*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2013. Том 54, № 2*

*УДК 512.554*

# КОММУТАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА ГОМОТОПОВ $(-1,1)$–АЛГЕБР

**С. В. Пчелинцев**

**Аннотация.** Изучаются коммутаторные алгебры гомотопов $(-1,1)$-алгебр. Доказано, что они являются алгебрами Мальцева и удовлетворяют тождеству Филиппова $h_a(x,y,z)=0$ в случае строго $(-1,1)$-алгебр. Доказано также, что всякая алгебра Мальцева с тождествами $xy^3=0$, $xy^2z^2=0$ и $h_a(x,y,z)=0$ нильпотентна индекса не выше 6.

**Ключевые слова:** $(-1,1)$-алгебра, алгебра Мальцева, гомотоп, тождество, функции Филиппова, нильпотентность.

## Введение

Пусть $A$ — алгебра типа $(-1,1)$, $c$ — фиксированный ее элемент. Через $A^{(c)}$ обозначается $c$-гомотоп алгебры $A$, т. е. алгебра с той же аддитивной структурой и новым умножением $x\cdot_c y=(xc)y$. Если $c$ — обратимый элемент алгебры $A$ с единицей 1, то $A^{(c)}$ называется *$c$-изотопом алгебры $A$.*

Данная статья является продолжением [1]; ее цель — доказательство следующих трех теорем.

**Теорема 1.** *Коммутаторная алгебра всякого $c$-гомотопа $(-1,1)$-алгебры является алгеброй Мальцева.*

**Теорема 2.** *Пусть $A$ — строго $(-1,1)$-алгебра, $A^{(c)}$ — ее $c$-гомотоп. Тогда коммутаторная алгебра $(A^{(c)})^-$ удовлетворяет тождеству Филиппова $h_a(x,y,z)=0$.*

**Теорема 3.** *Алгебра Мальцева, удовлетворяющая тождествам $xy^3=0$, $xy^2z^2=0$ и $h_a(x,y,z)=0$, нильпотентна индекса не выше 6 (оценка точная).*

Из теорем 1–3 вытекает справедливость гипотез, высказанных автором в [1]. Кроме того, справедлива следующая

**Теорема** (об изотопах первичных $(-1,1)$-алгебр). *Пусть $A$ — первичная неассоциативная $(-1,1)$-алгебра, $A^{(c)}$ — ее $c$-изотоп. Тогда $A^{(c)}$ — первичная правоальтернативная алгебра, $(A^{(c)})^+$ — первичная йорданова алгебра, $(A^{(c)})^-$ — алгебра Мальцева, удовлетворяющая тождествам*

$$xy^3=0,\quad xy^2z^2=0,\quad h_a(x,y,z)=0,\quad x_1x_2\dots x_n=0,$$

*причем $n$ не больше 6 и может принимать значения 3, 4, 5, 6.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00938–а), фонда «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419).

Все результаты доказаны для алгебр над полем характеристики, отличной от 2 и 3.

Работа состоит из семи параграфов. В § 1 приведены основные определения, обозначения, известные тождества и предварительные результаты.

В § 2–5 содержится доказательство теоремы 1. Остановимся кратко на их содержании. Пусть $F := F[x, y, z, c]$ — свободная строго $(-1, 1)$-алгебра и $F_d$ — однородная компонента полистепени $d := (1, 2, 1, 3)$ относительно свободных порождающих $(x, y, z, c)$. Если $f_i \in F$ $(i = 1, 2, \dots)$, то обозначим через $\langle f_i \mid i = 1, 2, \dots\rangle^T$ $T$-идеал, порожденный многочленами $f_i$ $(i = 1, 2, \dots)$. Далее, если $I$ — $T$-идеал в $F$, то положим $I_d = I \cap F_d$. Положим также, что $F' := \langle [x, y]\rangle^T$ — коммутант алгебры $F$ и $I := \langle f_i \mid i = 1, 2, \dots, 4\rangle^T$, где

$$f_1 := [x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]x_7, \quad f_2 := (x_1, x_2, [x_3, x_4])[x_5, x_6]x_7,$$

$$f_3 := (x_1, x_2, x_3)[x_4, x_5][x_6, x_7], \quad f_4 := (x_1, x_2, (x_3, x_4, x_5))[x_6, x_7].$$

Пусть $\mu_y(x, z) = 0$ — определяющее тождество для алгебр Мальцева и $\mu^{(c)}$ — значение многочлена $\mu_y(x, z)$ в алгебре $(F^{(c)})^-$. Можно проверить, что $\mu^{(c)} \in I_d$. Заметим, что $\dim I_d = 6$, $F_d \cap F'^3 \subset I_d$ и $\dim(F_d \cap F'^3) = 2$. Конечно, можно было бы найти базис пространства $I_d$ и вывести отсюда, что $\mu^{(c)} = 0$. Поскольку этот способ требует большого объема вычислений, избран другой, более короткий путь.

В § 2 найдены необходимые соотношения $p_1$–$p_5$ между элементами типа $f_3$ и $f_4$. Заметим, что $\dim(F_d \cap \langle f_3, f_4\rangle^T) = 1$. В § 5 показано, что имеет место представление $\mu^{(c)} = \varphi_{c,x,z}(y, cy) - \psi_{c,y}(x, z) + \eta_{c,y}(x, z)$ для подходящих функций $\varphi$, $\psi$, $\eta$. В § 3–5 доказано, что каждое из этих слагаемых является тождеством алгебры $F$. В § 6 содержится доказательство теоремы 2. Сначала проверяется, что тройное произведение $\{x, y, z\}^{(c)}$, вычисленное в алгебре $(A^{(c)})^-$, обращается в нуль, если переменная $x$ принимает значение из коммутативного центра $K(A)$. Отсюда выводится, что в алгебре $(A^{(c)})^-$ верно тождество $\{xa^2, y, z\} = 0$, которое эквивалентно $h_a(x, y, z) = 0$ при наличии тождеств $xy^3 = 0$, $xy^2z^2 = 0$. Справедливость двух последних тождеств в алгебре $(A^{(c)})^-$ доказана в [1]. Отметим, что при доказательстве существенно использовались работы В. Т. Филиппова [2, 3].

В § 7 доказана теорема 3. В связи с теоремой 3 отметим известный результат В. Т. Филиппова: *алгебра Мальцева, удовлетворяющая* 3*-му условию Энгеля, над полем характеристики, отличной от* 2 *и* 5*, разрешима* [2].

## § 1. Основные понятия и тождества

**1. Основные определения и обозначения.** Всюду в работе термин «алгебра» означает алгебру над полем $\Phi$ характеристики, отличной от 2 и 3.

Как обычно, используются следующие обозначения:

$[x, y] := xy - yx$ — коммутатор, $x \circ y := xy + yx$ — йорданово произведение,

$(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор,

$[x, y, \dots, z] := [[[x, y], \dots], z]$ — правонормированный итерированный коммутатор.

Всюду в работе предполагается, что отсутствующие скобки расставлены правонормированным образом.

Через $A^-$ и $A^+$ обозначаются присоединенные алгебры относительно коммутирования и симметризованного умножения $x \odot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$:

$$A^- = \langle A; +, [,]\rangle \quad \text{и} \quad A^+ = \langle A; +, \odot\rangle.$$

Алгебра называется *правоальтернативной*, если она удовлетворяет тождеству $(x,y,y)=0$. Из тождества правой альтернативности вытекают простейшие следствия:

$$(x,y,z)=-(x,z,y) \quad \text{или } (xy)z+(xz)y=x(y\circ z),$$

Заметим, что в правоальтернативной алгебре справедливо правое тождество Муфанг: $(x,y,yz)=(x,y,z)y$.

Указанные тождества в дальнейшем применяются, как правило, без пояснений. Отметим также, что $A^+$ — йорданова алгебра, если $A$ правоальтернативна [4].

Правоальтернативная алгебра называется $(-1,1)$-*алгеброй*, если в ней выполнено тождество

$$(x,y,z)+(y,z,x)+(z,x,y)=0. \tag{1}$$

Правоальтернативная алгебра $A$ удовлетворяет тождеству (1), только если ее коммутаторная алгебра $A^-$ является алгеброй Ли.

