Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 513.88

ТОЧНАЯ ТЕОРЕМА ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА

Е. И. Бережной

Аннотация. На основе геометрических свойств дана полная характеризация пространств Лоренца, которые могут быть точными экстраполяционными пространствами для различного поведения роста норм оператора при стремлении к критическому показателю. Результаты настоящей работы связаны с вычислением экстраполяционных конструкций примерно так же, как связаны теоремы типа Кальдерона — Митягина об описании всех интерполяционных пространств конкретной пары и вычисления интерполяционных функторов для этой пары в теории интерполяции линейных операторов.

Ключевые слова: экстраполяция операторов, пространство Лоренца, точное экстраполяционное пространство.

Хорошо известно, что многие операторы анализа, например оператор Гильберта или оператор максимальной функции Харди — Литльвуда, ограничены в пространстве L^p при $p \in (1, \infty)$, но не являются ограниченными в L^1 и L^∞. Одним из направлений для определения «экстремального» пространства в предельном случае стали экстраполяционные теоремы. Первая теорема экстраполяции предложена Яно [1] в 1951 г. Теорема Яно утверждает, что линейный оператор, нормы которого допускают оценку $\|T|L^p \to L^p\| \leq \frac{c}{(p-1)^s}$, где $p \in (1, 2]$, c не зависит от p, $s > 0$ — фиксированное число, ограниченно действует из $L^1(\operatorname{Log} L)^s$ в L^1. С помощью своей теоремы Яно удалось показать ограниченность оператора максимальной функции Харди — Литльвуда и оператора сопряженной функции из $L^1(\operatorname{Log} L)^1$ в L^1. Позднее появилось много работ, обобщающих теорему Яно для пространств Лебега и близких к ним, среди которых отметим работу [2], в которой найдено короткое доказательство точной теоремы экстраполяции для L^1.

В [3–6] рассмотрены теоремы экстраполяции с точки зрения общих идей теории интерполяции линейных операторов (K- и J-методов действительной интерполяции). В этих работах продемонстрирован один из источников экстраполяционных теорем — существование экстраполяционных конструкций, тесно связанных с интерполяционными конструкциями Петри. В частности, вычисляя новое симметричное пространство $\bigcap\limits_{1<p<\infty} p^{-\alpha} L^p$, фактически сконструированное из пространств L^p с помощью некоторого идеального пространства последовательностей, можно получить, например, классическую экстраполяционную теорему (см., например, [7]) при стремлении показателя к ∞. Другие

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00321).

примеры вычисления экстраполяционных пространств см. в цитированных выше работах и в [8, 9].

В настоящей работе рассматривается другой подход к доказательству теорем экстраполяции для квазилинейных операторов в шкале пространств Лоренца. Этот подход учитывает геометрические свойства симметричных пространств, позволяющие давать оценки норм операторов, используя только характеристические функции. Впервые этот подход продемонстрирован в [2]. О достоинствах предложенного подхода говорит и тот факт, что в отличие от общих конструкций удалось получить точную теорему экстраполяции для произвольного роста норм квазилинейных операторов при стремлении к критическому показателю. Мы даем также полную характеризацию пространств Лоренца, которые могут быть точными экстраполяционными пространствами для различного поведения роста норм оператора при стремлении к критическому показателю.

Стоит заметить, что связь экстраполяционных конструкций из [3–6] с результатами настоящей работы примерно такая же, как связь между вычислением интерполяционных функторов в теории интерполяции линейных операторов и теоремами типа Кальдерона — Митягина об описании всех интерполяционных пространств конкретной пары.

1. Предварительные сведения

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, $\chi(D)$ — характеристическая функция множества D, причем будем считать меру непрерывной. Банахово пространство X измеримых функций называется *идеальным* [10], если при $x \in X$ из измеримости y и выполнения почти при всех $t \in \Omega$ неравенства $|y(t)| \leq |x(t)|$ следует, что $y \in X$ и $\|y|X\| \leq \|x|X\|$ (символом $\|x|X\|$ обозначается норма элемента x в пространстве X). Для каждого идеального пространства X определено дуальное идеальное пространство X', состоящее из непрерывных на X функционалов, представимых в интегральном виде. Для $x : \Omega \to R$ через $\lambda(x, \gamma)$ обозначим функцию распределения функции x: $\lambda(x, \gamma) = \mu(\{t \in \Omega : |x(t)| > \gamma\})$, а через x^* — ее перестановку в невозрастающем порядке. Идеальное пространство X называется *симметричным* [10], если при $x \in X$ из измеримости y и выполнения при всех $\gamma \in R_+$ неравенства $\lambda(y, \gamma) \leq \lambda(x, \gamma)$ следует, что $y \in X$ и $\|y|X\| \leq \|x|X\|$. Важную информацию о симметричном пространстве X несет его фундаментальная функция, которая определяется равенством $\psi(X, t) = \|\chi(D)|X\|$, где $t = \mu(D)$. Эта функция квазивогнута. Известно [10], что каждая квазивогнутая функция эквивалентна своей вогнутой мажоранте, причем константа эквивалентности не зависит от функции. Зафиксируем $a > 0$. Пусть $W(a)$ — множество непрерывных возрастающих вогнутых функций $\psi : (0, a) \to R_+$, удовлетворяющих условию $\psi(0) = 0$. Если $a = \infty$, то будем считать, что выполнено дополнительное условие $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$.

Пусть $\mu(\Omega) = a$. Пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ (пространство Марцинкевича $M(\psi)$) состоит из тех x, для которых конечна норма

$$\|x|\Lambda(\psi)\| = \int_0^a x^*(s)\, d\psi(s) = \int_0^a \psi(\lambda(x, s))\, d\mu(s),$$

$$(\|x|M(\psi)\| = \sup_{0<t<a} \frac{\psi(t)}{t} \int_0^t x^*(s)\, ds = \sup_{D\subseteq\Omega} \left\{ \frac{\psi(|D|)}{|D|} \int_D |x(s)|\, d\mu(s) \right\}).$$

Если $\psi(t) = t^\tau$ $(0 < \tau < 1)$ то, как обычно, через Λ^τ (M^τ) будем обозначать соответствующее пространство Лоренца (Марцинкевича).

Хорошо известна двойственность пространств Лоренца и Марцинкевича. Положим $\widetilde{\psi}(t) = \frac{t}{\psi(t)}$. Тогда справедливы соотношения

$$\{\Lambda(\psi)\}' = M(\widetilde{\psi}), \quad \{M(\psi)\}' = \Lambda(\widetilde{\psi}). \tag{1}$$

В частности, для $0 < \tau < 1$ справедливы равенства

$$\{\Lambda^\tau\}' = M^{1-\tau}, \quad \{M^\tau\}' = \Lambda^{1-\tau}, \tag{2}$$

которыми будем пользоваться ниже. Отметим также, что равенства (1), (2) можно понимать и как изометрии.

