосохраняющей сплайн-интерполяции [3–10].

Предложенную в [2] технику удалось распространить на класс матриц, имеющих диагональное преобладание по столбцам [11] или приводящихся к ним [12], причем с сохранением установленных в [2] дополнительных ограничений на правую часть. Эта же идея успешно использована [13] для класса ленточных циркулянтных матриц, разлагающихся в произведение трехдиагональных диагонально доминантных матриц.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–07–00447) и программ Интеграционных проектов СО РАН и УрО РАН (проект 2012–32).

Ю. С. Завьялов [14] развил технику для трехдиагональных матриц с элементами разных знаков (нестрого якобиевых), по-прежнему имеющих диагональное преобладание. Правда, это привело к некоторому усложнению дополнительных ограничений на правую часть.

В настоящей работе показано, что подход Ю. С. Завьялова может быть применен и для матриц с диагональным преобладанием по столбцам при сохранении установленных в [14] ограничений на правую часть. Отметим, что потребность рассмотрения именно таких матриц вызвана задачей комонотонной интерполяции кубическими сплайнами [15].

Рассмотрим задачу поиска условий неотрицательности решения $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$ системы уравнений

$$A\mathbf{z} = \mathbf{d} \tag{1}$$

с правой частью $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)^T$, т. е. требуется установить, каким условиям должны удовлетворять компоненты вектора $\mathbf{d}$, чтобы выполнялось неравенство $\mathbf{z} \geq 0$ (здесь и далее для вектора $\mathbf{v} = (v_i)$ полагаем $\mathbf{v} \geq 0$, если $v_i \geq 0$ для каждого i). Обычно в таких задачах условие неотрицательности решения диктуется его согласованностью с неотрицательностью правой части, поэтому традиционно будем считать $\mathbf{d} \geq 0$.

Нас интересуют системы с трехдиагональной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

имеющей положительную главную диагональ $a_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, диагональное преобладание по столбцам:

$$a_1 > |c_2|, \quad a_i > |b_{i-1}| + |c_{i+1}|, \ i = 2, \dots, n-1, \quad a_n > |b_{n-1}|, \tag{3}$$

для которой выполнены (как принято говорить) нестрогие якобиевы условия

$$c_{i+1} b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-1. \tag{4}$$

Применим к системе (1) преобразование, заключающееся в умножении обеих ее частей на матрицу G слева, так что новая система $GA\mathbf{z} = G\mathbf{d}$ имеет матрицу GA монотонного вида. Тогда очевидно, что условия $G\mathbf{d} \geq 0$ будут достаточными для неотрицательности решения системы (1). Такая матрица всегда существует: например, $G = A^{-1}$. Однако мы ставим задачу отыскания таких условий, проверка которых, если это возможно, не требует решения исходной системы или обращения исходной матрицы.

Тривиальным является случай, когда в (4) для всех $i = 1, \dots, n-1$ выполнены неравенства $c_{i+1} \leq 0$, $b_i \leq 0$. Тогда матрица A уже принадлежит классу матриц монотонного вида (см., например, [1, теорема 2]), поскольку обратная к ней не содержит отрицательных элементов, что является необходимым и достаточным условием для матриц этого класса. В качестве G можно взять единичную матрицу.

Следовательно, достаточным условием неотрицательности решения системы уравнений (1) с такой матрицей является требование неотрицательности всех компонент правой части без каких-либо иных дополнительных ограничений.

Если в (4) встречаются положительные элементы, то матрица A может быть представлена в блочно-трехдиагональном виде:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & & \\ C_2 & A_2 & B_2 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & C_{m-1} & A_{m-1} & B_{m-1} \\ & & & C_m & A_m \end{pmatrix}, \tag{5}$$

так, что главную блочную диагональ образуют квадратные матрицы A_i, у которых вне главной диагонали нет положительных элементов.

В частности, если элементы матрицы A неотрицательны, то все блоки будут иметь размерность 1, если же вне главной диагонали нет положительных элементов, то матрица A состоит из единственного блока.

В общем случае блоки A_k — квадратные невырожденные матрицы порядка $n_k \geq 1$, $k = 1, \dots, m$, $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ — обладают вследствие (3) диагональным преобладанием по столбцу, имеют положительную главную диагональ и неположительные (либо отсутствующие при $n_k = 1$) внедиагональные элементы и потому являются матрицами монотонного вида.