Правоальтернативная алгебра называется *строго* $(-1,1)$-*алгеброй*, если в ней выполнено тождество строгости:

$$[[x,y],z]=0. \tag{2}$$

Всякая первичная неассоциативная $(-1,1)$-алгебра является строгой [5], и такие алгебры действительно существуют [6].

Антикоммутативная алгебра называется *алгеброй Мальцева*, если она удовлетворяет тождеству

$$\mu_y(x,z):=xy^2z-xzyy-x(yz)y-xy(yz)=0;$$

как обычно, отсутствующие скобки расставлены правонормированным образом, например, $xzy^2=((xz)y)y$ и $xy(zt)=(xy)(zt)$.

Алгебра $A$ называется *мальцевски-допустимой*, если ее коммутаторная алгебра $A^-$ является алгеброй Мальцева.

Введем следующие операторы, действующие в алгебрах $A$, $A^-$:

$R_a: x\to xa$ — оператор правого умножения в алгебре $A$,

$R_{a,b}=a^b:=R_aR_b-R_{ab}$; $\quad a_b:=R_{ab}-R_bR_a$ — операторы Смайли,

$T_{a,b}:=R_{[a,b]}+R_{a,b}$; заметим, что $T_{a,b}=-b_a$,

$ad(a): x\to[x,a]$ — оператор правого умножения в алгебре $A^-$.

**2. Основные тождества строго $(-1,1)$-алгебр.** Напомним основные тождества, выполняющиеся в произвольной строго $(-1,1)$-алгебре:

$$[x^2,y]=[x,x\circ y], \tag{3}$$

$$[x^2,y]=x\circ[x,y]+2(x,x,y), \tag{4}$$

$$[xy,z]=x[y,z]+[x,z]y+(x,y,z)+(y,x,z), \tag{5}$$

$$(x,y^2,z)=(x,y,y\circ z), \tag{6}$$

$$(a,xy,z)=(a,x,z)y+(a,y,z)x+\frac{1}{2}\{(a,x,[z,y])+(a,y,[z,x])+(a,[x,y],z)\}, \tag{7}$$

$$(xy,z,t)+(x,y,[z,t])=x(y,z,t)+(x,z,t)y, \tag{8}$$

$$([x,y],z,t)-([z,t],x,y)=[(x,z,t),y]+[x,(y,z,t)], \tag{9}$$

$$([x,y],x,z)-([x,z],x,y)=\frac{4}{3}[(x,y,x),z]=4[x,(y,x,z)]=2[x,(x,y,z)], \tag{10}$$

$$[x,(x,x,y)z]=0, \tag{11}$$

$$([x,y]^2,x,z)=([x,y],x,z)\cdot[x,y]=0, \tag{12}$$

$$[x,y]^2+\frac{3}{2}([x,y],x,y)=0, \tag{13}$$

$$((a,b,c),x,y)=((a,x,y),b,c)+(a,(b,x,y),c)+(a,b,(c,x,y)). \tag{14}$$

Тождества (3)–(8) выполняются во всякой правоальтернативной алгебре [4, 7], (9) и (13) доказаны в [8], а (10)–(12) и (14) — в [5].

Заметим, что из (12) и (13) вытекает тождество Клейнфелда $[x,y]^3=0$, которое в дальнейшем играет исключительно важную роль.

**3. Коммутативный центр строго $(-1,1)$-алгебры.** Для коммутативного центра используется обозначение $K(A)=\{k\in A \mid (\forall x)[k,x]=0\}$.

Всюду ниже $A$ — строго $(-1,1)$-алгебра с единицей 1; $k\in K(A)$ — центральный элемент; $a$, $b$, $x$, $y$, $z$, $t$ — произвольные элементы алгебры $A$. Центр $K(A)$ обладает свойствами, которые в дальнейшем используются без пояснений:

(а) алгебра $A$ является ассоциативным бимодулем над центром $K(A)$,

(б) центр $K(A)$ инвариантен относительно операторов $R_{x,y}$.

Кроме того, в [8] доказаны условные тождества алгебры $A$:

$$(k,x,y)=2(x,k,y)=2(y,x,k), \tag{15}$$

$$[kx,y]=[x,ky], \tag{16}$$

$$[kx,y]=k[x,y]+\frac{3}{2}(k,x,y), \tag{17}$$

$$(a,b,xk)=(a,b,x)k+(a,b,k)x. \tag{18}$$

**4. Предварительные результаты.**

**Лемма 1** (Роомельди [5]). *В алгебре $A$ справедливы следующие тождества:*

(а) $((c,c,x),c,y)=-\frac{1}{3}(c,c,x)[c,y]$,

(б) $((c,z,y),c,y)=\frac{1}{3}(c,c,(y,y,z))$,

(в) $((c,c,y),z,y)=a+2a'$, $(y,y,(c,c,z))=-3a$,

*где* $a=(c,y,(c,y,z))$, $a'=(y,c,(y,c,z))$.

Всюду ниже $c$ — фиксированный элемент в $A$, $A^{(c)}$ — ее $c$-гомотоп, $[x,y]_c$ — коммутатор в алгебре $A^{(c)}$, $ad_c(a)$ — оператор правого умножения в $(A^{(c)})^-$. Напомним [1], что элемент $k\in K(A)$ называется *сильно $c$-центральным*, если $kc\in K(A)$.

**Лемма 2** [1]. *В алгебре $A$ справедливы соотношения:*

(а) $ad_c(a)=ad(ca)+T_{c,a}$, *в частности*, $[k,a]_c=kT_{c,a}$,

(б) $[x,y]_c\equiv -c[x,y]-(c,x,y)(\operatorname{mod} K(A))$,

(в) *следующие элементы сильно $c$-центральны:*

$$g_{c,y}(x):=x[c,y]^2+3(x,c,y)[c,y] \quad \text{и} \quad (c,c,x)[c,y],$$

(г) *если $k$ сильно $c$-централен, то* $kT_{c,a}=-\frac{1}{2}kR_{c,a}=\frac{1}{3}kR_{[c,a]}$,

(д) $[[x,y]_c,y]_c=\frac{1}{3}[x,cy][c,y]+\frac{1}{3}g_{c,y}(x)$.

**Лемма 3** [9]. *Пусть $A_3$ — строго $(-1,1)$-алгебра от трех порождающих, $Z^*(A_3)$ — сумма всех идеалов алгебры $A_3$, содержащихся в центре $Z(A_3)$, $A_3'$ — коммутант, а $D(A_3)$ — идеал, порожденный ассоциаторами. Тогда*

(а) $(A_3')^2\subseteq Z^*(A_3)$, *в частности*, $(A_3')^3=(0)$,

(б) $A_3'\cdot D(A_3)+D(A_3)\cdot A_3'+(A_3,A_3,D(A_3))\subseteq Z^*(A_3)$,

(в) $(x,x,y)\cdot(z,z,t)=\frac{3}{8}(([x,z],x,y),z,t)$ *для любых* $x,y,z,t\in A_3$.

## § 2. Тождества, связанные с элементом $s_0$

Все леммы § 2–7, если не оговорено противное, доказываются для алгебры $A$. Кроме того, всюду ниже $s_0 := (c,x,z)[c,y]^2$. Заметим, что $s_0 \neq 0$, поскольку не существует первичных неассоциативных $(-1,1)$-алгебр с тождеством $s_0 = 0$.

Всюду ниже $\Delta_x^1(a)$ означает оператор частичной линеаризации и записывается справа от многочлена [4].

**Лемма 4.** (а) $2(x,c,z)[c,y]^2 = s_0$,
(б) $2(c,y,x)[c,y][c,z] = 4(y,c,x)[c,y][c,z] = 4(x,y,c)[c,y][c,z] = s_0$,
(в) $4(c,c,z)[x,y][c,y] = -3s_0$.