Пространства Лоренца и Марцинкевича наряду с L^p являются классическими примерами симметричных пространств. Подробнее о симметричных пространствах см. [10, 11].

Напомним, что оператор T, определенный на $L^{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и принимающий значения в пространстве Y, называется *квазилинейным*, если для абсолютной константы c_0 на области определения T выполнены неравенства

$$\|T\lambda x|Y\| \le c_0|\lambda|\|Tx|Y\|, \quad \Big\|T\Big(\sum x_k\Big)|Y\Big\| \le c_0 \sum \|Tx_k|Y\|.$$

Всюду ниже символом c, возможно, с индексами будем обозначать различные константы, точное значение которых не имеет существенного значения.

Если Y — идеальное пространство, то типичными примерами квазилинейных операторов являются модули линейных операторов и операторы вида $T(x)(t) = \sup\limits_{\delta\in\Delta} |T_\delta(x)|(t)$, где T_δ — линейные операторы. В частности, квазилинейны различные операторы максимальной функции.

Для квазилинейных операторов $T : X \to Y$ можно определить норму с помощью обычного равенства $\|T|X \to Y\| = \sup\limits_{\|x|X\|\le 1} \|Tx|Y\|$.

Следующая известная теорема будет играть важную роль в нашей работе.

Теорема А [10, с. 151]. *Пусть задано банахово пространство Y, и пусть по функции $\psi \in W(a)$ построено пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$. Пусть на множестве характеристических функций $D \in \Omega$ задан квазилинейный оператор T, удовлетворяющий условию*

$$\sup\left\{\frac{\|T\chi(D)|Y\|}{\psi(|D|)} : D \subseteq \Omega\right\} = c < \infty.$$

Тогда T можно единственным образом продолжить на все пространство $\Lambda(\psi)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\|Tx|Y\| \le 2c\|x|\Lambda(\psi)\|.$$

В частности, для операторов $T : \Lambda(\psi) \to Y$ из теоремы А следуют неравенства, имеющие важное значение:

$$\frac{1}{2}\|T|\Lambda(\psi) \to Y\| \le \sup\left\{\frac{\|T\chi(D)|Y\|}{\psi(|D|)} : D \subseteq \Omega\right\} \le \|T|\Lambda(\psi) \to Y\|.$$

2. Точная теорема экстраполяции для пространств Лоренца

Поскольку ответ в предлагаемой выше задаче сильно зависит от свойств меры, на что неоднократно обращалось внимание, сначала рассмотрим случай конечной меры. Без ограничения общности можно считать, что выполняется равенство $\mu(\Omega) = 1$.

Сразу отметим, что в этом случае для $0 < s < t \leq 1$ справедливо вложение $\Lambda^s \subset \Lambda^t$ с константой вложения единица.

Основная задача, рассматриваемая в настоящей работе, имеет следующий вид.

Зафиксируем интервал (τ_0, τ_1) $(0 \leq \tau_0 < \tau_1 \leq 1)$. *Пусть на семействе пространств* Λ^τ $(\tau \in (\tau_0, \tau_1))$ *задан квазилинейный оператор* $T : \Lambda^\tau \to Y$, *для которого* $\|T|\Lambda^\tau \to Y\| = \xi(\tau) < \infty$, *причем* $\lim\limits_{\tau \to \tau_1} \xi(\tau) = \infty$. *Требуется охарактеризовать «наибольшее» пространство* Λ_{ext} *такое, что оператор ограниченно действует из* Λ_{ext} *в пространство* Y.

Из указанных выше вложений для пространств Лоренца следует, что $\xi(\tau) = \|T|\Lambda^\tau \to Y\|$ является неубывающей функцией при $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$. Более того, из того, что $\lim\limits_{\tau \to \tau_1} \xi(\tau) = \infty$, вытекает, что $\lim\limits_{\tau \to \tau_0 + 0} \xi(\tau) > 0$.

Полезно отметить, что при всех $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ выполнены непрерывные вложения $\Lambda^\tau \subset \Lambda_{\text{ext}} \subset \Lambda^{\tau_1}$, причем все вложения строгие. В терминах фундаментальных функций эти вложения имеют вид

$$\lim_{t \to +0} \frac{\psi(\Lambda_{\text{ext}}, t)}{t^\tau} = 0, \quad \lim_{t \to +0} \frac{\psi(\Lambda_{\text{ext}}, t)}{t^{\tau_1}} = \infty.$$

Следующая теорема, несмотря на совсем короткое доказательство, содержит практически все известные теоремы экстраполяции для пространств Лебега и Лоренца. Несколько менее общий факт приведен в [2], мы здесь расширяем класс допустимых операторов и указываем дополнительные свойства.

Теорема 1. *Пусть фиксированы пара чисел* $0 \leq \tau_0 < \tau_1 \leq 1$, *банахово пространство* Y *и функция* $\xi : (\tau_0, \tau_1) \to R_+$, *причем* $\xi(\tau_0) > 0$, $\xi(\tau)$ *не убывает и* $\lim\limits_{\tau \to \tau_1} \xi(\tau) = \infty$. *Для* $t \in (0, 1)$ *определим функцию*

$$\psi_\xi(t) = \inf_{\tau \in (\tau_0, \tau_1)} \xi(\tau) t^\tau. \tag{3}$$

Пусть T — *некоторый квазилинейный оператор. Для того чтобы при всех* x *из области определения* T *выполнялось неравенство*

$$\|Tx|Y\| \leq c\|x|\Lambda(\psi_\xi)\|, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ *для каждого* x *из области определения* T *выполнялось неравенство*

$$\|Tx|Y\| \leq c_1 \xi(\tau) \|x|\Lambda^\tau\|. \tag{5}$$

Доказательство. Для каждого фиксированного $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ функция $\theta(t) = \xi(\tau) t^\tau$ вогнута на R_+. Поэтому функция $\psi_\xi(t)$ как нижняя грань вогнутых функций тоже будет вогнутой. Непосредственно из определения функции $\psi_\xi(t)$ следует, что $\lim\limits_{t \to 0} \psi_\xi(t) = 0$. Поэтому $\psi_\xi \in W(1)$ и, значит, определено пространство $\Lambda(\psi_\xi)$.

Зафиксируем $D \subseteq U$. Из предположений теоремы вытекает, что при всех $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ выполнено неравенство

$$\|T\chi(D)|Y\| \leq \xi(\tau)|D|^{\tau}.$$

Минимизируя по τ правую часть последнего неравенства, придем к неравенству $\|T\chi(D)|Y\| \leq \psi_\xi(|D|) = \|\chi(D)|\Lambda(\psi_\xi)\|$.

Применяя теорему A, получим (4).

Для доказательства второй части теоремы поступим следующим образом. Зафиксируем $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$. Из (4) с учетом (3) получим, что для любого $D \in \Omega$ следует соотношение

$$\|T\chi(D)|Y\| \leq c\psi_\xi(|D|) \leq c\xi(\tau)|D|^{\tau}.$$

Для окончания доказательства осталось воспользоваться теоремой A.

