Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 517.518.8

КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ СТЕПЕНЕЙ С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Б. Т. Билалов, Ф. А. Гулиева

Аннотация. Рассматривается двойная система степеней с вырождающимися коэффициентами. При определенных условиях получен критерий полноты этой системы в лебеговом пространстве функций.

Ключевые слова: полнота, система степеней, вырождение.

1. Введение

Рассматривается система степеней

$$\{A^+(t)\nu^+(t)\varphi^n(t); A^-(t)\nu^-(t)\bar{\varphi}^n(t)\}_{n\geq 0}, \tag{1}$$

где $A^+(t) \equiv |A^{\pm}(t)|e^{i\alpha^{\pm}(t)}$ и $\varphi(t)$ — комплекснозначные на $[a,b]$ функции, $\nu^{\pm}(t)$ — вырождающиеся коэффициенты:

$$\nu^{\pm}(t) \equiv \prod_{k=1}^{r^{\pm}} \left|t - t_k^{\pm}\right|^{\beta_k^{\pm}},$$

$\left\{t_k^{\pm}\right\}_1^{r^{\pm}} \subset [a,b]$. Базисные свойства (полнота, минимальность, базисность) систем вида (1) рассмотрены многими математиками (см., например, [1–13]). Они тесно связаны с аналогичными свойствами одинарных систем степеней вида $\left\{a(t)\varphi_1^n(t) + b(t)\varphi_2^n(t)\right\}_{n\geq 0}$, частные случаи которых являются собственными функциями дифференциальных операторных пучков. Примером тому может служить известная задача Костюченко (см., например, [5, 6]). Эти системы являются естественными обобщениями классической системы экспонент. При $\varphi(t) \equiv e^{it}$ базисность (в том числе полнота и минимальность) системы (1) в $L_p(-\pi,\pi)$ полностью изучена в работах [14–16]. В случае, когда вырождения отсутствуют, необходимое и достаточное условие полноты и минимальности системы (1) в L_p найдено в [9, 11].

В предлагаемой работе приведен критерий полноты системы (1) в лебеговом пространстве $L_p \equiv L_p(a,b)$, $1 < p < +\infty$.

2. Необходимые предположения и сведения

Сделаем следующие основные предположения.

1. $[A^+(t)]^{\pm}$; $[A^-(t)]^{\pm}$; $[\varphi'(t)]^{\pm 1} \in L_\infty$ ($L_\infty \equiv L_\infty\ (a,b)$).

2. $\Gamma = \varphi\{[a,b]\}$ — замкнутая ($\varphi(a) = \varphi(b)$) спрямляемая простая кривая Жордана, Γ либо кривая Радона (т. е. угол $\theta_0(\varphi(t))$ между касательной в точке

$\varphi = \varphi(t)$ к кривой Γ и действительной осью есть функция ограниченной вариацией на $[a, b]$), либо кусочно-ляпуновская кривая; Γ имеет конечное число угловых точек без заострений. Обозначим через $\{\varphi_k\}_1^r$ точки разрыва функции $\arg\varphi'(t)$ на $[a, b]$.

Для определенности будем считать, что внутренняя область $D = \operatorname{int}\Gamma$ остается слева, когда точка $\varphi = \varphi(t)$ при возрастании t пробегает по кривой Γ.

Под функцией $\arg\varphi'(t)$ понимаем следующее: будем определять в каждой начальной точке φ_k ($(\varphi_k, \varphi_{k+1})$ — интервал непрерывности функции $\arg\varphi'(t)$) ветвь $\arg\varphi'(\varphi_k + 0)$; в конечной точке φ_{k+1} значение $\arg\varphi'(\varphi_{k+1} - 0)$ будем получать из выбранной ветви $\arg\varphi'(\varphi_k + 0)$ путем непрерывного изменения. Не ограничивая общности, в точках φ_k значения $\arg\varphi'(\varphi_k + 0)$ будем определять из условий

$$0 \le \arg\varphi'(a + 0) < 2\pi; \quad |\arg\varphi'(\varphi_k + 0) - \arg\varphi'(\varphi_k - 0)| < \pi.$$