Доказательство. В силу леммы 3(а) в алгебре $A$ выполнены тождества

$$(c,x,y)[c,y]^2 = (y,c,x)[c,y]^2 = (x,x,c)[c,y]^2 = (c,c,z)[c,y]^2 = 0,$$

поскольку все многочлены содержатся в кубе коммутанта подходящей 3-порожденной строго $(-1,1)$-алгебры.

Используя их линеаризации и определяющие тождества $(-1,1)$-алгебр, легко проверить справедливость указанных пунктов. Докажем, например, п. (а). Пусть $w = [c,y]^2$. Тогда в силу правой альтернативности и тождества (1) имеем

$$\begin{aligned}\{(c,x,z) - 2(x,c,z)\}w &= \{((c,x,z) + (x,z,c) + (z,c,x)) + ((x,z,c) + (z,x,c))\}w \\ &= \{(x,z,c) + (z,x,c)\}w = (x,x,c)[c,y]^2\Delta_x^1(z) = 0. \ \square\end{aligned}$$

**Лемма 5.** *Пусть $k' = (k,c,y)$. Тогда*
(а) *функция $(c,c,x)\cdot(k,y,z)$ кососимметрична по $x$, $y$, $z$,*
(б) *функция $(x,z,c)\cdot k'$ кососимметрична по $x$, $z$,*
(в) $p_1 := (c,c,y)\cdot([c,y],x,z) + s_0 = 0$,
(г) $p_2 := ((c,c,y),x,z)[c,y] - s_0 = 0$.

Доказательство представим в виде последовательности пунктов.

$1^0$. $(c,c,x)\cdot(x,x,z) = 0$, $(c,c,x)\cdot(y,y,c) = 0$.

Действительно, на основании леммы 3(в) и тождеств (13) и (12) имеем

$$8(c,c,x)\cdot(x,x,z) = 3(([c,x],c,x),x,z) = -2([c,x]^2,x,z) = 0.$$

Второе равенство вытекает из первого, поскольку ассоциаторы $(c,c,x)$ и $(y,y,c)$ перестановочны. Заметим, что идеал $D(A_3)$ коммутативен [10].

$2^0$. Так как $3(c,c,x)\cdot(k,x,z) = 2(c,c,x)\cdot(x,x,z)\Delta_x^1(k) = 0$ ввиду тождества (15) и п. $1^0$, функция $(c,c,x)\cdot(k,y,z)$ кососимметрична по $x$, $y$, $z$, что и доказывает п. (а).

$3^0$. $(c,c,x)\cdot(k,y,z) = \{(z,c,x)+(c,z,x)\}\cdot k'$.

Поскольку в силу п. $1^0$ $(c,c,x)\cdot(y,y,c) = 0$, имеем $(c,c,x)\cdot(k,y,c) = 0$. Применяя оператор линеаризации $\Delta_c^1(z)$ к этому соотношению, получаем требуемое ввиду правой альтернативности.

$4^0$. Так как $(x,x,c)\cdot(k,c,y) = 0$ в силу п. $2^0$, то $(x,x,c)\cdot k' = 0$, что доказывает п. (б).

$5^0$. $\{2(x,z,c) + (c,x,z))\cdot k' = 0$.

Ввиду тождества (1) и п. (б)

$$0 = ((x,z,c) + (z,c,x) + (c,x,z))\cdot k' = (2(x,z,c) + (c,x,z))\cdot k'.$$

(в) Положим $k = [c, y]$, $k' = (k, c, y)$ и преобразуем $-2p_1$:

$$
\begin{aligned}
-2p_1 &= -2(c,c,y)\cdot(k,x,z) - 2(c,x,z)[c,y]^2 \\
&= 2(c,c,x)\cdot(k,y,z) + 3(c,x,z)\cdot([c,y],c,y) \quad \text{ввиду п. } 2^0 \text{ и } (13) \\
&= 2(c,c,x)\cdot(k,y,z) + 3(c,x,z)\cdot(k,c,y) \\
&= 2\{(z,c,x) + (c,z,x)\}\cdot k' + 3(c,x,z)\cdot k' \quad \text{в силу п. } 3^0 \\
&= \{2(z,c,x) + 2(c,z,x) + 3(c,x,z)\}\cdot k' \\
&= \{2(z,c,x) + (c,x,z)\}\cdot k' \quad \text{в силу правой альтернативности} \\
&= \{2(x,z,c) + (c,x,z)\}\cdot k' \quad \text{ввиду (б)} \\
&= 0 \quad \text{в силу п. } 5^0.
\end{aligned}
$$

(г) Применяя тождество (8) и равенство $D(A_2)\cdot A_2' = (0)$ [8], выполняющееся во всякой 2-порожденной $(-1,1)$-алгебре $A_2$, получаем

$$p_1 + p_2 = ((c,c,y),x,z)\cdot[c,y] + (c,c,y)\cdot([c,y],x,z) = ((c,c,y)\cdot[c,y],x,z) = 0. \ \square$$

**Лемма 6.** $p_3 := 2((c,c,x),y,z)[c,y] + s_0 = 0.$

Доказательство представим в виде последовательности пунктов, положив $r := ((c,c,x),y,z)\cdot[c,y]$.

$1^0$. $r = -((c,c,y),y,z)\cdot[c,x] - (c,c,x)\cdot([c,y],y,z)$.

Применяя (8) и кососимметричность функции $(c,c,x)[c,y]$ по $x$, $y$, имеем

$$
\begin{aligned}
r &= ((c,c,x),y,z)\cdot[c,y] = ((c,c,x)\cdot[c,y],y,z) - (c,c,x)\cdot([c,y],y,z) \\
&= -((c,c,y)\cdot[c,x],y,z) - (c,c,x)\cdot([c,y],y,z) \\
&= -(c,c,y)\cdot([c,x],y,z) - ((c,c,y),y,z)\cdot[c,x] - (c,c,x)\cdot([c,y],y,z) \\
&= -((c,c,y),y,z)\cdot[c,x] - (c,c,x)\cdot([c,y],y,z) \quad \text{в силу леммы 5(а).}
\end{aligned}
$$

$2^0$. $3((c,c,y),z,y) = -(y,y,(c,c,z)) - 2(c,c,(y,y,z))$.

По лемме 1(в) $((c,c,y),z,y) = a + 2a'$, $(y,y,(c,c,z)) = -3a$, значит,

$$3((c,c,y),z,y) = 3a + 6a' = -(y,y,(c,c,z)) - 2(c,c,(y,y,z)).$$

$3^0$. $(y,y,(c,c,z))\cdot[c,x] = 0$.

Достаточно воспользоваться центральностью элемента $(c,c,z)[c,x]$ (лемма 2(в)) и тождеством (18).

$4^0$. $3r = 2(c,c,x)\cdot[c,(y,y,z)] - 3(c,c,x)\cdot([c,y],y,z)$.

Действительно, применяя пп. $1^0$–$3^0$, получаем

$$
\begin{aligned}
3r &= -3((c,c,y),y,z)\cdot[c,x] - 3(c,c,x)\cdot([c,y],y,z) \\
&= 3((c,c,y),z,y)\cdot[c,x] - 3(c,c,x)\cdot([c,y],y,z) \\
&= -(y,y,(c,c,z))\cdot[c,x] - 2(c,c,(y,y,z))\cdot[c,x] - 3(c,c,x)\cdot([c,y],y,z) \\
&= -2(c,c,(y,y,z))\cdot[c,x] - 3(c,c,x)\cdot([c,y],y,z) \\
&= 2(c,c,x)\cdot[c,(y,y,z)] - 3(c,c,x)\cdot([c,y],y,z)
\end{aligned}
$$

в силу кососимметричности функции $(c,c,x)[c,t]$ по $x$, $t$.

$5^0$. $2r = (c,c,y)\cdot([c,y],x,z)$.