Теорема доказана.

Теорема 1 показывает, что в случае, когда образ оператора фиксирован, теореме экстраполяции можно придать необходимые и достаточные условия. В случае классической теоремы Яно, т. е. когда рассматривается оператор T, действующий из L^p в L^p ($p \in (1,2)$), ситуация принципиально отличается от рассматриваемой нами. Тао показал [12], что, вообще говоря, теорема, обратная к теореме Яно, не справедлива. Для справедливости обратной теоремы достаточно [12] инвариантности оператора T относительно сдвига.

Отметим, что в условиях теоремы 1 для функции $\psi_\xi(t)$ при $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ выполнены соотношения

$$\lim_{t\to+0} \frac{\psi_\xi(t)}{t^{\tau}} = 0, \quad \lim_{t\to+0} \frac{\psi_\xi(t)}{t^{\tau_1}} = \infty. \tag{6}$$

Действительно, для $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ положим $\tau_2 = (\tau_1 + \tau)/2$. Тогда

$$\lim_{t\to+0} \frac{\psi_\xi(t)}{t^{\tau}} \leq \lim_{t\to+0} \frac{t^{\tau_2}\xi(\tau_2)}{t^{\tau}} = 0,$$

что и доказывает выполнение первого условия в (6).

Для проверки второго условия в (6) можно поступить так. Для любого $\tau_2 \in (\tau_0, \tau_1)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+0} \frac{\psi_\xi(t)}{t^{\tau_1}} &= \lim_{t\to+0} \inf_{\tau\in(\tau_0,\tau_1)} \xi(\tau)t^{\tau-\tau_1} \\
&= \lim_{t\to+0} \min\{\inf_{\tau\in(\tau_0,\tau_2)} \xi(\tau)t^{\tau-\tau_1}, \inf_{\tau\in(\tau_2,\tau_1)} \xi(\tau)t^{\tau-\tau_1}\} \\
&\geq \lim_{t\to+0} \min\{\xi(\tau_0)t^{\tau-\tau_1}, \inf_{\tau\in(\tau_2,\tau_1)} \xi(\tau)\} = \inf_{\tau\in(\tau_2,\tau_1)} \xi(\tau).
\end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{\tau\to\tau_1} \xi(\tau) = \infty$, второе условие в (6) выполнено.

Соотношения (6) показывают, что вложения $\Lambda^{\tau} \subset \Lambda(\psi_\xi) \subset \Lambda^{\tau_1}$ строгие.

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы охарактеризовать все точные экстраполяционные пространства Лоренца, которые могут получаться при различных функциях ξ.

Определение 1. Будем говорить, что пространство $\Lambda(\psi)$ является *точным экстраполяционным для класса линейных* (*квазилинейных*) *операторов* *относительно параметров* $\{(\tau_0, \tau_1); \xi(\tau)\}$, если для каждого линейного (квазилинейного) оператора $T : \Lambda^\tau \to X$, при всех (τ_0, τ_1) удовлетворяющего неравенству $\|T|\Lambda^\tau \to X\| \le c\xi(\tau)$, верно неравенство $\|T|\Lambda(\psi) \to X\| < \infty$ и для каждого пространства Лоренца $\Lambda(\psi_0)$, фундаментальная функция которого удовлетворяет равенству $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi_0(t)}{\psi(t)} = 0$, найдутся банахово пространство X_0 и линейный (квазилинейный) оператор $T : \Lambda^\tau \to X_0$ такие, что при всех (τ_0, τ_1) выполняются соотношения $\|T|\Lambda^\tau \to X_0\| \le c\xi(\tau)$ и равенство $\|T|\Lambda(\psi_0) \to X_0\| = \infty$.

Различия в определениях обусловлены тем, что для класса квазилинейных операторов прямая теорема должна быть труднее, зато точность теоремы разрешено проверять на более широком классе операторов. Оставаясь в классе линейных операторов, доказывать точность прямой теоремы сложнее из-за более узкого класса операторов.

Следующая теорема является одной из основных в работе. Она показывает, что построенное в теореме 1 пространство Лоренца точное экстраполяционное как для класса квазилинейных операторов, так и для класса линейных операторов, причем в случае класса квазилинейных операторов справедлив даже более сильный результат.

Теорема 2. *Зафиксируем* (τ_0, τ_1). *Пусть* X *— некоторое банахово пространство,* T *— квазилинейный оператор,* $T : \Lambda^\tau \to X$ *и* $\|T : \Lambda^\tau \to X\| \le \xi(\tau)$. *Для* $t \in (0, 1)$ *с помощью равенства* (3) *определим функцию* $\psi_\xi(t)$.

Тогда пространство $\Lambda(\psi_\xi)$ *точное экстраполяционное для класса квазилинейных операторов относительно параметров* $\{(\tau_0, \tau_1); \xi(\tau)\}$. *Более того, если* $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi_0(t)}{\psi_\xi(t)} = 0$, *то для любого банахова пространства* X *найдется квазилинейный оператор* $T : \Lambda^\tau \to X$, *при всех* (τ_0, τ_1) *удовлетворяющий неравенству* $\|T|\Lambda^\tau \to X\| \le c\xi(\tau)$, *для которого верно равенство* $\|T|\Lambda(\psi_0) \to X\| = \infty$.

Теорема 2′. *Зафиксируем* (τ_0, τ_1). *Пусть* Y *— некоторое банахово пространство,* T *— линейный оператор,* $T : \Lambda^\tau \to X$ *и* $\|T : \Lambda^\tau \to X\| \le \xi(\tau)$. *Для* $t \in (0, 1)$ *с помощью равенства* (3) *определим функцию* $\psi_\xi(t)$.

Тогда пространство $\Lambda(\psi_\xi)$ *точное экстраполяционное для класса линейных операторов относительно параметров* $\{(\tau_0, \tau_1); \xi(\tau)\}$. *Более того, если* $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi_0(t)}{\psi_\xi(t)} = 0$, *то для пространства* l^∞ *найдется квазилинейный оператор* $T : \Lambda^\tau \to l^\infty$, *при всех* (τ_0, τ_1) *удовлетворяющий неравенству* $\|T|\Lambda^\tau \to l^\infty\| \le c\xi(\tau)$, *для которого верно равенство* $\|T|\Lambda(\psi_0) \to l^\infty\| = \infty$.

Для того чтобы перейти к доказательству теорем 2 и 2′, потребуются некоторые дополнительные построения, ключевым моментом которых является конструирование специальных операторов на пространствах Лоренца, необходимых для проверки точности экстраполяционных теорем.

В наших конструкциях важную роль играют логарифмически выпуклые функции. Напомним их определение (см., например, [10, 13]).

Определение 2. Зафиксируем интервал (t_0, t_1). Говорят, что функция $\rho : (t_0, t_1) \to R_+$ *логарифмически выпукла* на (t_0, t_1), если функция $\ln \rho(t)$ выпукла на (t_0, t_1).