Далее через $\nu(\tau)$ будем обозначать весовую функцию на Γ, т. е. $\nu(\tau) \ge 0$ п. в. на Γ. Везде будем считать, что q — сопряженное к $p \ge 1$ число, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Нам понадобятся весовые классы Смирнова и задача Римана в них. Пусть $E_1(D)$ — обычный класс Смирнова. Положим

$$\widetilde{E}_p(D) \equiv \left\{ f \in E_1(D) : \int\limits_\Gamma |f^+(\tau)|^p \nu(\tau) |d\tau| < +\infty \right\},$$

где $f^+(\tau)$ — некасательные граничные значения функции $f(z)$ на Γ. Пополнение $\widetilde{E}_p(D)$ по норме $\|f\|_{E_p} = \big(\int\limits_\Gamma |f^+(\tau)|^p \nu(\tau)|\,d\tau|\big)^{1/p}$ обозначим через $E_p(D)$. Рассмотрим следующую задачу сопряжения:

$$F_1^+(\tau) + G(\tau)\overline{F_2^+(\tau)} = g(\tau), \quad \tau \in \Gamma, \tag{2}$$

где $(\bar{\cdot})$ — комплексное сопряжение, $g(\tau) \in L_p(\Gamma)$ — правая часть, $G(\tau)$ — коэффициент задачи, а $L_p(\Gamma)$ — весовой класс Лебега с нормой

$$\|f\|_{p,\nu} = \left(\int\limits_\Gamma |f(\tau)|^p \nu(\tau)|\,d\tau| \right)^{1/p}.$$

Ищется пара аналитических в D функций $(F_1(z); F_2(z))$, $F_i \in E_{p,\rho}(D)$, $i = 1, 2$, некасательные граничные значения которых почти всюду на Γ удовлетворяют равенству (2).

Следует отметить, что задача Римана в классах Смирнова $E_p(D)$ достаточно хорошо изучена в работах различных математиков (см., например, [17–20]). Более подробно об этих и других работах можно узнать в монографии [21]. Вообще говоря, в безвесовом случае задачу (2) с помощью конформного отображения можно свести к задаче Римана. Но в принципе это нам не понадобится. Мы выберем иной путь. А именно, воспользуемся следующей леммой, которая доказана в [22].

Лемма 1. *Пусть функции* $A^\pm(t)$, $\varphi(t)$ *удовлетворяют условиям* 1, 2 *и* $\beta_k^\pm > -\frac{1}{p}$ $\forall k = \overline{1, r^\pm}$. *Система* (1) *полна в* L_p, $1 < p < +\infty$, *тогда и только тогда, когда однородная задача сопряжения*

$$F_1^+(\tau) - G(\tau)\overline{F_2^+(\tau)} = 0, \quad \tau \in \Gamma, \tag{3}$$

имеет только тривиальное решение в классах $E_{q,\rho^{\pm}}(D)$: $F_1 \in E_{q,\rho^+}(D)$; $F_2 \in E_{q,\rho^-}(D)$, *где* $\rho^{\pm}(\varphi(t)) \equiv |\nu^{\pm}(t)|^{-q}$, *а коэффициент* $G(\tau)$ *определен выражением*

$$G(\varphi(t)) = \frac{A^+(t)\nu^+(t)\overline{\varphi}'(t)}{A^-(t)\nu^-(t)\varphi'(t)}, \quad t \in [a,b].$$

3. Основные результаты

Будем исследовать задачу сопряжения (3) на тривиальную разрешимость в классах $E_{q,\rho^{\pm}}(D)$. Обозначим через $z = \omega(\xi)$, $\omega'(0) > 0$, $\omega(-\pi) = \varphi(a)$, функцию, осуществляющую конформное и однолистное отображение единичного круга $\{\xi : |\xi| < 1\}$ на область D. Введем в рассмотрение следующие аналитические в единичном круге функции:

$$\Phi_i(\xi) \equiv F_i[\omega(\xi)]\omega'(\xi), \quad i = 1,2.$$

Известно, что F_i принадлежит классу $E_1(D)$ тогда и только тогда, когда Φ_i принадлежит H_1, где H_1 — обычный класс Харди. Пусть $F_i \in E_{p,\nu}(D)$, т. е. $F_i \in E_1(D)$ и $F_i^+ \in L_{p,\nu}(\Gamma)$. Ясно, что $\Phi_i \in H_1$. Имеем

$$\int\limits_{\Gamma} |F_i^+(\tau)|^p \nu(\tau)|d\tau| = \int\limits_{|\xi|=1} |F_i^+[\omega(\xi)]|^p \nu[\omega(\xi)]|\omega'(\xi)||d\xi|$$
$$= \int\limits_{|\xi|=1} |\Phi_i^+(\xi)|^p \frac{\nu[\omega(\xi)]}{|\omega'(\xi)|^{p-1}}|d\xi| = \int\limits_{|\xi|=1} |\Phi_i^+(\xi)|^p \mu(\xi)|d\xi| < +\infty. \quad (4)$$