Действительно,

$$6r = 4(c,c,x)\cdot[c,(y,y,z)] - 6(c,c,x)\cdot([c,y],y,z) \quad \text{в силу п. } 4^0$$

$$
\begin{aligned}
&= 4(c,c,x)\cdot[(y,z,y),c] - 6(c,c,x)\cdot([c,y],y,z)\\
&= (c,c,x)\cdot\{3([y,z],y,c) - 3([y,c],y,z) - 6([c,y],y,z)\} \quad \text{в силу (10)}\\
&= (c,c,x)\cdot\{3([y,z],y,c) - 3([c,y],y,z)\}\\
&= -3(c,c,x)\cdot([c,y],y,z) \quad \text{ввиду п. } 3^0 \text{ леммы 5}\\
&= 3(c,c,y)\cdot([c,y],x,z) \quad \text{ввиду леммы 5(б).}
\end{aligned}
$$

$6^0$. Применяя п. $5^0$, получаем $p_3 - s_0 = 2r = (c,c,y)\cdot([c,y],x,z)$, откуда

$$p_3 = s_0 + (c,c,y)\cdot([c,y],x,z) = p_1 = 0. \ \square$$

**Лемма 7.** $p_4 := 4\{((c,c,z),y,x) + (y,(c,c,z),x)\}\cdot[c,y] - 3s_0 = 0.$

Доказательство. Преобразуем выражение

$$t := 4((c,c,z),y,x)[c,y] + 4(y,(c,c,z),x)[c,y].$$

Применяя тождества (4) и (15), приходим к равенству

$$t = \{3([c^2,z],y,x) - 4([c,z]c,y,x) - 4(y,[c,z]c,x)\}[c,y].$$

Используя тождества (8) и (18), имеем

$$t = \{3([c^2,z],y,x) - 4(c,y,x)[c,z] - 4(y,c,x)[c,z] - 4([c,z],y,x)c - 4(y,[c,z],x)c\}[c,y].$$

Отсюда ввиду (15) и леммы 4(б)

$$
\begin{aligned}
t &= \{3([c^2,z],y,x) - 4(c,y,x)[c,z] - 4(y,c,x)[c,z] - 6([c,z],y,x)c\}[c,y]\\
&= \{3([c^2,z],y,x) - 6([c,z],y,x)c\}[c,y] - 3s_0.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$p_4 = \{3([c^2,z],y,x) - 6([c,z],y,x)c\}[c,y] - 6s_0.$$

Снова в силу тождества (8)

$$
\begin{aligned}
p_4 &= \{3([c^2,z],y,x) - 6([c,z]c,y,x) + 6(c,y,x)[c,z]\}[c,y] - 6s_0\\
&= \{3([c^2,z],y,x) - 6([c,z]c,y,x)\}[c,y] - 3s_0 \quad \text{по лемме 4(б)}\\
&= 6((c,c,z),y,x)[c,y] - 3s_0 \quad \text{ввиду тождества (4)}\\
&= -3\{2((c,c,x),y,z)[c,y] + s_0\} = -3p_3 = 0 \quad \text{по лемме 6. } \square
\end{aligned}
$$

**Лемма 8.** $p_5 := 4(x,(c,c,z),y)[c,y] + s_0 = 0.$

Доказательство. Положим

$$p = ((c,c,z),y,x)[c,y], \quad q = (y,(c,c,z),x)[c,y], \quad r = (x,(c,c,z),y)[c,y].$$

Тогда в силу лемм 6 и 7 $s_0 = 2p$, $3s_0 = 4p + 4q$, откуда $s_0 = 4q$. Ввиду тождества (1) имеем $4r + 4p - 4q = 0$, откуда $4r + 2s_0 - s_0 = 0$, $4r + s_0 = 0$. $\square$

## § 3. Функция $\varphi_{c,x,z}(y,t)$

Введем в алгебре $A$ функцию

$$
\begin{aligned}
\varphi_{c,x,z}(y,t) := {}& 6[x,c][z,t][c,y] - 4[c,z][x,t][c,y] - 6([c,z],x,t)[c,y]\\
&- 3[x,t]([c,z],c,y) + 2([x,t][c,y],c,z)\\
&- 2[(x,c,z),t][c,y] - 2[x,(t,c,z)][c,y] - 2[x,t][c,(y,c,z)].
\end{aligned}
$$

Замечание. Можно доказать, что $\varphi_{c,x,z}(y,t) = 0$, если одна из линейных переменных принимает значение $c$ или $k$. Кроме того, функция $\varphi_{c,x,z}(y,t)$ кососимметрична только по переменным $y$ и $t$, поэтому и выбрано обозначение $\varphi_{c,x,z}(y,t)$. «Неправильное» расположение переменных $y$ и $z$ связано с доказательством теоремы 1, где и возникает эта функция именно в таком виде.

Целью параграфа является доказательство тождества $\varphi_{c,x,z}(y,cy) = 0$.

Поскольку очевидны равенства $\varphi_{c,x,z}(y,k) = 0$ и $\varphi_{c,x,z}(c,t) = 0$, достаточно показать, что функция $\varphi_{c,x,z}(y,t)$ является *слабо муфанговой* по переменным $y$, $t$, т. е.

$$\varphi_{c,x,z}(y,y) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_{c,x,z}(y,y^2) = 0.$$

Для проверки указанных равенств потребуются следующие две леммы.

В этом параграфе сравнение $a \approx b$ означает, что $(a-b)[c,y] = 0$ для фиксированных элементов $c$, $y$. Ясно, что $\approx$ является отношением эквивалентности.

**Лемма 9.** (а) $[x,c][z,y^2] \approx [x \circ y, c][z,y]$,
(б) $3(x,c,[c,z]) + [(c,c,z),x] \approx 0$,
(в) $[(x,c,z),y^2] + [x,(y^2,c,z)] = [(x \circ y, c, z), y] + [x \circ y, (y,c,z)]$.

Доказательство. (а) Поскольку по лемме 3(а) в алгебре $A_3$ куб коммутанта равен 0, функции $[x,c][z,y^2]$ и $[x,c][z,y]$ кососимметричны относительно $x$, $z$ по модулю пространства $\operatorname{Ker} R_{[c,y]}$. Значит, используя тождество (3), приходим к соотношению

$$[x,c][z,y^2] \approx -[z,c][x,y^2] = -[z,c][x \circ y, y] \approx [x \circ y, c][z,y].$$

(б) Ввиду тождеств (10) и (13)

$$3([c,x],c,z) - 3([c,z],c,x) = 4[(c,x,c),z], \quad 3([c,x],c,z) + 3([c,z],c,x) \approx 0,$$

откуда, вычитая почленно из второго первое, получаем $6([c,z],c,x) + 4[(c,x,c),z] \approx 0$. Тогда ввиду (15) и линеаризации $[(c,x,c),x] = 0$ имеем

$$12(x,c,[c,z]) + 4[(c,c,z),x] \approx 0.$$

(в) Аналогично п. (а) на основании тождеств (3) и (8) получаем

$$\begin{aligned}
[(x,c,z),y^2] + [x,(y^2,c,z)] &= [(x,c,z) \circ y, y] + [x, y \circ (y,c,z)] \\
&= [(x,c,z) \circ y, y] + [x \circ y, (y,c,z)] + [x \circ (y,c,z), y] \\
&= [(x,c,z) \circ y, y] + [x \circ (y,c,z), y] + [x \circ y, (y,c,z)] \\
&= [(x \circ y, c, z), y] + [x \circ y, (y,c,z)]. \ \square
\end{aligned}$$

**Лемма 10.** (а) $(k,x,y) \cdot [x,y] = 0$,
(б) $[(c,x,z) + (x,c,z), y] = -[[x,z]c + [c,z]x, y]$,
(в) $[c,(y,c,z)] \cdot [c,y] = 0$.