Нам понадобится следующий факт, который оформим в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(t)$ *— непрерывная возрастающая на* (t_0, t_1) *логарифмически выпуклая функция. Тогда для любого* $q > 1$ *существует непрерывно* *дифференцируемая возрастающая на (t_0, t_1) логарифмически выпуклая функция $\varphi_q(t)$, при всех $t \in (t_0, t_1)$ удовлетворяющая неравенствам*

$$\frac{1}{q}\varphi(t) \le \varphi_q(t) \le q\varphi(t). \tag{7}$$

Доказательство. По функции $\varphi(t)$ построим функцию $x(t) = \ln\varphi(t)$. Это выпуклая возрастающая на (t_0, t_1) функция. Известно [7, с. 46], что для любого $\varepsilon > 0$ найдется возрастающая выпуклая непрерывно дифференцируемая на (t_0, t_1) функция $x_\varepsilon(t)$ такая, что на (t_0, t_1) выполняются неравенства

$$x_\varepsilon(t) - \varepsilon \le x(t) \le x_\varepsilon(t) + \epsilon.$$

Полагая $\varepsilon = \ln q$ и потенцируя эти неравенства, придем к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Для каждой логарифмически выпуклой функции предложим специальную конструкцию для ее приближения.

Пусть $\varphi : (t_0, t_1) \to R_+$ — возрастающая непрерывно дифференцируемая логарифмически выпуклая функция. Зафиксируем $\tau_0 \in (t_0, t_1)$, и пусть точки $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ определены. Определим теперь точку τ_{k+1} равенством

$$\tau_{k+1} = \sup\left\{\tau \in (t_0, t_1) : \{\ln\varphi(\tau) \le \ln\varphi(\tau_k) + 1\} \& \left\{\frac{\varphi\prime(\tau)}{\varphi(\tau)} \le \frac{\varphi\prime(\tau_k)}{\varphi(\tau_k)} + 1\right\}\right\}. \tag{8}$$

Для отрицательных индексов поступим аналогично. Пусть точки $\tau_{-1}, \tau_{-2}, \dots, \tau_{-k}$ определены. Определим точку τ_{-k-1} равенством

$$\tau_{-k-1} = \inf\left\{\tau \in (t_0, t_1) : \{\ln\varphi(\tau) + 1 \ge \ln\varphi(\tau_{-k})\} \& \left\{\frac{\varphi\prime(\tau)}{\varphi(\tau)} + 1 \ge \frac{\varphi\prime(\tau_{-k})}{\varphi(\tau_{-k})}\right\}\right\}. \tag{9}$$

Прежде всего отметим, что из того, что φ — возрастающая непрерывно дифференцируемая логарифмически выпуклая функция, следует, что функции $\ln\varphi(\tau)$ и $\frac{d}{d\tau}\ln\varphi(\tau) = \frac{\varphi\prime(\tau)}{\varphi(\tau)}$ возрастают, поэтому разбиение $\{\tau_k\}$ определено формулами (8), (9) корректно. Отметим, что последовательность $\{\tau_k\}$ может состоять из конечного числа членов при положительных или отрицательных индексах или быть бесконечной в обе стороны. В частности, если выполнены условия

$$\lim_{\tau\to t_0}\varphi(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau\to t_1}\varphi(\tau) = \infty,$$

то последовательность $\{\tau_k\}$ бесконечна в обе стороны.

Дальнейшие построения будем проводить, считая, что последовательность $\{\tau_k\}$ бесконечна в обе стороны. Другие случаи разбираются аналогично.

Нетрудно видеть, что последовательность $\{\tau_k\}$ возрастает и выполняются равенства

$$\lim_{k\to-\infty}\tau_k = t_0, \quad \lim_{k\to\infty}\tau_k = t_1.$$

По последовательности $\{\tau_k\}$ на каждом отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ с помощью равенств

$$l_{\varphi,k}(\tau) = \ln\varphi(\tau_k) + (\tau - \tau_k)\frac{\ln\varphi(\tau_{k+1}) - \ln\varphi(\tau_k)}{\tau_{k+1} - \tau_k}, \quad \overline{\varphi}(\tau) = \exp(l_{\varphi,k}(\tau)) \tag{10}$$

определим непрерывную кусочно линейную возрастающую выпуклую функцию и возрастающую логарифмически выпуклую функцию.

Отметим ряд неравенств. Во-первых, из определения (8), (9) последовательности $\{\tau_k\}$ при всех $\tau \in (t_0, t_1)$ следуют неравенства

$$\varphi(\tau) \le \overline{\varphi}(\tau) \le e\varphi(\tau). \tag{11}$$

Во-вторых, из выпуклости функции $\ln\varphi(\tau)$ вытекает, что выполнены соотношения

$$l_{\varphi,k}(\tau) \le \ln\varphi(\tau) \text{ при } \tau \le \tau_k, \quad l_{\varphi,k}(\tau) \le \ln\varphi(\tau) \text{ при } \tau \ge \tau_{k+1}$$

и, следовательно, верны неравенства

$$\overline{\varphi}(\tau) \le \varphi(\tau) \quad \text{при } \tau \le \tau_k, \tag{12}$$

$$\overline{\varphi}(\tau) \le \varphi(\tau) \quad \text{при } \tau \ge \tau_{k+1}. \tag{13}$$

Последовательность $\{\tau_k\}$ будем называть *заполняющей* для функции $\varphi(\tau)$ по аналогии с соответствующей конструкцией для вогнутой функции (см., например, [13–15]). Заполняющая последовательность будет использована для построения важных операторов в пространствах Лоренца, к чему мы и переходим.

Зафиксируем константу $c > 0$ и функцию $a \in L^1(0,1)$. С помощью равенства $f_{c,a}(x) = c\int\limits_0^1 a(t)x(t)\,dt$ образуем линейный функционал. Из теории двойственности пространств Лоренца и Марцинкевича и соотношений (1), (2) следует справедливость равенства

$$\|f_{c,a}|\Lambda(\psi) \to R\| = c\|a|M(\widetilde{\psi})\|.$$

Из последнего соотношения, полагая $a(t) = \chi(0,\alpha)$, получим справедливость равенства

$$\|f_{c,\alpha}|\Lambda(\psi) \to R\| = c\widetilde{\psi}(\alpha).$$

В частности, для степенной функции $\psi(t) = t^\tau$ $(0 < \tau < 1)$ имеем

$$\|f_{c,\alpha}|\Lambda^\tau \to R\| = c\alpha^{1-\tau}.$$

Теоремы 3 и 3′ являются ключевыми для доказательства теорем 2 и 2′. В них устанавливается соответствие между нормами операторов в шкале пространств Лоренца и логарифмически выпуклыми функциями.