Остальные блоки определяются блоками главной диагонали и квадратными, вообще говоря, могут не быть. Их размерности соответствуют размерностям соседних диагональных блоков. Блоки B_k — прямоугольные $n_k \times n_{k+1}$-матрицы, в которых все элементы — нули, кроме, возможно, одного $B_k(n_k, 1) \geq 0$, $k = 1, \dots, m-1$ (здесь и далее элементы матрицы T будем обозначать через $T(i, j)$, где i — номер строки, j — номер столбца). Блоки C_k — $n_k \times n_{k-1}$-матрицы, в которых также все элементы — нули, кроме, возможно, одного $C_k(1, n_{k-1}) \geq 0$, $k = 2, \dots, m$.

В качестве G возьмем, пользуясь блочным представлением A, блочно-трехдиагональную матрицу $G = 2E - AD^{-1}$, где $D = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_m)$ — блочно-диагональная матрица, E — единичная матрица порядка n. Имеем

$$G = \begin{pmatrix} E_1 & -B_1A_2^{-1} & & & \\ -C_2A_1^{-1} & E_2 & -B_2A_3^{-1} & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -C_{m-1}A_{m-2}^{-1} & E_{m-1} & -B_{m-1}A_m^{-1} \\ & & & -C_mA_{m-1}^{-1} & E_m \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где E_k — единичные матрицы, $\dim E_k = \dim A_k = n_k$, $k = 1, \dots, m$.

Такая форма представления преобразования, предложенного в [14], удобна для исследования свойств новой системы уравнений.

Нас интересует матрица GA. Заметим, что блочные диагонали, примыкающие к ее главной блочной диагонали, обратятся в нули, а пара следующих за ними верхней и нижней блочных диагоналей, вообще говоря, заполнятся. Ясно, что GA имеет блочно-пятидиагональный вид:

$$GA = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_1 & \mathbf{0} & -\widetilde{B}_1 & & & & \\ \mathbf{0} & \widetilde{A}_2 & \mathbf{0} & -\widetilde{B}_2 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & -\widetilde{C}_k & \mathbf{0} & \widetilde{A}_k & \mathbf{0} & -\widetilde{B}_k & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & -\widetilde{C}_{m-1} & \mathbf{0} & \widetilde{A}_{m-1} & \mathbf{0} \\ & & & & -\widetilde{C}_m & \mathbf{0} & \widetilde{A}_m \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}
\widetilde{A}_1 = A_1 - B_1 A_2^{-1} C_2, \\
\widetilde{A}_k = -C_k A_{k-1}^{-1} B_{k-1} + A_k - B_k A_{k+1}^{-1} C_{k+1}, \quad k = 2, \ldots, m-1, \\
\widetilde{A}_m = -C_m A_{m-1}^{-1} B_{m-1} + A_m, \\
\widetilde{B}_k = B_k A_{k+1}^{-1} B_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, m-2, \\
\widetilde{C}_k = C_k A_{k-1}^{-1} C_{k-1}, \quad k = 3, \ldots, m.
\end{gathered} \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть матрица* (2) *удовлетворяет условиям* (3) *и* (4). *Тогда* (7) *является матрицей монотонного вида.*

Доказательство. При $m = 1$ матрица A состоит из единственного блока A_1, матрица G является единичной, и утверждение очевидно.

Покажем сначала, что все элементы вне главной диагонали GA неположительны, затем установим, что сумма элементов в каждом ее столбце положительна. Из этого будет следовать, что элементы главной диагонали также положительны и GA имеет диагональное преобладание по столбцу.

Покажем, что вне диагональных блоков $\widetilde{A}_k$ нет положительных элементов. Действительно, по построению блочной структуры матрицы A ее диагональные блоки A_k обладают свойством (3) и не содержат положительных элементов вне главной диагонали, следовательно, в соответствии с теоремой 2 из [1, § 23.1] они монотонного вида, поэтому матрицы A_k^{-1} не содержат отрицательных элементов. Блоки C_k и B_k не содержат отрицательных элементов по определению, следовательно, все $\widetilde{B}_k$ и $\widetilde{C}_k$ также не имеют отрицательных элементов.