Доказательство. П. (а) доказан в [1, лемма 12]. (б) Достаточно воспользоваться тождествами (5) и (2). (в) Ввиду тождества (10) имеем

$$4[c,(y,c,z)] \cdot [c,y] = \{([c,y],c,z) - ([c,z],c,y)\} \cdot [c,y].$$

Каждое из слагаемых в правой части равно 0: первое в силу тождества (12), а второе в силу п. (а). $\square$

**Лемма 11.** $\varphi_{c,x,z}(y,y^2)=\varphi_{c,x\circ y,z}(y,y)$.

Доказательство. На основании тождеств (3) и (6) имеем

$$\begin{aligned}
&\varphi_{c,x,z}(y,y^2)-\varphi_{c,x\circ y,z}(y,y)\\
&=\{6[x,c][z,y^2][c,y]-4[c,z][x,y^2][c,y]-6([c,z],x,y^2)[c,y]\\
&\quad-3[x,y^2]([c,z],c,y)+2([x,y^2][c,y],c,z)\\
&\quad-2[(x,c,z),y^2][c,y]-2[x,(y^2,c,z)][c,y]-2[x,y^2][c,(y,c,z)]\}\\
&\quad-\{6[x\circ y,c][z,y][c,y]-4[c,z][x\circ y,y][c,y]-6([c,z],x\circ y,y)[c,y]\\
&\quad-3[x\circ y,y]([c,z],c,y)+2([x\circ y,y][c,y],c,z)\\
&\quad-2[(x\circ y,c,z),y][c,y]-2[x\circ y,(y,c,z)][c,y]-2[x\circ y,y][c,(y,c,z)]\}\\
&=6\{[x,c][z,y^2]-[x\circ y,c][z,y]\}[c,y]-2\{[(x,c,z),y^2]+[x,(y^2,c,z)]\}[c,y]\\
&\quad+2\{[(x\circ y,c,z),y]+[x\circ y,(y,c,z)]\}[c,y]=0 \quad \text{ввиду леммы 9.}
\end{aligned}$$

**Лемма 12.** $\varphi_{c,x,z}(y,y)=0$.

Доказательство. Используя кососимметричность функции $[c,z][x,y][c,y]$ по переменным $x$, $z$, линеаризацию тождества (12), тождество (8) и лемму 10, преобразуем функцию $\varphi_{c,x,z}(y,y)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{c,x,z}(y,y)&=6[x,c][z,y][c,y]-4[c,z][x,y][c,y]-6([c,z],x,y)[c,y]\\
&\quad-3[x,y]([c,z],c,y)+2([x,y][c,y],c,z)\\
&\quad-2[(x,c,z),y][c,y]-2[x,(y,c,z)][c,y]-2[x,y][c,(y,c,z)]\\
&=2[x,c][z,y][c,y]-6([c,z],x,y)[c,y]+3[c,y]([c,z],x,y)\\
&\quad-2[c,y]([c,y],x,z)-2[(x,c,z),y][c,y]-2[x,(y,c,z)][c,y]\\
&\quad+2[c,y][x,(y,c,z)]+2[c,y][c,(y,x,z)]\\
&=2[x,c][z,y][c,y]-3([c,z],x,y)[c,y]-2[c,y]([c,y],x,z)\\
&\quad-2[(x,c,z),y][c,y]+2[c,y][c,(y,x,z)]=\widetilde{\varphi}\cdot[c,y],
\end{aligned}$$

где $\widetilde{\varphi}=2[x,c][z,y]-3([c,z],x,y)-2([c,y],x,z)-2[(x,c,z),y]+2[c,(y,x,z)]$.

Далее, применяя снова тождество (8)

$$([c,y],x,z)-([x,z],c,y)=[(c,x,z),y]+[c,(y,x,z)]$$

и пп. (а), (б) леммы 10, получаем

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}&\approx 2[x,c][z,y]-3([c,z],x,y)-2[(c,x,z),y]-2[c,(y,x,z)]\\
&\quad-2[(x,c,z),y]+2[c,(y,x,z)]\\
&=2[x,c][z,y]-3([c,z],x,y)-2[(c,x,z),y]-2[(x,c,z),y]\\
&=2[x,c][z,y]-3([c,z],x,y)-2[(c,x,z)+(x,c,z),y]\\
&=2[x,c][z,y]-3([c,z],x,y)+2[[x,z]c+[c,z]x,y]\\
&=2[x,c][z,y]-3([c,z],x,y)+2[x,z][c,y]+3([x,z],c,y)\\
&\quad+2[c,z][x,y]+3([c,z],x,y) \quad \text{ввиду тождества (17)}\\
&\approx 4[x,c][z,y]+2[c,y][x,z]\approx 0,
\end{aligned}$$

поскольку $2[x,c][z,y][c,y]+[x,z][c,y]^2=[x,c][c,y]^2\Delta_c^1(z)=0$. $\square$

**Лемма 13.** $\varphi_{c,x,z}(y,cy)=0$.

Доказательство. Из лемм 11 и 12 вытекает $\varphi_{c,x,z}(y,y^2)=0$. Проводя линеаризацию $\Delta_y^1(c)$ и учитывая равенства $\varphi_{c,x,z}(y,k)=0$ и $\varphi_{c,x,z}(c,t)=0$, получаем требуемое. $\square$

## § 4. Основная лемма

**Основная лемма.** $\psi_{c,y}(x,z) := 12(x,c,y)\cdot[c,y][c,z] + 9(x,c,y)\cdot([c,z],c,y) - 6((x,c,y)\cdot[c,y],c,z) + 6((x,c,z),c,y)\cdot[c,y] + 6(x,c,[c,z])\cdot[cy,y] - 2[x,(c,c,z)y]\cdot[c,y] + 6(x,c,(y,c,z))\cdot[c,y] + 6(x,c,y)\cdot[c,(y,c,z)] = 0$.

Доказательство представим в виде последовательности пунктов.

$1^0$. Пусть $t := 6(x,c,[c,z])\cdot[cy,y] - 2[x,(c,c,z)y]\cdot[c,y]$ — это сумма пятого и шестого слагаемых, входящих в запись функции $\psi$. Докажем, что $t = 3s_0$.

Используя тождество (5) и п. $2^0$ из доказательства леммы 5, имеем

$$\begin{aligned} t &= 6(x,c,[c,z])\cdot[cy,y] + 2[(c,c,z)y,x]\cdot[c,y] \\ &= 6(x,c,[c,z])\cdot[c,y]y + 2[(c,c,z),x]\cdot[c,y]y - 2(c,c,z)\cdot[x,y][c,y] \\ &\quad + 2((c,c,z),y,x)\cdot[c,y] + 2(y,(c,c,z),x)\cdot[c,y] \\ &= 6(x,c,[c,z])\cdot[c,y]y + 2[(c,c,z),x]\cdot[c,y]y + 3s_0 \quad \text{ввиду лемм 4(г) и 7.} \end{aligned}$$

Отсюда на основании тождеств (15) и (10) получим

$$\begin{aligned} 2t &= 12(x,c,[c,z])\cdot[c,y]y + 4[(c,c,z),x]\cdot[c,y]y - 6(c,x,z)[c,y]^2 \\ &= 6([c,z],c,x)\cdot[c,y]y + 4[(c,x,c),z]\cdot[c,y]y - 6(c,x,z)[c,y]^2 \\ &= \{6([c,z],c,x) + 3([c,x],c,z) - 3([c,z],c,x)\}\cdot[c,y]y + 6s_0 = 6s_0, \end{aligned}$$

поскольку ввиду линеаризованного (13) и леммы 3(а)

$$\begin{aligned} &\{6([c,z],c,x) + 3([c,x],c,z) - 3([c,z],c,x)\}\cdot[c,y] \\ &\qquad = 3\{([c,z],c,x) + ([c,x],c,z)\}[c,y] = -4[c,x][c,z][c,y] = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $t = 3s_0$.

$2^0$. $2\psi = 15(x,c,y)\cdot([c,z],c,y) - 9(x,c,y)\cdot([c,y],c,z) - 12((x,c,y),c,z)\cdot[c,y] + 12((x,c,z),c,y)\cdot[c,y] + 12(x,c,(y,c,z))\cdot[c,y]$.