Теорема 3. *Пусть задана возрастающая логарифмически выпуклая функция $\xi(\tau) : (t_0, t_1) \to R_+$. Тогда для любого $q > 1$ существует квазилинейный оператор $T_q : \Lambda^\tau \to R$ такой, что выполняются соотношения*

$$\frac{1}{q}\xi(\tau) \le \|T_q|\Lambda^\tau \to R\| \le 2qe\xi(\tau). \tag{14}$$

Доказательство. Выберем произвольное $q > 1$ и согласно лемме 1 построим непрерывно дифференцируемую возрастающую логарифмически выпуклую функцию $\xi_q(\tau)$, удовлетворяющую неравенству (7). Для функции $\xi_q(\tau)$ построим заполняющую последовательность $\{\tau_k\}$.

Для каждого k построим функционал f_{c_k,α_k}, определив константы c_k, α_k из уравнений

$$\xi_q(\tau_k) = c_k\alpha_k^{(1-\tau_k)}, \quad \xi_q(\tau_{k+1}) = c_k\alpha_k^{(1-\tau_{k+1})}, \tag{15}$$

т. е. положим

$$\alpha_k = \left(\frac{\xi_q(\tau_k)}{\xi_q(\tau_{k+1})}\right)^{\frac{1}{\tau_{k+1}-\tau_k}}, \quad c_k = \xi_q(\tau_k)\left(\frac{\xi_q(\tau_k)}{\xi_q(\tau_{k+1})}\right)^{\frac{\tau_k-1}{\tau_{k+1}-\tau_k}}. \tag{16}$$

Из (10) и (15), (16) следует, что на промежутке $(\tau_k, \tau_{k+1}]$ справедливы равенства

$$\bar{\xi}_q(\tau) = c_k\alpha_k^{(1-\tau)}, \quad l_{\xi_q,k}(\tau) = \ln\left(c_k\alpha_k^{(1-\tau)}\right). \tag{17}$$

Поэтому из (11)–(13) следуют неравенства

$$\xi_q(\tau) \leq c_k\alpha_k^{(1-\tau)} \leq e\xi_q(\tau) \quad \text{при } \tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \tag{18}$$

$$c_k\alpha_k^{(1-\tau)} \leq \xi_q(\tau) \quad \text{при } \tau \in (t_0, \tau_k] \cup [\tau_{k+1}, t_1). \tag{19}$$

Определим оператор $T_q : \Lambda^\tau \to R$ с помощью равенства

$$T_q(x) = \sup_i |f_{c_i,\alpha_i}(x)|.$$

Проверим, что так построенный оператор удовлетворяет утверждению теоремы.

Поскольку оператор T_q квазилинейный, из теоремы A следует, что его ограниченность можно проверять на характеристических функциях. Поэтому, используя (17) и неравенства (18), (19), получим

$$|T_q(\chi(D))| = \sup_i |f_{c_i,\alpha_i}(\chi(D))| \leq \sup_i \|f_{c_i,\alpha_i}|\Lambda^\tau \to R\||D|^\tau$$
$$\leq \sup_i c_i\alpha_i^{1-\tau}|D|^\tau \leq \sup_i \bar{\xi}_q(\tau)|D|^\tau = e\xi_q(\tau)|D|^\tau.$$

Вспоминая неравенство (7), имеем

$$|T_q(\chi(D))| \leq qe\xi(\tau)|D|^\tau.$$

Таким образом, из последнего соотношения и теоремы A следует правое неравенство в (14).

Докажем левое неравенство в (14). Из определения вытекает неравенство

$$\|T_q|\Lambda^\tau \to R\| \geq \|f_{c_j,\alpha_j}|\Lambda^\tau \to R\| = c_j\alpha_j^{1-\tau} = \bar{\xi}_q(\tau_j) = \xi_q(\tau_j).$$

Поэтому из (17)–(19) и (7) получим

$$\|T_q|\Lambda^\tau \to R\| \geq \sup_j \|f_{c_j,\alpha_j}|\Lambda^\tau \to R\| = \sup_j c_j\alpha_j^{1-\tau} = \bar{\xi}_q(\tau) \geq \xi_q(\tau) \geq \frac{1}{q}\xi(\tau).$$

Теорема доказана.

Теорема 3′. *Пусть задана возрастающая логарифмически выпуклая функция $\xi(\tau) : (t_0, t_1) \to R_+$. Тогда для любого $q > 1$ существует линейный оператор $T_{q,\infty} : \Lambda^\tau \to l^\infty$ такой, что выполняются соотношения*

$$\frac{1}{q}\xi(\tau) \leq \|T_{q,\infty}|\Lambda^\tau \to l^\infty\| \leq 2qe\xi(\tau).$$

Для доказательства теоремы 3′ можно повторить доказательство теоремы 3, заменив оператор T_q оператором, определяемым равенством

$$T_{q,\infty}x = \sum_{i=1}^{\infty} f_{c_i,\alpha_i}e^i,$$

где функционалы f_{c_i,α_i} построены согласно (16) в предыдущей теореме, а e^i — стандартный базис в l^∞.

Теперь можем перейти к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть задан линейный оператор $T:\Lambda^\tau\to Y$ и $\|T|\Lambda^\tau\to Y\|\le\xi(\tau)$. Покажем, что так построенное пространство является точным экстраполяционным. Зафиксируем пространство Y.

Из теоремы 1 сразу следует, что T ограниченно действует из $\Lambda(\psi_\xi)$ в Y. Покажем, что пространство $\Lambda(\psi_\xi)$ расширить нельзя, т. е. если

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{\psi_\xi(t)}=0,$$

то найдется квазилинейный оператор T такой, что $T:\Lambda^\tau\to Y$ и $\|T|\Lambda^\tau\to Y\|\le\xi(\tau)$, $(\tau)\in(\tau_0,\tau_1)$, но $\|T|\Lambda(\psi)\to Y\|=\infty$. Для этого рассмотрим оператор, построенный в теореме 3.

Из определения оператора T_q следует важное равенство

$$\begin{aligned}\sup_{|D|=t}|T_q(\chi(D))|&=\sup_{|D|=t}\sup_k|f_{c_k,\alpha_k}(\chi(D))|\\&=\sup_{|D|=t}\sup_k\left|c_k\int_0^1\chi(0,\alpha_k)\chi(D)\,dt\right|=\sup_k c_k\min(\alpha_k,\ t).\end{aligned}\tag{20}$$

Покажем, что при малых t выполняется неравенство

$$\sup_{|D|=t}|T_q(\chi(D))|\ge c_1\psi_\xi(t).\tag{21}$$

Сначала заметим, что из формулы (16) следует равенство

$$\ln\alpha_k=\frac{\ln\xi_q(\tau_k)-\ln\xi_q(\tau_{k+1})}{\tau_{k+1}-\tau_k}.$$

Далее, из выпуклости функции $\ln\xi_q(\tau)$ имеем

$$\frac{d}{dt}\ln\xi_q(\tau)|_{t=\tau_k}\le\frac{\ln\xi_q(\tau_{k+1})-\ln\xi_q(\tau_k)}{\tau_{k+1}-\tau_k}\le\frac{d}{dt}\ln\xi_q(\tau)|_{t=\tau_{k+1}},$$