Установим, что в матрице $\widetilde{A}_k$ вне главной диагонали нет положительных элементов. Действительно, при $i \neq j$ для $1 < k < m$ имеем

$$\widetilde{A}_k(i,j) = -\sum_{p,q} C_k(i,p) A_{k-1}^{-1}(p,q) B_{k-1}(q,j) + A_k(i,j) - \sum_{p,q} B_k(i,p) A_{k+1}^{-1}(p,q) C_{k+1}(p,j). \tag{9}$$

Поскольку в первой сумме нет слагаемых, содержащих одновременно ненулевые сомножители $C_k(1, n_{k-1})$ и $B_{k-1}(n_{k-1}, 1)$, а во второй нет слагаемых, содержащих одновременно ненулевые сомножители $B_k(n_k, 1)$ и $C_{k+1}(1, n_k)$, обе суммы обращаются в нуль. Следовательно, $\widetilde{A}_k(i,j) = A_k(i,j) \leq 0$. При $k = 1$ и $k = m$ в равенстве (9) отсутствует одна из сумм: соответственно первая и последняя.

Докажем, что сумма элементов в столбцах матрицы GA положительна. Пусть $m \geq 5$. Рассмотрим блочный столбец, содержащий $\widetilde{A}_k$, $k \neq 1, 2, m-1, m$.

Отбросим неинформативные с этой точки зрения крайние верхние и нижние нулевые блоки этого блочного столбца и представим получившийся сегмент в виде суммы трех столбцов:

$$\begin{pmatrix} -\widetilde{B}_{k-2} \\ \mathbf{0} \\ \widetilde{A}_k \\ \mathbf{0} \\ -\widetilde{C}_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_{k-2} \\ A_{k-1} \\ -C_k \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} A_{k-1}^{-1} B_{k-1} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -B_{k-1} \\ A_k \\ -C_{k+1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -B_k \\ A_{k+1} \\ -C_{k+2} \end{pmatrix} A_{k+1}^{-1} C_{k+1}. \tag{10}$$

Суммы элементов в столбцах матриц правой части, представленных скобками, положительны. Действительно, эти столбцы содержат все ненулевые элементы соответствующих столбцов матрицы A, которая по условию имеет диагональное преобладание по столбцам. Множители $A_{k-1}^{-1}B_{k-1}$ и $A_{k+1}^{-1}C_{k+1}$ в крайних слагаемых — неотрицательные матрицы, причем единственным содержащим ненулевые элементы столбцом матрицы $A_{k-1}^{-1}B_{k-1}$ является ее первой столбец, а матрицы $A_{k+1}^{-1}C_{k+1}$ — последний. Так что суммы элементов в столбцах первого и третьего слагаемых разложения отличаются от аналогичных сумм в сомножителях, представленных скобками, неотрицательными множителями. Поэтому суммы элементов в столбцах каждого блочного столбца, а значит, и всей матрицы GA больше нуля. Так как все элементы вне главной диагонали матрицы GA неположительны, все элементы ее главной диагонали положительны.

Рассуждения, приведенные для средних блочных столбцов, переносятся и на случаи оставшихся четырех крайних столбцов.

При $k = 1$ и $k = m$ разложение получается из (10) отбрасыванием отсутствующих первого слагаемого и первых двух блочных строк в первом случае и соответственно последнего слагаемого и последних двух строк — во втором. При $k = 1$, например, разложение принимает вид

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}_1 \\ \mathbf{0} \\ -\widetilde{C}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ -C_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B_1 \\ A_2 \\ -C_3 \end{pmatrix} A_2^{-1}C_2. \tag{11}$$

Аналогично для $k = 2$ и $k = m - 1$ достаточно в (10) исключить из рассмотрения первую и соответственно последнюю блочные строки. При $k = 2$, например, получаем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \widetilde{A}_2 \\ \mathbf{0} \\ -\widetilde{C}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ -C_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} A_1^{-1}B_1 + \begin{pmatrix} -B_1 \\ A_2 \\ -C_3 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -B_2 \\ A_3 \\ -C_4 \end{pmatrix} A_3^{-1}C_3. \tag{12}$$

В заключение рассмотрим $m = 2, 3, 4$. При $m = 4$ остаются только крайние столбцы (11) и (12).