В силу п. $1^0$ и леммы 4(в) функция $2\psi$ имеет вид

$$\begin{aligned} 2\psi &= 18(x,c,y)\cdot([c,z],c,y) - 12((x,c,y)\cdot[c,y],c,z) + 12((x,c,z),c,y)\cdot[c,y] \\ &\quad + 12(x,c,(y,c,z))\cdot[c,y] + 12(x,c,y)\cdot[c,(y,c,z)]. \end{aligned}$$

Преобразуем второе слагаемое с помощью тождества (8), а последнее — с помощью тождества (10):

$$\begin{aligned} 2\psi &= 18(x,c,y)\cdot([c,z],c,y) - 12(x,c,y)\cdot([c,y],c,z) - 12((x,c,y),c,z)\cdot[c,y] \\ &\quad + 12((x,c,z),c,y)\cdot[c,y] + 12(x,c,(y,c,z))\cdot[c,y] \\ &\quad + 3(x,c,y)\cdot([c,y],c,z) - 3(x,c,y)\cdot([c,z],c,y) \\ &= 15(x,c,y)\cdot([c,z],c,y) - 9(x,c,y)\cdot([c,y],c,z) - 12((x,c,y),c,z)\cdot[c,y] \\ &\quad + 12((x,c,z),c,y)\cdot[c,y] + 12(x,c,(y,c,z))\cdot[c,y]. \end{aligned}$$

$3^0$. $(x,c,y)\cdot(k,c,y) = 0$.

Заметим, что в силу пп. $4^0$ и $5^0$ из доказательства леммы 5

$$(x,x,y)\cdot k' = 0, \quad \{2(x,y,c) + (c,x,y)\}\cdot k' = 0, \quad \text{где } k' = (k,c,y).$$

Значит, $\{(x,c,y)+(c,x,y)\}\cdot k' = 0$ и $\{2(x,y,c)+(c,x,y)\}\cdot k' = 0$. Из этих равенств легко получить требуемое соотношение $(x,c,y)\cdot(k,c,y) = 0$.

$4^0$. Применяя теперь п. $3^0$, лемму 3(б) и тождества (13) и (14), получаем

$$\begin{aligned}2\psi &= -9(x,c,y)\cdot\{([c,y],c,z)+([c,z],c,y)\}\\ &\quad+12\{-((x,c,y),c,z)+((x,c,z),c,y)+(x,c,(y,c,z))\}\cdot[c,y]\\ &= 12(x,c,y)[c,y][c,z]+12\{-((x,c,y),c,z)+((x,c,z),c,y)+(x,c,(y,c,z))\}\cdot[c,y]\\ &= 3s_0+12\{-((x,c,y),c,z)+((x,c,z),c,y)+(x,c,(y,c,z))\}\cdot[c,y]\\ &= 3s_0-12(x,(c,c,z),y)\cdot[c,y] = -3p_5 = 0.\quad\square\end{aligned}$$

## § 5. Доказательство теоремы 1

Пусть $S = St[X]$ — свободная строго $(-1,1)$-алгебра над $X$, $S^{(c)}$ — ее $c$-гомотоп ($c\in X$). Рассмотрим гомоморфизм $\varphi: S\to S^{(c)}$, продолжающий тождественное отображение множества $X$ на себя. Если $f\in S$, то положим $f^{(c)} = f^{\varphi}$. Ясно, что $f^{(c)}$ представляет собой многочлен, полученный из $f$, заменой умножения $\cdot$ умножением $\cdot_c$.

Определяющее тождество $\mu_y(x,z)=0$ алгебр Мальцева для коммутаторной алгебры имеет вид

$$\mu_y(x,z) = [x,y,y,z]-[x,z,y,y]-([x,[y,z],y]+[x,y,[y,z]]),$$

где $[x,y,z,t]$, $[x,[y,z],t]$, $[x,y,[z,t]]$ — правонормированные коммутаторы.

Заметим, что в круглых скобках в выражении $\mu_y(x,z)$ находится многочлен, полученный линеаризацией 2-энгелева элемента $[x,y,y]$:

$$[x,[y,z],y]+[x,y,[y,z]] = [x,y,y]\Delta_y^1([y,z]).$$

Положим $\nabla(x,y,z) = [x,y,y]\Delta_y^1(z) = [x,y,z]+[x,z,y]$. Тогда

$$\mu_y(x,z) = [x,y,y,z]-[x,z,y,y]-\nabla(x,y,[y,z]).$$

Теорема 1 утверждает, что алгебра $(S^{(c)})^-$ является алгеброй Мальцева, т. е. верно тождество $\mu_y(x,z)^{(c)} = [x,y,y,z]^{(c)}-[x,z,y,y]^{(c)}-\nabla^{(c)}(x,y,[y,z]_c)=0$.

Положим $f(x,y) = 6[x,y,y]^{(c)}$ и $f(x,y,z) = 6\nabla^{(c)}(x,y,z)$.

Итак, необходимо доказать тождество

$$\tilde f := [f(x,y),z]_c - f([x,z]_c,y) - f(x,y,[y,z]_c) = 0.$$

Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности пунктов, при этом линеаризации тождества Клейнфелда $[x,y]^3=0$ используются без пояснений.

$1^0$. $[f(x,y),z]_c = 2[x,cy][c,y][c,z]+2([x,cy]\cdot[c,y],c,z)+2(x,c,y)[c,y][c,z]$.

Напомним, что в силу пп. (в)–(д) леммы 2

$$f(x,y) = 6[x,y,y]^{(c)} = 2[x,cy][c,y]+2g_{c,y}(x),$$

где $g_{c,y}(x) = x[c,y]^2+3(x,c,y)[c,y]$ сильно $c$-централен и, значит,

$$3[g_{c,y}(x),z]_c = g_{c,y}(x)[c,z] = 3(x,c,y)[c,y][c,z],$$

откуда $[g_{c,y}(x),z]_c = (x,c,y)[c,y][c,z]$.

По лемме 2(а) в силу центральности элемента $[x,cy][c,y]$ имеем

$$[[x,cy][c,y],z]_c = [x,cy][c,y][c,z]+([x,cy]\cdot[c,y],c,z).$$

Тем самым получаем требуемое в п. $1^0$ соотношение

$$[f(x,y),z]_c = 2[[xc,y][c,y],z]_c + 2[g_{c,y}(x),z]_c$$
$$= 2[x,cy][c,y][c,z] + 2([x,cy][c,y],c,z) + 2(x,c,y)[c,y][c,z].$$

$2^0$. Поскольку по лемме 2(a)

$$[x,z]_c = [x,cz] + x[c,z] + (x,c,z), \quad [y,z]_c = [y,cz] + y[c,z] + (y,c,z),$$

представим $f([x,z]_c,y) + f(x,y,[y,z]_c)$ в виде суммы трех слагаемых:

$$f([x,z]_c,y) + f(x,y,[y,z]_c) = f_1 + f_2 + f_3,$$

где

$$f_1 = f([x,cz],y) + f(x,y,[y,cz]), \quad f_2 = f(x[c,z],y) + f(x,y,y[c,z]),$$
$$f_3 = f((x,c,z),y) + f(x,y,(y,c,z)),$$

и преобразуем последовательно каждое из них.

$3^0$. $f_1 = -6[x,c][z,cy][c,y]$.

Поскольку $f(x,y) = 2[x,cy][c,y] + 2x[c,y]^2 + 6(x,c,y)[c,y]$, то

$$f(k,y) = 2k[c,y]^2, \quad f(x,y,k) = 2[x,ck][c,y] + 6(x,c,k)[c,y].$$

Следовательно,

$$f_1 = 2[x,cz][c,y]^2 + 2[x,c[y,cz]][c,y] + 6(x,c,[y,cz])[c,y].$$

Преобразуем второе слагаемое, используя тождества (17) и (15):

$$2[x,c[y,cz]][c,y] = -2[[y,cz]c,x][c,y] = -2[y,cz][c,x][c,y] - 3([y,cz],c,x)[c,y]$$
$$= -2[y,cz][c,x][c,y] - 6(x,c,[y,cz])[c,y],$$

значит,

$$f_1 = 2[x,cz][c,y]^2 - 2[y,cz][c,x][c,y].$$

На основании линеаризации тождества $[x,c][c,y]^2 = 0$ и тождества (16) имеем

$$[x,cz][c,y]^2 = -2[x,c][cz,y][c,y] = -2[x,c][z,cy][c,y],$$

$$-[y,cz][c,x][c,y] = -[x,c][cz,y][c,y] = -[x,c][z,cy][c,y],$$

значит, $f_1 = -6[x,c][z,cy][c,y]$.