или

$$\frac{\xi_q'(\tau_k)}{\xi_q(\tau_k)}\le\frac{\ln\xi_q(\tau_{k+1})-\ln\xi_q(\tau_k)}{\tau_{k+1}-\tau_k}\le\frac{\xi_q'(\tau_{k+1})}{\xi_q(\tau_{k+1})}.\tag{22}$$

Учитывая второе условие в (8) и (9), получим

$$\frac{\xi_q'(\tau_k)}{\xi_q(\tau_k)}\le\frac{\ln\xi_q(\tau_{k+1})-\ln\xi_q(\tau_k)}{\tau_{k+1}-\tau_k}\le\frac{\xi_q'(\tau_k)}{\xi_q(\tau_k)}+1.$$

Из последнего неравенства следует важное соотношение

$$-\frac{\xi_q'(\tau_k)}{\xi_q(\tau_k)}-1\le\ln\alpha_k\le-\frac{\xi_q'(\tau_k)}{\xi_q(\tau_k)},$$

которое будем применять в виде

$$e^{-1}\exp\left(-\frac{\xi_q'(\tau_k)}{\xi_q(\tau_k)}\right)\le\alpha_k\le\exp\left(-\frac{\xi_q'(\tau_k)}{\xi_q(\tau_k)}\right).\tag{23}$$

В частности, из (22), (23) и (9) выводим неравенства

$$\alpha_{k+1} \le \alpha_k \le \exp\left(-\frac{\xi_q'(\tau_k)}{\xi_q(\tau_k)}\right) = e\exp\left(-\frac{\xi_q'(\tau_k)}{\xi_q(\tau_k)} - 1\right) \le e\exp\left(-\frac{\xi_q'(\tau_{k+1})}{\xi_q(\tau_{k+1})}\right) \le e^2\alpha_{k+1}. \quad (24)$$

Зафиксируем $t \in [\alpha_{k_0+1}, \alpha_{k_0}]$. Тогда из (20) и (24) получим

$$\sup_{|D|=t} |T_q(\chi(D))| = \sup_k c_k \min(\alpha_k, t) \ge c_{k_0}\min(\alpha_{k_0}, t) \ge c_{k_0}\alpha_{k_0+1} \ge e^{-2}c_{k_0}\alpha_{k_0}. \quad (25)$$

С другой стороны, верна цепочка неравенств

$$\inf_{\tau\in(\tau_0,\tau_1)} \xi_q(\tau)t^\tau = \inf_k \inf_{\tau\in(\tau_k,\tau_{k+1})} \xi_q(\tau)t^\tau \le \inf_k \inf_{\tau\in(\tau_k,\tau_{k+1})} c_k\alpha_k^{1-\tau}t^\tau \le \inf_{\tau\in(\tau_{k_0},\tau_{k_0+1})} c_{k_0}\alpha_{k_0}^{1-\tau}t^\tau.$$

Поскольку $t \in [\alpha_{k_0+1}, \alpha_{k_0}]$, имеем неравенство

$$\inf_{\tau\in(\tau_0,\tau_1)} \xi_q(\tau)t^\tau \le c_{k_0}\alpha_{k_0}. \quad (26)$$

Таким образом, из (25), (26) следует, что для всех t из промежутка $[\alpha_{k_0+1}, \alpha_{k_0}]$ справедливо неравенство

$$\inf_{\tau\in(\tau_0,\tau_1)} \xi(\tau)t^\tau \le \inf_{\tau\in(\tau_0,\tau_1)} \xi_q(\tau)t^\tau \le c_{k_0}\alpha_{k_0} \le e^2e^{-2}c_{k_0}\alpha_{k_0} \le e^2 \sup_{|D|=t} |T_q(\chi(D))|,$$

откуда вытекает неравенство (21), которое и гарантирует, что $\Lambda(\psi_\xi)$ является точным экстраполяционным пространством.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы $2'$ повторяет доказательство теоремы 2 с заменой теоремы 3 теоремой $3'$.

3. Характеризация экстраполяционных пространств Лоренца

Определение 3. Будем говорить, что пространство $\Lambda(\psi)$ *экстраполяционное относительно интервала* $\{(\tau_0, \tau_1)\}$, если при некоторой неубывающей логарифмически выпуклой функции $\xi : (\tau_0, \tau_1) \to R_+$ с $\lim_{\tau\to\tau_1} \xi(\tau) = \infty$ пространство $\Lambda(\psi)$ является точным экстраполяционным для параметров $\{(\tau_0, \tau_1); \xi\}$.

Замечание 1. Поскольку теоремы 3 и $3'$ показывают, что и для пространства квазилинейных операторов, и для пространства линейных операторов точное экстраполяционное пространство одно и то же, в определении 2 нет смысла делать акцент на пространство операторов.

Зафиксируем точки $0 \le t_0 < t_1 \le 1$. Пусть задана функция $\varphi : (t_0, t_1) \to R$. Введем преобразование

$$\check{\varphi}(s) = \inf_{t\in(t_0,t_1)} \{t \ln s + \varphi(t)\}. \quad (27)$$

Нетрудно видеть, что функция $\check{\varphi}(s)$ конечна тогда и только тогда, когда $\inf_{t\in(t_0,t_1)} \varphi(t) > -\infty$.

Отметим, что если при всех допустимых t справедливо неравенство $\varphi_0(t) \ge \varphi_1(t)$, то при всех s выполняется и неравенство $\check{\varphi}_0(s) \ge \check{\varphi}_1(s)$.

Лемма 2. *Если для функции* φ *функция* $\check{\varphi}$ *конечна, то она вогнутая.*

Доказательство. При фиксированном t функция $t \ln s + \varphi(t)$ вогнутая по s. Так как нижняя грань вогнутых функций является вогнутой, функция $\check{\varphi}$ вогнута.

Лемма доказана.

Наряду с преобразованием (27) положим

$$\widetilde{\varphi}(\tau) = \sup_{s \in (0,1)} \{\varphi(s) - \tau \ln s\}. \tag{28}$$

Сразу отметим, что из равенства $\lim\limits_{s \to 0} \ln s = -\infty$ следует, что для конечности функции $\widetilde{\varphi}(\tau)$ условие $\lim\limits_{s \to 0} \varphi(s) = -\infty$ является необходимым.