Отсюда следует, что $\Phi_i \in H_{p;\mu}$, где $\mu(\xi) \equiv \frac{\nu[\omega(\xi)]}{|\omega'(\xi)|^{p-1}}$, а

$$H_{p;\mu} = \left\{\Phi \in H_1 : \int\limits_{|\xi|=1} |\Phi^+(\xi)|^p \mu(\xi)|d\xi| < +\infty\right\}.$$

Таким образом, если $F_i \in E_{p,\nu}(D)$, то $\Phi_i \in H_{p;\mu}$. Из соотношения (4) непосредственно вытекает, что верно и обратное, т. е. если $\Phi_i \in H_{p;\mu}$, то $F_i \in E_{p,\nu}(D)$. Принимая во внимание это заключение, из (3) имеем

$$\Phi_1^+(\xi) - D(\xi)\overline{\Phi_2^+(\xi)} = 0, \quad |\xi| = 1, \quad (5)$$

где $D(\xi) = G[\omega(\xi)]\omega'(\xi)/\overline{\omega'(\xi)}$. В итоге получаем, что справедлива

Лемма 2. *Однородная задача* (3) *тривиально разрешима в классе* $E_{q,\rho^+}(D) \times E_{q,\rho^-}(D)$ (*т. е.* $F_1 \in E_{q,\rho^+}(D)$; $F_2 \in E_{q,\rho^-}(D)$) *тогда и только тогда, когда задача сопряжения* (5) *тривиально разрешима в классе* $H_{q,\mu^+} \times H_{q,\mu^-}$ (*т. е.* $\Phi_1 \in H_{q,\mu^+}; \Phi_2 \in H_{q,\mu^-}$), *где*

$$\mu^{\pm}(\xi) \equiv \frac{\rho^{\pm}[\omega(\xi)]}{|\omega'(\xi)|^{q-1}}.$$

Обозначим через $\xi = \omega_{-1}(z)$ обратную к $z = \omega(\xi)$ функцию, осуществляющую конформное и однолистное отображение области D на единичный круг. Пусть $\tau_k = \omega_{-1}[\varphi_k]$, $k = \overline{1,r}$, где φ_k — угловая точка кривой $\Gamma\backslash\{\varphi(a)\}$. Известно (см., например, [23]), что $\omega'(\xi)$ терпит разрыв в точках τ_k, причем вблизи этих точек

$$|\omega'(\xi)| \asymp |\xi - \tau_k|^{\nu_k - 1}, \quad \xi \to \tau_k, \ k = \overline{1,r},$$

$$\left(|\varphi(\xi)| \asymp |\psi(\xi)| \leftrightarrow 0 < \delta \le \frac{|\varphi(\xi)|}{|\psi(\xi)|} \le \delta^{-1} < +\infty, \delta > 0\right),$$

где $\nu_k\pi$ — внутренние углы в точках φ_k кривой Γ. Следовательно,

$$|\omega'(\xi)| \asymp \prod_{k=1}^{r} |\xi - \tau_k|^{\nu_k - 1}, \quad |\xi| = 1.$$

Положим

$$A_1^+(t) \equiv A^+(t)\bar{\varphi}'(t); \quad A_1^-(t) \equiv A^-(t)\varphi'(t);$$

$$\widetilde{A}(\xi) \equiv A_1^+[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]\bar{\xi}^{-1}\frac{\nu^+[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]}{|\omega'(\xi)|^{-\frac{1}{p}}};$$

$$\widetilde{B}(\xi) \equiv \xi^{-1}A_1^-[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]\frac{\nu^-[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]}{|\omega'(\xi)|^{-\frac{1}{p}}}\frac{\overline{\omega'(\xi)}}{\omega'(\xi)},$$

где $\varphi_{-1} : \Gamma\backslash\{\varphi(a)\} \to (a,b)$ — обратная к $\varphi = \varphi(t)$ функция.