$4^0$. $k[c,y]^2 = (k,c,y)[c,y] = [kc,y][c,y] = 0$, где $k = [c,z]$.

Первый элемент содержится в кубе коммутанта 3-порожденной алгебры и, значит, равен 0 по лемме 3(a). Второй элемент равен 0 по [1, лемма 12], а третий на основании тождества (17) является линейной комбинацией первого и второго.

$5^0$. $f_2 = 6k[x,cy][c,y] + 6(k,x,cy)[c,y] + 12(x,c,y)k[c,y] - 3[x,cy](k,y,c) + 6(x,c,y)k[c,y] + 6(x,c,k)[cy,y] + 9(x,c,y)(k,c,y)$, где $k = [c,z]$.

Поскольку

$$f(x,y) = 2[x,cy][c,y] + 2x[c,y]^2 + 6(x,c,y)[c,y],$$

в силу п. $4^0$ и тождества (16) имеем

$$f_2 = f(xk,y) + f(x,y,yk) = 2[xk,cy][c,y] + 6(xk,c,y)[c,y]$$
$$+ 2[x,cky][c,y] + 2[x,cy][c,ky] + 6(x,c,ky)[c,y] + 6(x,c,y)[c,ky]$$
$$= 4[kx,cy][c,y] + 6(xk,c,y)[c,y] - 2[x,cy][ky,c] + 6(x,c,ky)[c,y] + 6(x,c,y)[ky,c].$$

Ассоциаторы и коммутаторы, содержащие произведения $kx$ и $ky$, преобразуем с помощью тождеств (8), (17) и (18), используя вновь п. $4^0$:

$$\begin{aligned}f_2 = 4k[x,cy][c,y] + 6(k,x,cy)[c,y] + 6(x,c,y)k[c,y]\\ - 2k[x,cy][y,c] - 3[x,cy](k,y,c) + 6(x,c,y)k[c,y] + 6(x,c,k)y[c,y]\\ + 6(x,c,y)[c,y]k + 9(x,c,y)(k,c,y)\\ = 6k[x,cy][c,y] + 6(k,x,cy)[c,y] + 12(x,c,y)k[c,y]\\ - 3[x,cy](k,y,c) + 6(x,c,y)k[c,y] + 6(x,c,k)y[c,y] + 9(x,c,y)(k,c,y).\end{aligned}$$

Заметив, что $[cy,y] = y[c,y] + (y,c,y)$ ввиду (5), на основании (18), (7) и

$$2(x,c,k)(y,c,y) = 2(y,c(x,c,k),y) = (y,(x,c^2,k),y) = 0$$

получаем, что предпоследнее слагаемое в $f_2$ равно $6(x,c,k)[cy,y]$.

$6^0$. $[c,(y,c,z)][c,y] = 0$.

Это утверждение вытекает из тождеств (10), (12), п. $4^0$ и леммы 3(a).

$7^0$. $f_3 = 2[(x,c,z),cy][c,y] + 2(x,c,z)[c,y]^2 + 6((x,c,z),c,y)[c,y]$ $+2[x,c(y,c,z)][c,y] + 2[x,cy][c,(y,c,z)] + 6(x,c,(y,c,z))[c,y] + 6(x,c,y)[c,(y,c,z)]$.

Поскольку $f(x,y) = 2[x,cy][c,y] + 2x[c,y]^2 + 6(x,c,y)[c,y]$, то

$$\begin{aligned}f_3 = f((x,c,z),y) + f(x,y,(y,c,z))\\ = 2[(x,c,z),cy][c,y] + 2(x,c,z)[c,y]^2 + 6((x,c,z),c,y)[c,y]\\ + 2[x,c(y,c,z)][c,y] + 2[x,cy][c,(y,c,z)] + 4x[c,(y,c,z)][c,y]\\ + 6(x,c,(y,c,z))[c,y] + 6(x,c,y)[c,(y,c,z)].\end{aligned}$$

Отсюда ввиду п. $6^0$ получаем требуемое представление для $f_3$.

$8^0$. $2(x,c,y)[c,z][c,y] + (x,c,z)[c,y]^2 = 0$.

Из пп. (а) и (б) леммы 4 следует, что

$$4(x,c,y)[c,z][c,y] = -4(x,y,c)[c,y][c,z] = -s_0 = -2(x,c,z)[c,y]^2.$$

$9^0$. $((x,c,y)[c,y],c,z) = 0$.

В силу пп. (в), (г) леммы 2 имеем $2g_{c,y}(x)[c,z] + 3(g_{c,y}(x),c,z) = 0$. Следовательно,

$$6(x,c,y)[c,y][c,z] + 3(x[c,y]^2,c,z) + 9((x,c,y)[c,y],c,z) = 0.$$

Поскольку $(x[c,y]^2,c,z) = (x,c,z)[c,y]^2$ ввиду тождеств (8) и (12), сумма первых двух слагаемых равна 0 в силу леммы 4, значит, последнее слагаемое также нулевое.

$10^0$. Пусть $t = cy$. Используя пп. $1^0$, $3^0$, $5^0$ и $7^0$, преобразуем $\tilde f$:

$$\begin{aligned}\tilde f = [f(x,y),z]_c - f([x,z]_c,y) - f(x,y,[y,z]_c) = [f(x,y),z]_c - f_1 - f_2 - f_3\\ = 2[x,t][c,y][c,z] + 2([x,t]\cdot[c,y],c,z) + 2(x,c,y)[c,y][c,z] + 6[x,c][z,t][c,y]\\ - 6[c,z][x,t][c,y] - 6([c,z],x,t)[c,y] - 12(x,c,y)[c,z][c,y] + 3[x,t]([c,z],y,c)\\ - 6(x,c,y)[c,z][c,y] - 6(x,c,[c,z])[t,y] - 9(x,c,y)([c,z],c,y) - 2[(x,c,z),t][c,y]\\ - 2(x,c,z)[c,y]^2 - 6((x,c,z),c,y)[c,y] - 2[x,c(y,c,z)][c,y]\\ - 2[x,t][c,(y,c,z)] - 6(x,c,(y,c,z))[c,y] - 6(x,c,y)[c,(y,c,z)].\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\tilde f - \varphi_{c,x,z}(y,cy) + \psi_{c,y}(x,z) = 2\{[x,(cy,c,z)] - [x,c(y,c,z)] - [x,(c,c,z)y]\}[c,y]\\ - \{4(x,c,y)[c,z][c,y] + 2(x,c,z)[c,y]^2 + 6((x,c,y)[c,y],c,z)\}.\end{aligned}$$

Выражения, связанные с фигурными скобками, нулевые: первое — в силу тождества (8), второе — на основании пп. $8^0$ и $9^0$. Тем самым теорема 1 доказана.

Замечание. Поскольку характеристика поля отлична от 2 и 3, тождество $\mu_y(x,z)^{(c)} = 0$ эквивалентно своей полной линеаризации. В силу [11, 12] всякое полилинейное тождество справедливо во всех $(-1,1)$-алгебрах, если оно выполняется в строго $(-1,1)$-алгебрах, ассоциативных алгебрах и алгебре Михеева $M_0$ с единицей. Заметим, что гомотоп ассоциативной алгебры является ассоциативной алгеброй.

Легко проверить, что гомотоп $M_0^{(c)}$ — Ли-допустимая алгебра. Напомним [12], что $M_0$ получается внешним присоединением единицы 1 к трехмерной алгебре с базисом $e$, $g$, $h$ и следующими ненулевыми произведениями: $e^2 = e$, $ge = g$, $g^2 = h$.