Нетрудно видеть, что и операция $\widetilde{\ }$ также сохраняет монотонность, т. е. если при всех допустимых t справедливо неравенство $\varphi_0(t) \geq \varphi_1(t)$, то при всех s выполняется и неравенство $\widetilde{\varphi}_0(s) \geq \widetilde{\varphi}_1(s)$. Из представления

$$\widetilde{\varphi}(\tau) = \sup_{s \in (0,1)} \{\ln e^{\varphi(s)} - \tau \ln s\} = \sup_{s \in (0,1)} \left\{ \ln \frac{e^{\varphi(s)}}{s^\tau} \right\}$$

следует, что функция $\widetilde{\varphi}$ конечна в точке $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ тогда и только тогда, когда

$$\varlimsup_{s \to +0} \frac{e^{\varphi(s)}}{s^\tau} < \infty. \tag{29}$$

Условие $\lim\limits_{\tau \to \tau_1} \widetilde{\varphi}(\tau) = \infty$ выполнено тогда и только тогда, когда верно соотношение

$$\varlimsup_{s \to +0} \frac{e^{\varphi(s)}}{s^{\tau_1}} = \infty. \tag{30}$$

Лемма 3. *Если для функции* φ *функция* $\widetilde{\varphi}$ *конечна на* $(0,1)$, *то она выпуклая.*

Доказательство. При фиксированном s функция $\varphi(s) - \tau \ln s$ линейна по τ и, следовательно выпукла по τ. Так как верхняя грань выпуклых функций выпукла, функция $\widetilde{\varphi}$ выпуклая.

Лемма доказана.

Замечание 2. Если пользоваться более широким определением выпуклости функции в терминах выпуклости надграфика, то $\widetilde{\varphi}$ всегда выпукла.

Зафиксируем точки $0 \leq \tau_0 < \tau_1 \leq 1$. Наша цель — показать, что при некоторых условиях на φ при всех $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ выполняется тождество

$$\widetilde{\check{\varphi}}(\tau) \equiv \varphi(\tau). \tag{31}$$

Для этого потребуются некоторые дополнительные построения.

Сначала проверим (31) для линейных функций. Соответствующий факт оформим в виде леммы.

Лемма 4. *Пусть* $\varphi(t) = a + bt$. *Тогда справедливы равенства*

$$\check{\varphi}(s) = \inf_{t \in (\tau_0, \tau_1)} t \ln s + a + bt = \min\{\tau_0 \ln s + a + b\tau_0, \tau_1 \ln s + a + b\tau_1\};$$

$$\widetilde{\check{\varphi}}(\tau) = \sup_{s \in (0,1)} \min\{\tau_0 \ln s + a + b\tau_0, \tau_1 \ln s + a + b\tau_1\} - \tau \ln s = a + b\tau.$$

Доказательство леммы получается непосредственным вычислением.

Лемма 5. *Зафиксируем точки* $0 \le \tau_0 < \tau_1 \le 1$. *Пусть* φ *— выпуклая на* (τ_0, τ_1) *функция. Тогда для каждого* $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ *справедливо неравенство*

$$\widetilde{\check{\varphi}}(\tau) \ge \varphi(\tau). \tag{32}$$

Доказательство. Зафиксируем $t_0 \in (\tau_0, \tau_1)$ и проведем в точке $(t_0, \varphi(t_0))$ к графику $\varphi(t)$ опорную прямую $l_{t_0}(t) = a + bt$, где

$$\varphi(t_0) = l_{t_0}(t_0) = a + bt_0; \quad \varphi(t) \ge l_{t_0}(t) \ \forall t \in (\tau_0, \tau_1).$$

Тогда непосредственно из определения для всех $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ следует неравенство $\check{\varphi}(\tau) \ge \check{l}_{t_0}(\tau)$, поэтому из леммы 4 вытекает неравенство

$$\widetilde{\check{\varphi}}(\tau) \ge \widetilde{\check{l}}_{t_0}(\tau) = l_{t_0}(\tau).$$

Полагая в последнем неравенстве $\tau = t_0$, получим (32).

Лемма доказана.

Следующий факт интересен сам по себе. Поэтому соответствующее утверждение оформим в виде теоремы.

Теорема 4. *Зафиксируем точки* $0 \le \tau_0 < \tau_1 \le 1$. *Пусть* $\varphi : (\tau_0, \tau_1) \to R_+$ *— выпуклая функция. Тогда для каждого* $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ *справедливо равенство* (31).

Доказательство. Из леммы 5 следует, что для доказательства теоремы достаточно для каждого $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ проверить неравенство

$$\widetilde{\check{\varphi}}(\tau) \le \varphi(\tau). \tag{33}$$

Итак, пусть на (τ_0, τ_1) задана произвольная выпуклая функция φ. Известно, что каждая выпуклая на интервале (τ_0, τ_1) функция непрерывна на нем. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем разбиение $\tau_0 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n < \dots < \tau_1$ с $\lim\limits_{i\to-\infty} t_i = \tau_0$, $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \tau_1$ так, чтобы для всех $i \in Z$ выполнялись условия

$$\sup_{t\in(t_i,t_{i+1})} |\varphi(t_i) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Будем считать, что разбиение $\{t_i\}$ содержит бесконечное число элементов для положительных и отрицательных индексов. Если же разбиение $\{t_i\}$ содержит для отрицательных или положительных индексов лишь конечное число элементов, то в дальнейших построениях достаточно сделать только незначительные изменения.

По разбиению $\{t_i\}$ построим кусочно линейную функцию φ_0, определив ее при $\tau \in (t_i, t_{i+1}]$ равенством $\varphi_0(\tau) = a_i + b_i(t - t_i)$, где $a_i = \varphi(t_i)$, $b_i = \frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$.

Отметим, что так построенная φ_0 также является непрерывной выпуклой функцией, причем при всех $t \in (\tau_0, \tau_1)$ выполняются соотношения

$$\varphi(t) \le \varphi_0(t) \le \varphi(t) + \varepsilon. \tag{34}$$

Действуя по аналогии с леммой 4, получим справедливость представления

$$\begin{aligned}\check{\varphi}_0(s) &= \inf_{t\in(\tau_0,\tau_1)} \{t \ln s + \varphi_0(t)\} = \inf_i \{\inf_{t\in(t_i,t_{i+1})} \{t \ln s + a_i + b_i(t - t_i)\}\} \\ &= \inf_i \{\min\{t_i \ln s + a_i, t_{i+1} \ln s + a_i + b_i(t_{i+1} - t_i)\}\} = \inf_i \{t_i \ln s + a_i\}.\end{aligned}$$

Используя монотонность введенных операций, получим

$$\widetilde{\check{\varphi}}_0(\tau) = \sup_{s\in(0,1)}\{\check{\varphi}_0(s) - \tau\ln s\} = \sup_{s\in(0,1)}\{\inf_i\{t_i\ln s + a_i\} - \tau\ln s\}$$
$$\le \inf_i \sup_{s\in(0,1)}\{t_i\ln s + a_i - \tau\ln s\}.$$

Для каждого $\tau\in(\tau_0,\tau_1)$ выберем $i(\tau)$ так, чтобы выполнялось включение $\tau\in(t_{i(\tau)}, t_{i(\tau)+1}]$. Тогда

$$\widetilde{\check{\varphi}}_0(\tau) \le \sup_{s\in(0,1)}\{(t_{i(\tau)+1}-\tau)\ln s + a_{i(\tau)+1}\} \le a_{i(\tau)+1} = \varphi_0(t_{i(\tau)+1}). \qquad (35)$$

Поэтому из монотонности операций и неравенств (34), (35) следует неравенство

$$\widetilde{\check{\varphi}}(\tau) \le \widetilde{\check{\varphi}}_0(\tau) \le \varphi_0(t_{i(\tau)+1}) = \varphi(t_{i(\tau)+1}) \le \varphi(t_{i(\tau)}) + \varepsilon \le \varphi(\tau) + 2\varepsilon,$$

откуда в силу произвольности ε получим неравенство (33).