При $m = 3$ крайние столбцы представляются в виде (11), а для анализа среднего столбца, не содержащего ненулевых блоков, кроме $\widetilde{A}_2$, рассматриваем только средние три строки представления (10).

При $m = 2$ матрица GA блочно-диагональная и первые две строки представления (11) дают результат для $k = 1$ (аналогично для $k = 2$).

Следовательно, в соответствии с теоремой 2 из [1, § 23.1] GA — матрица монотонного вида, что и требовалось доказать.

Таким образом, свойства матриц монотонного вида позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 2. *Для того чтобы система уравнений* (1) *с невырожденной трехдиагональной матрицей* (2), *удовлетворяющей нестрогим якобиевым условиям* (4), *с положительной главной диагональю и диагональным преобладанием по столбцам* (3) *имела неотрицательное решение* $\mathbf{z} \geq 0$, *достаточно, чтобы выполнялось условие* $G\mathbf{d} \geq 0$, *где матрица* G *имеет вид* (6).

В случае, когда матрица (2) не содержит отрицательных элементов, все блоки одномерные, $m = n$:

$$A_i = (a_i),\ i = 1, \dots, n; \quad B_i = (b_i),\ C_{i+1} = (c_{i+1}),\ i = 1, \dots, n-1. \tag{13}$$

В этом частном случае условия неотрицательности решения, указанные в теореме 2, установлены в [11] и принимают хорошо известный [2] вид:

$$\begin{gathered} d_1 - d_2\frac{b_1}{a_2} \geq 0, \\ d_j - d_{j-1}\frac{c_j}{a_{j-1}} - d_{j+1}\frac{b_j}{a_{j+1}} \geq 0, \quad j = 2,\ldots,n-1, \\ d_n - d_{n-1}\frac{c_n}{a_{n-1}} \geq 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Другой крайний случай — когда все b_i, c_{i+1}, $i = 1,\ldots,n-1$, отрицательны, т. е. $m = 1$. Тогда матрица A, представленная одним блоком, уже монотонного вида и для неотрицательности решения дополнительных условий, кроме традиционных, $d_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$, не возникает.

Наконец, приведем еще один очень полезный для практики [15] пример. Пусть система представлена трехдиагональной матрицей A вида (2), (3), все элементы которой, за исключением двух b_l и c_{l+1}, $2 < l < n-2$, неотрицательны, а элементы главной диагонали положительны:

$$b_i \geq 0,\ c_{i+1} \geq 0,\ i = 1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,n-1, \quad b_l \leq 0,\ c_{l+1} \leq 0. \tag{15}$$

Тогда в представлении (5) имеем $m = n-1$,

$$\begin{gathered} C_i = (c_i), \quad A_i = (a_i), \quad B_i = (b_i), \quad i = 1,\ldots,l-2; \\ C_{l-1} = (c_{l-1}), \quad A_{l-1} = (a_{l-1}), \quad B_{l-1} = (\,b_{l-1} \quad 0\,); \\ C_l = \begin{pmatrix} c_l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_l = \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ c_{l+1} & a_{l+1} \end{pmatrix}, \quad B_l = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{l+1} \end{pmatrix}; \\ C_{l+1} = (\,0 \quad c_{l+2}\,), \quad A_{l+1} = (a_{l+2}), \quad B_{l+1} = (b_{l+2}); \\ C_i = (c_{i+1}), \quad A_i = (a_{i+1}), \quad B_i = (b_{i+1}), \quad i = l+2,\ldots,m. \end{gathered}$$

В этом случае теорема 2 устанавливает простые и легко проверяемые условия, которым должна удовлетворять правая часть $\mathbf{d}$ системы уравнений с матрицей (15), чтобы решение $\mathbf{z}$ было неотрицательным. А именно, система (1) с матрицей, подчиненной условиям (15), имеет неотрицательное решение, если выполнены неравенства