Рассмотрим систему

$$\{\widetilde{A}(e^{ix})e^{inx}; \widetilde{B}(e^{ix})e^{-inx}\}_{n\ge 0}. \tag{6}$$

Совершенно аналогично лемме 1 устанавливается справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *Система* (6) *полна в* $L_p(-\pi,\pi)$ *тогда и только тогда, когда однородная задача сопряжения* (5) *имеет только тривиальное решение в классах* $H_{q,\mu^+} \times H_{q,\mu^-}$.

В самом деле, допуская существование функции $f \in L_q(-\pi,\pi)$, аннулирующей систему (6), имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{A}(e^{ix})e^{inx}\overline{f(x)}\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{B}(e^{ix})e^{-inx}\overline{f(x)}\,dx = 0 \quad \forall n \ge 0.$$

Из первого равенства получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{A}(e^{ix})e^{-ix}\overline{f(x)}e^{inx}\,d\overline{e^{ix}} = \int_{|\xi|=1} \widetilde{A}(\xi)\bar{\xi}\overline{f(\arg\xi)}\xi^n\,d\xi$$

$$= \int_{|\xi|=1} f_1(\xi)\xi^n\,d\xi = 0 \quad \forall n \ge 0, \tag{7}$$

где $f_1(\xi) = \widetilde{A}(\xi)\bar{\xi}\,\overline{f(\arg\xi)}$. Из принятых предположений следует, что $f_1 \in L_1(\gamma)$, где $\gamma \equiv \{\xi : |\xi| = 1\}$. Известно, что (см., например, [24]) равенства (7) эквивалентны существованию $\Phi_1 \in H_1$: $\Phi_1^+(\xi) = f_1(\xi)$ п. в. на γ. Таким образом,

$$\Phi_1^+(\xi) = \widetilde{A}(\xi)\bar{\xi}\,\overline{f(\arg\xi)} = A_1^+[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]\frac{\nu^+[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]}{|\omega'(\xi)|^{-\frac{1}{p}}}\overline{f(\arg\xi)}, \quad \xi \in \gamma.$$

Из этого соотношения непосредственно получаем, что

$$\frac{\Phi_1^+(\xi)}{\nu^+[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]|\omega'(\xi)|^{\frac{1}{p}}} \in L_q(\gamma), \quad \text{т. е. } \Phi_1 \in H_{q,\mu^+}.$$

Совершенно аналогично устанавливается, что

$$\exists \Phi_2 \in H_{q,\mu^-} \quad \Phi_2^+(\xi) = \overline{\widetilde{B}(\xi)}\bar{\xi} f(\arg\xi), \quad \text{п. в. на } \gamma.$$

Следовательно,

$$\overline{f(\arg\xi)} = \frac{\overline{\Phi_2^+(\xi)}}{\widetilde{B}(\xi)\xi} = \frac{\overline{\Phi_2^+(\xi)}}{A_1^-[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]\frac{\nu^-[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]}{|\omega'(\xi)|^{-\frac{1}{p}}}\frac{\overline{\omega'(\xi)}}{\omega'(\xi)}} \equiv g(\xi).$$

Из полученных двух соотношений следует, что

$$\frac{\Phi_1^+(\xi)}{A^+[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]\frac{\nu^+[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]}{|\omega'(\xi)|^{-\frac{1}{p}}}} = g(\xi),$$

т. е.

$$\Phi_1^+(\xi) - \frac{A_1^+[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]\nu^+[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]}{A_1^-[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]\nu^-[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]}\frac{\omega'(\xi)}{\overline{\omega'(\xi)}}\overline{\Phi_2^+(\xi)} = 0,$$

или же

$$\Phi_1^+(\xi) - D(\xi)\overline{\Phi_2^+(\xi)} = 0 \quad \text{п. в. на } \gamma.$$

Таким образом, получили соотношение (5). Обратное доказывается аналогично лемме 1. Результатом этих лемм является следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *и* $\beta_k^\pm > -\frac{1}{p}$ $\forall k = \overline{1, r^\pm}$. *Система* (1) *полна в* $L_p(a,b)$ *тогда и только тогда, когда система* (6) *полна в* $L_p(-\pi,\pi)$.

Далее будем пользоваться результатами из [15, 16]. Сделаем дополнительные предположения.