Теорема доказана.

В следующей теореме дается характеристика пространств Лоренца, которые могут быть экстраполяционными.

Теорема 5. *Зафиксируем* (τ_0,τ_1). *Пространство Лоренца* $\Lambda(\psi)$ *является экстраполяционным относительно интервала* $\{(\tau_0,\tau_1)\}$ *тогда и только тогда, когда для каждого* $\tau\in(\tau_0,\tau_1)$ *выполнены равенства*

$$\lim_{t\to+0}\frac{\psi(t)}{t^\tau} = 0, \quad \lim_{t\to+0}\frac{\psi(t)}{t^{\tau_1}} = \infty \qquad (36)$$

и при всех $t\in(0,1)$ *с не зависящей от* t *константой справедливо соотношение*

$$\frac{1}{c}\psi(t) \le e^{\widetilde{\ln\check{\psi}(t)}} \le \psi(t). \qquad (37)$$

Доказательство. Покажем, что построенное в теоремах 2 и 2′ пространство $\Lambda(\psi_\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.

Если задана неубывающая логарифмически выпуклая функция $\xi:(\tau_0,\tau_1)\to R_+$ с $\lim\limits_{\tau\to\tau_1}\xi(\tau)=\infty$, то из теорем 2 и 2′ следует, что пространство $\Lambda(\psi_\xi)$ является точным экстраполяционным для параметров $\{(\tau_0,\tau_1);\xi\}$, где ψ_ξ определена равенством (3) и для $\psi_\xi(t)$ выполнено (36). Положим $\varphi(\tau)=\ln\xi(\tau)$. Тогда из первого условия (6) и (29) следует, что функция $\check{\varphi}(\tau)$ конечна, а из (3) вытекает или $\psi_\xi(\tau)=e^{\check{\varphi}(\tau)}$, или $\ln(\psi_\xi(\tau))=\check{\varphi}(\tau)$, или $\widetilde{\ln(\psi_\xi(\tau))}=\widetilde{\check{\varphi}(\tau)}$. Учитывая выпуклость функции φ и теорему 5, получим равенство $\widetilde{\ln(\psi_\xi(\tau))}=\varphi(\tau)$, или $\widetilde{\check{\ln(\psi_\xi(\tau))}}=\check{\varphi}(\tau)$, потенцируя которое, придем к (37).

Пусть теперь задано пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть выполнено (37). Положим $\varphi(\tau)=\widetilde{\ln(\psi(\tau))}$. Тогда из (36), (29) и (30) следует, что при $\tau\in(\tau_0,\tau_1)$ функция $\varphi(\tau)=\widetilde{\ln(\psi(\tau))}$ конечна и $\lim\limits_{\tau\to\tau_1}\varphi(\tau)=\infty$. Таким образом, в силу леммы 3 функция φ выпуклая. Положим $\xi(\tau)=\exp(\varphi(\tau))$. Тогда функция $\xi(\tau)$ логарифмически выпукла.

Покажем, что пространство $\Lambda(\psi)$ является точным экстраполяционным для параметров $\{(\tau_0,\tau_1);\xi\}$.

Для этого по функции $\xi(\tau)$ согласно формуле (3) построим функцию ψ_ξ:

$$\psi_\xi(t) = \exp \check{\varphi}(t) = \exp(\widetilde{\ln(\check{\psi}(t))}).$$

Из теорем 2 и $2'$ следует, что пространство $\Lambda(\psi_\xi)$ является точным экстраполяционным для параметров $\{(\tau_0, \tau_1); \xi\}$, а из (37) — что пространства $\Lambda(\psi_\xi)$ и $\Lambda(\psi)$ совпадают.

Теорема полностью доказана.

Замечание 3. Пусть теперь $\mu(\Omega) = \infty$. Тогда для $t \in (1, \infty)$ при $\tau < \tau_1$ верно неравенство

$$\frac{t^\tau}{t} \int_0^t x^*(s)\, ds \le \frac{t^{\tau_1}}{t} \int_0^t x^*(s).$$

Поэтому в равенстве (3) функцию $\psi_\xi(t)$ нужно доопределить при $t \ge 1$ равенством $\psi_\xi(t) = \psi_\xi(1-0)t^{\tau_1}$. Доказательство всех теорем в этом случае остается без изменений.

Сам факт изменения экстраполяционного пространства в случае бесконечной меры отмечался неоднократно (см., например, [16]). Это, по существу, связано с отсутствием вложений для рассматриваемых пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yano S.* An extrapolation theorem // J. Math. Soc. Japan. 1951. V. 3, N 2. P. 296–305.
2. *Бережной Е. И., Перфильев А. А.* Точная теорема экстраполяции для операторов // Функцион. анализ и его прил. 2000. Т. 34, № 3. С. 66–68.
3. *Milman M.* Extrapolation and optimal decompositions with applications to analysis. Berlin: Springer-Verl., 1994. (Lect. Notes Math.; V. 1580).
4. *Jawerth B., Milman M.* Extrapolation theory with applications // Memo. Amer. Math. Soc. 1991. V. 89, N 440. P. 1–82.
5. *Karadzhov G. E., Milman M.* Extrapolation theory: new results and applications // J. Approx. Theory. 2005. V. 133. P. 38–99.
6. *Асташкин С. В.* Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных действительным методом интерполяции // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 205–225.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1, 2.
8. *Асташкин С. В., Лыков К. В.* Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, «близких» к L^∞ // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 974–992.
9. *Асташкин С. В., Лыков К. В.* Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 250–266.
10. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
11 . *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. I, II. Berlin: Springer-Verl., 1979. (Arch. Math.; V. 87).
12. *Tao T.* A Converse extrapolation theorem for translation-invariant operators // J. Funct. Anal. 2001. V. 180. P. 1–10.
13. *Brudnyi Yu. A., Kruglyak N. Ya.* Interpolation functors and interpolation spaces. Amsterdam: North-Holland, 1991.
14. *Бережной Е. И.* Оценки равномерного модуля непрерывности функций из симметричных пространств // Изв. РАН. 1996. Т. 60, № 2. С. 3–20.
15. *Ульянов П. Л.* О работах Н. Н. Лузина по метрической теории функций // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 3. С. 15–70.

16. *Carro M.* On the range space of Yano's extrapolation theorem and new extrapolation estimates at infinity // Publ. Math. 2002. P. 27–37.

Статья поступила 6 марта 2012 г.

Бережной Евгений Иванович
Ярославский гос. университет,
ул. Советская, 14, Ярославль 150054
ber@uniyar.ac.ru