$$\begin{gathered} d_1 - d_2\frac{b_1}{a_2} \geq 0, \quad d_n - d_{n-1}\frac{c_n}{a_{n-1}} \geq 0, \\ d_j - d_{j-1}\frac{c_j}{a_{j-1}} - d_{j+1}\frac{b_j}{a_{j+1}} \geq 0, \quad j = 2,\ldots,l-2,l+3,\ldots,n-1, \\ d_{l-1} - d_{l-2}\frac{c_{l-1}}{a_{l-2}} - d_l\frac{b_{l-1}a_{l+1}}{a_la_{l+1} - b_lc_{l+1}} + d_{l+1}\frac{b_lb_{l-1}}{a_la_{l+1} - b_lc_{l+1}} \geq 0, \\ d_l - d_{l-1}\frac{c_l}{a_{l-1}} \geq 0, \quad d_{l+1} - d_{l+2}\frac{b_{l+1}}{a_{l+2}} \geq 0, \\ d_{l+2} + d_l\frac{c_{l+1}c_{l+2}}{a_la_{l+1} - b_lc_{l+1}} - d_{l+1}\frac{c_{l+2}a_l}{a_la_{l+1} - b_lc_{l+1}} - d_{l+3}\frac{b_{l+2}}{a_{l+3}} \geq 0. \end{gathered}$$

Они отличаются от (14) только четырьмя неравенствами: два связывают не три, а четыре компоненты правой части с индексами, ближайшими к l и $l+1$, а другие два неравенства — только пары компонент.

Отметим, что преобразование, которое используется в теореме 1, совпадает с приведенным в [14], где исследовался случай традиционного диагонального преобладания (по строкам), значит, и условия на правую часть системы уравнений получаются те же. Кроме того, схема доказательства теоремы 1 позволяет получить этот результат при наличии любого диагонального преобладания, в том числе, как в работе [14], по строкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.

2. *Miroshnichenko V. L.* Convex and monotone spline interpolation // Constructive theory of functions'84. Sofia, 1984. P. 610–620.

3. *Мирошниченко В. Л.* Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 // Приближение сплайнами. Вып. 137. Вычислительные системы. Новосибирск: Ин-т математики, 1990. С. 31–57.

4. *Мирошниченко В. Л.* Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных параболических сплайнов // Сплайны и их приложения. Вып. 142. Вычислительные системы. Новосибирск: Ин-т математики, 1991. С. 3–14.

5. *Мирошниченко В. Л.* Изогеометрические свойства и погрешность аппроксимации взвешенных кубических сплайнов // Сплайны и их приложения. Вып. 154. Вычислительные системы. Новосибирск: Ин-т математики, 1995. С. 127–154.

6. *Мирошниченко В. Л.* Оптимизация вида рационального сплайна // Сплайн-функции и их приложения. Вып. 159. Вычислительные системы. Новосибирск: Ин-т математики, 1997. С. 87–109.

7. *Завьялов Ю. С.* Монотонная интерполяция обобщенными кубическими сплайнами класса C^2 // Интерполяция и аппроксимация сплайнами. Вып. 147. Вычислительные системы. Новосибирск: Ин-т математики, 1992. С. 44–67.

8. *Завьялов Ю. С.* Выпуклая интерполяция обобщенными кубическими сплайнами класса C^2 // Сплайны и их приложения. Вып. 154. Вычислительные системы. Новосибирск: Ин-т математики, 1995. С. 15–64.

9. *Волков Ю. С.* О монотонной интерполяции кубическими сплайнами // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, № 6. С. 14–24.

10. *Волков Ю. С.* Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 231–241.

11. *Богданов В. В., Волков Ю. С.* Выбор параметров обобщенных кубических сплайнов при выпуклой интерполяции // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 5–22.

12. *Волков Ю. С., Богданов В. В., Мирошниченко В. Л., Шевалдин В. Т.* Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами // Мат. заметки. 2010. Т. 88. № 6. С. 836–844.

13. *Волков Ю. С.* О неотрицательном решении системы уравнений с симметрической циркулянтной матрицей // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 2. С. 170–180.

14. *Завьялов Ю. С.* О неотрицательном решении системы уравнений с нестрого якобиевой матрицей // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1303–1307.

15. *Богданов В. В.* Достаточные условия комонотонной интерполяции кубическими сплайнами класса C^2 // Мат. тр. 2011. Т. 14, № 2. С. 3–13.

Статья поступила 14 ноября 2011 г., окончательный вариант — 16 января 2013 г.

Богданов Владимир Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bogdanov@math.nsc.ru