3. $\alpha^\pm(t)$ кусочно гёльдеровы на $[-\pi,\pi]$; $\{s_i\}_1^{r_0}$ — точки разрыва функции $\theta(t) \equiv \alpha^-(t) - \alpha^+(t)$ и $\tau_i^\gamma = \omega_{-1}[\varphi(s_i)]$.

4. $-\frac{1}{p} < \beta_k^\pm < \frac{1}{q}$, $k = \overline{1, r^\pm}$.

Пусть $\xi_k = \omega_{-1}[\varphi(\varphi_k)]$, $k = \overline{1, r}$; $\xi_k^\pm = \omega_{-1}\left[\varphi\left(t_k^\pm\right)\right]$, $k = \overline{1, r^\pm}$. Положим

$$\{\sigma_k\}_1^m \equiv \left\{\tau_k^\gamma\right\}_1^{r_0} \cup \{\xi_k\}_1^r \cup \{\xi_k^+\}_1^{r^+} \cup \{\xi_k^-\}_1^{r^-} : \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_m.$$

Чтобы применить результаты работ [15, 16], нужно представить функции $\widetilde{A}(\xi)$ и $\widetilde{B}(\xi)$ в рассмотренном в этих работах виде. Пусть $t = \varphi_{-1}[\omega(\xi)]$, $|\xi| = 1$. Имеем

$$\left|t - t_k^\pm\right| = \left|\varphi_{-1}[\omega(\xi)] - \varphi_{-1}\left[\omega\left(\xi_k^\pm\right)\right]\right|.$$

Из условия 1 следует, что

$$\left|\varphi_{-1}[\omega(\xi)] - \varphi_{-1}\left[\omega\left(\xi_k^\pm\right)\right]\right| \asymp \left|\omega(\xi) - \omega\left(\xi_k^\pm\right)\right|.$$

Более того (см., например, [24, с. 25]), имеет место

$$\left|\omega(\xi) - \omega\left(\xi_k^\pm\right)\right| \asymp \left|\xi - \xi_k^\pm\right|^{\nu_k^\pm}, \quad k = \overline{1, r^\pm},$$

где $\nu_k^\pm \pi$ — внутренний угол в точке $\omega\left(\xi_k^\pm\right)$ кривой Γ. В частности, если $\omega\left(\xi_k^\pm\right)$ — точка гладкости кривой Γ, то $\nu_k^\pm = 1$. Таким образом,

$$\left|t - t_k^\pm\right| \asymp \left|\xi - \xi_k^\pm\right|^{\nu_k^\pm}, \quad \prod_{k=1}^{r^\pm}\left|t - t_k^\pm\right|^{\beta_k^\pm} \asymp \prod_{k=1}^{r^\pm}\left|\xi - \xi_k^\pm\right|^{\beta_k^\pm \nu_k^\pm} \equiv \tilde{\nu}^\pm(\xi).$$

Положим

$$\widetilde{A}^{+}(\xi) \equiv \xi A_1^{+}[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]; \quad \widetilde{A}^{-}(\xi) \equiv \frac{\overline{\omega'(\xi)}}{\omega'(\xi)} A_1^{-}[\varphi_{-1}(\omega(\xi))], \quad |\xi| = 1.$$

Пусть $\nu_0^{\pm}(\xi) \equiv \tilde{\nu}^{\pm}(\xi)|\omega'(\xi)|^{\frac{1}{p}}$, $|\xi| = 1$. Рассмотрим систему

$$\{\widetilde{A}^{+}(e^{ix})\nu_0^{+}(e^{ix})e^{inx};\ \widetilde{A}^{-}(e^{ix})\nu_0^{-}(e^{ix})e^{-i(n+1)x}\}_{n\geq 0}. \tag{8}$$

Положим $\tilde{\theta}(\arg\xi) \equiv \arg\widetilde{A}^{-}(\xi) - \arg\widetilde{A}^{+}(\xi)$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(\arg\xi) &= -2\arg\omega'(\xi) + \alpha^{-}[\varphi_{-1}(\omega(\xi))] \\ &\quad + \arg\varphi'[\varphi_{-1}(\omega(\xi))] - [\arg\xi + \alpha^{+}[\varphi_{-1}(\omega(\xi))] - \arg\varphi'[\varphi_{-1}(\omega(\xi))]] \\ &= \alpha^{-}[\varphi_{-1}(\omega(\xi))] - \alpha^{+}[\varphi_{-1}(\omega(\xi))] + \arg\omega'(\xi) + \arg\varphi'[\varphi_{-1}(\omega(\xi))].\end{aligned}$$

Согласно [21] $\arg\omega'(\xi)$ можно представить в виде $\arg\omega'(e^{i\sigma}) = \theta(s(\theta)) - \sigma - \frac{\pi}{2}$, $-\pi < \sigma \leq \pi$, где $\theta(s(\sigma))$ — угол между касательной в точке $\omega(e^{i\sigma})$ к кривой Γ и действительной осью; $s(\sigma)$ — длина дуги, отсчитываемой от точки $\varphi = \varphi(a)$ в положительном направлении до точки $\omega(e^{i\sigma})$, $-\pi < \sigma \leq \pi$. Поэтому функция $\arg\omega'(\xi)$ имеет разрывы в точках $\{\tau_k\}_1^r$. Нетрудно заметить, что система (6) полна в $L_p(-\pi,\pi)$ только тогда, когда система (8) полна в $L_p(-\pi,\pi)$. Положим

$$\left\{\sigma_k^{\pm}\right\}_1^{m^{\pm}} \equiv \{\tau_k\}_1^r \cup \left\{\xi_k^{\pm}\right\}_1^{r^{\pm}}.$$

Нам понадобится следующая функция множеств:

$$\chi(A) \equiv \begin{cases} 1, & A \neq \varnothing, \\ 0, & A = \varnothing. \end{cases}$$

Пусть Ω_k $\left(\Omega_k^{\pm}\right)$ — одноэлементное множество с элементом $\{\sigma_k\}$ $\left(\left\{\sigma_k^{\pm}\right\}\right)$. Точки $\left\{\sigma_k^{\pm}\right\}$ являются точками вырождения функций $\nu_0^{\pm}(\xi)$ соответственно. Порядки вырождения в этих точках определяются выражениями

$$\alpha_k^{\pm} \equiv \sum_{i=1}^{r^{\pm}} \beta_k^{\pm}\nu_k^{\pm}\chi\big(\Omega_k^{\pm} \cap \{\xi_i^{\pm}\}\big) + \sum_{i=1}^{r} \frac{\nu_i - 1}{p}\chi\big(\Omega_k^{\pm} \cap \{\varphi_i\}\big), \quad k = \overline{1, r^{\pm}},$$

где $\{\xi\}$ — одноэлементное множество с элементом ξ. Очевидно, что точками разрыва функции $\tilde{\theta}(\arg\xi)$ на $\gamma\backslash\{-1\}$ являются $\{\sigma_k\}_1^m$. Обозначим через $\{h_k\}_1^m$ скачки в этих точках: $h_k = \tilde{\theta}(\arg\sigma_k + 0) - \tilde{\theta}(\arg\sigma_k - 0)$, $k = \overline{1,m}$. Положим $\Omega^{\pm} \equiv \bigcup\limits_{k=1}^{m^{\pm}} \Omega_k^{\pm}$, $\Omega \equiv \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Omega_k$. Образуем следующие соответствия: $\sigma_k^{\pm} \to \alpha_k^{\pm}$, $\sigma_k \to \frac{h_k}{2\pi}$, и определим величины

$$\lambda_i^{\pm} = \begin{cases} \frac{\alpha_k^{\pm}}{2}, & \text{если } \{\sigma_i\} \cap \Omega^{\pm} = \sigma_k^{\pm}, \\ 0, & \text{если } \{\sigma_i\} \cap \Omega^{\pm} = \varnothing, \end{cases} \quad \lambda_i = \begin{cases} -\frac{h_k}{2\pi}, & \text{если } \{\sigma_i\} \cap \Omega = \sigma_k, \\ 0, & \text{если } \{\sigma_i\} \cap \Omega = \varnothing, \end{cases}$$

$$\nu_i = -(\lambda_i^{+} + \lambda_i^{-} + \lambda_i), \quad i = \overline{1,m}.$$

Следуя работам [15, 16], определим целые числа $n_i, i = \overline{1,m}$, из неравенств

$$-\frac{1}{q} < \nu_i + n_{i-1} - n_i \leq \frac{1}{p}, \quad n_0 = 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{9}$$

Пусть

$$\omega = \tilde{\theta}(-\pi + 0) - \tilde{\theta}(\pi - 0) + 2n_m\pi. \tag{10}$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть функции $A^{\pm}(t)$, $\omega^{\pm}(t)$ удовлетворяют условиям* 1–4 *и величина ω определена из выражений* (9), (10). *Система* (1) *полна в* $L_p(a,b)$, $1 < p < +\infty$, *тогда и только тогда, когда* $\omega \leq \frac{2\pi}{p}$.

На самом деле по результатам из [15, 16] если выполнены все условия теоремы 2, то выполнение неравенства $\omega \leq \frac{2\pi}{p}$ является необходимым и достаточным условием полноты системы (8) в $L_p(-\pi,\pi)$. Остальное следует из леммы 3.

В частности, если в качестве $\varphi(t)$ возьмем $\varphi(t) \equiv e^{it}$, $t \in [-\pi,\pi]$, то ясно, что $\nu_k = 1$, $k = \overline{1,r}$. В этом случае получаем ранее известные результаты [15, 16].

Замечание. Из полученных результатов легко можно получить критерий полноты системы степеней $\{A(t)\varphi^n(t); B(t)\overline{\varphi}^n(t)\}_{n\geq 0}$ в весовом пространстве $L_{p,\rho}(a,b)$.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за стимулирующие замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
2. *Шкаликов А. А.* Об одной системе функций // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 6. С. 855–860.
3. *Казьмин Ю. А.* Замыкание линейной оболочки одной системы функций // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 4. С. 799–805.
4. *Казьмин Ю. А.* О замыканиях линейных оболочек двух систем функций // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236, № 3. С. 535–537.
5. *Тумаркин А. Г.* О полноте некоторых систем функций // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 2. С. 81–82.
6. *Тумаркин А. Г.* О полноте и минимальности некоторых систем функций // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 1. С. 160–167.
7. *Любарский Ю. И.* Полнота и минимальность систем функций вида $\{a\varphi^n - b\psi^n\}_N^\infty$ // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1988. № 49. С. 77–86.
8. *Любарский Ю. И.* Свойства систем линейных комбинаций степеней // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 6. С. 1–69.
9. *Билалов Б. Т.* Необходимое и достаточное условие полноты и минимальности системы вида $\{A\varphi^n; B\bar{\varphi}^n\}$ // Докл. РАН. 1992. Т. 322, № 6. С. 1019–1021.
10. *Билалов Б. Т.* Базисные свойства некоторых систем экспонент, косинусов и синусов // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 264–273.
11. *Билалов Б. Т.* Базисные свойства систем степеней в L_p // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 1–12.
12. *Bilalov B. T., Guseynov Z. G.* Basis properties of unitary systems of powers // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 2009. V. 30. P. 37–50.
13. *Билалов Б. Т.* Система экспонент со сдвигом и задача А. Г. Костюченко // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 279–288.
14. *Велиев С. Г.* Базисы из подмножеств собственных функций двух разрывных дифференциальных операторов // Мат. физика, анализ, геометрия. 2005. Т. 12, № 2. С. 148–157.
15. *Veliev S. G.* Criteria for the completeness and minimality of a system of exponents with singularities // Bull. Georgian Acad. Sci. 2005. V. 171, N 1. P. 21–23.
16. *Veliev S. G.* On completeness of eigenfunctions of two discontinous differential operators // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 2003. V. 18. P. 141–146.
17. *Симоненко И. Б.* Краевая задача Римана с непрерывным коэффициентом // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124, № 2. С. 278–281.
18. *Симоненко И. Б.* Краевая задача Римана с измеримым коэффициентом // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135, № 3. С. 538–541.
19. *Данилюк И. И.* О задаче Гильберта с измеримыми коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1960. Т. 1, № 2. С. 171–197.
20. *Манджавидзе Г. Ф., Хведелидзе Б. В.* О задаче Римана — Привалова с непрерывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123, № 5. С. 791–794.
21. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975.

22. *Bilalov B. T., Eminov M. S.* On completeness of a system of powers // Trans. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 2006. V. 26, N 1. P. 45–50.
23. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
24. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.

Статья поступила 10 января 2012 г., окончательный вариант — 22 января 2013 г.

Билалов Билал Тельман оглы, Гулиева Фатима Агаяр кызы
Институт математики и механики НАНА, отдел негармонического анализа,
ул. Б. Вахабзаде, 9, Баку AZ1141, Азербайджанская Республика
b_bilalov@mail.ru, quliyeva-fatima@mail.ru