Пусть $c = \alpha 1 + \beta e + \gamma g + \delta h$. Тогда умножение в $M_0^{(c)}$ описывается таблицей

| | $1$ | $e$ | $g$ | $h$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $\alpha 1 + \beta e + \gamma g + \delta h$ | $(\alpha+\beta)e + \gamma g$ | $\alpha g + \gamma h$ | $\alpha h$ |
| $e$ | $(\alpha+\beta)e$ | $(\alpha+\beta)e$ | $0$ | $0$ |
| $g$ | $(\alpha+\beta)g + \gamma h$ | $(\alpha+\beta)g$ | $(\alpha+\beta)h$ | $0$ |
| $h$ | $\alpha h$ | $0$ | $0$ | $0$ |

Значит, коммутаторная алгебра $\left(M_0^{(c)}\right)^-$ является прямой суммой одномерного центра и 3-мерной антикоммутативной алгебры с базисом 1, $e$, $g$ и таблицей умножения:

$$[1,e] = \gamma g, \quad [1,g] = -\beta g, \quad [e,g] = -(\alpha+\beta)g.$$

Поскольку якобиан в любой антикоммутативной алгебре является кососимметрической функцией своих аргументов, достаточно вычислить единственный якобиан:

$$\begin{aligned} J(1,e,g) &= [[1,e],g] + [[e,g],1] + [[g,1],e] = [\gamma g, g] + [\beta g, e] + [-(\alpha+\beta)g, 1] \\ &= -\beta[e,g] + (\alpha+\beta)[1,g] = \beta(\alpha+\beta)g - (\alpha+\beta)\beta g = 0. \end{aligned}$$

Значит, всякий $c$-гомотоп $M_0^{(c)}$ алгебры Михеева является $(-1,1)$-алгеброй. Следовательно, в любой $(-1,1)$-алгебре $A$ верно тождество $\mu_y(x,z)^{(c)} = 0$ , т. е. $c$-гомотоп алгебры $A$ мальцевски-допустим.

Отметим специально, что проверка тождества $\mu^{(c)} = 0$ была проведена предварительно с помощью компьютерной программы «Мальцев» [13].

## § 6. О функции Филиппова $h_a(x,y,z)$

**1. Тройное произведение в алгебре** $(A^{(c)})^-$. Рассмотрим в антикоммутативной алгебре тройное произведение:

$$\{x,y,z\} = xyz - xzy + 2x(yz).$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned} \{x,y,z\} &= xyz - xzy + 2x(yz) = xyz + x(yz) - xzy + x(yz) \\ &= -(yxz + yzx) + (zxy + zyx) = -(yz^2)\Delta_z^1(x) + (zy^2)\Delta_y^1(x). \end{aligned}$$

**Лемма 14.** *Если $k \in K(A)$, $y, z \in A$, то $\{k, y, z\}^{(c)} = 0$, где $\{x, y, z\}$ обозначает тройное произведение в коммутаторной алгебре $A^-$.*

Доказательство. По лемме 2(д)

$$3[y, z, z]^{(c)} = [y, cz][c, z] + y[c, z]^2 + 3(y, c, z)[c, z],$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
3\{k, y, z\}^{(c)} &= -3[y, z, z]^{(c)}\Delta_z^1(k) + 3[z, y, y]^{(c)}\Delta_y^1(k) \\
&= -[ky, c][c, z] - 3(y, c, k)[c, z] + [kz, c][c, y] + 3(z, c, k)[c, y] \quad \text{ввиду (16)} \\
&= -k[y, c][c, z] - \frac{3}{2}(k, y, c)[c, z] - 3(y, c, k)[c, z] \\
&\quad + k[z, c][c, y] + \frac{3}{2}(k, z, c)[c, y] + 3(z, c, k)[c, y] \quad \text{ввиду (17)} \\
&= -\frac{3}{2}(k, y, c)[c, z] - 3(y, c, k)[c, z] + \frac{3}{2}(k, z, c)[c, y] + 3(z, c, k)[c, y] = 0,
\end{aligned}$$

поскольку ввиду (15) $\frac{1}{2}(k, z, c) + (z, c, k) = (z, k, c) + (z, c, k) = 0$. □

**2. О равносильности тождеств $\{xa^2, y, z\} = 0$ и $h_a(x, y, z) = 0$.** По теореме 1 алгебра $M = (A^{(c)})^-$ является алгеброй Мальцева. Произведение элементов $a$ и $b$ в алгебре $M$ будем обозначать через $ab$. Учитывая [1, теорема 2], леммы 2(в) и 14, получаем, что в алгебре Мальцева $M$ справедливы тождества

$$ax^2a = 0, \tag{19}$$

$$ax^2y^2 = 0, \tag{20}$$

$$\{xa^2, y, z\} = 0. \tag{21}$$

Заметим, что тождество (19) эквивалентно 3-му условию Энгеля.

Известно, что в любой алгебре Мальцева $M$ выполнены тождества Сейгла [14]:

$$xyzt + yztx + ztxy + txyz = (xz)(yt), \tag{22}$$

$$\{J(x, y, z), y, z\} = 0, \tag{23}$$

где $J(x, y, z) := xyz + yzx + zxy$ — якобиан элементов $x$, $y$, $z$.

Кроме того, $E(M) := \Phi\langle ab^2 \mid a, b \in M\rangle$ — идеал алгебры $M$ и $M^4 \subseteq E(M)$ [2].

Всюду ниже $a, b, c, x, y, z, t, p, q, r, s \in M$; $u, v, w \in M^2$; $V, W \in M^3$; $e \in E(M)$.

**Лемма 15.** *В алгебре Мальцева из тождеств* (19) *и* (20) *вытекает тождество*

$$\{axy, x, y\} = 0. \tag{24}$$

Доказательство. Из тождеств (19), (20) и тождества (19) из [2] имеем

$$ax^2y + axyx + ayx^2 = 0, \tag{25}$$

$$axy^2x = 0. \tag{26}$$

Применяя тождества (20), (25) и (26), получаем

$$axyxy = -ayx^2y - ax^2y^2 = 0. \tag{27}$$

Поскольку $\{axy, x, y\} = axyxy - axyyx + 2axy(xy)$, достаточно доказать, что каждое слагаемое равно 0. Первые два слагаемых нулевые ввиду (27) и (26). Третье слагаемое преобразуем, используя тождество Сейгла (22):

$$\begin{aligned}(ax)y\cdot(xy) &= (ax)xyy + xyy(ax) + yy(ax)x + y(ax)xy\\ &= (ax)xyy + xyy(ax) - (ax)yxy = xyy(ax) \quad \text{ввиду (20) и (27)}\\ &= xy^2(ax) = -(ax)y^2x \quad \text{ввиду линеаризованного (19)}\\ &= 0 \quad \text{ввиду (26).} \ \square\end{aligned}$$

Напомним [3] определение функции Филиппова $h$:

$$h_a(x,y,z) := \{xy, z, a\}a + \{xa, y, a\}z.$$

Докажем, что из тождеств (19)–(21) вытекает $h_a(x, y, z\} = 0$, что и завершит доказательство теоремы 2. В [3, с. 671] получено представление

$$h_a(y,z,t) = \{yza, t, a\} + \{tay, z, a\} + \{ta^2, z, y\} - \{zat, y, a\} + \{yta, z, a\}.$$

Отсюда ввиду линеаризации тождеств (21) и (24) имеем

$$\begin{aligned}h_a(y,z,t) &= \{yza, t, a\} + \{tay, z, a\} - \{zat, y, a\} + \{yta, z, a\}\\ &= -\{tza, y, a\} - \{taz, y, a\} - \{zat, y, a\} - \{zta, y, a\}\\ &= -\{(tza + taz) + (zat + zta), y, a\} = 0.\end{aligned}$$

Замечание. Если выполнены тождества (19) и (20), то $h_a = 0$ равносильно (21). Действительно, ввиду тождества (9) из [3] тождество $h_a = 0$ влечет

$$\{xa^2, y, z\} + \{ya^2, z, x\} + \{za^2, x, y\} = 0.$$

Поскольку функция $\{x, y, z\}$ кососимметрична по $y$, $z$, достаточно доказать тождество $\{xa^2, x, y\} = 0$. Алгебра Мальцева бинарно лиева, а 2-порожденная алгебра Ли с тождествами (19) и (20) нильпотентна индекса 4, стало быть, верно тождество $\{xa^2, x, a\} = 0$. Значит, достаточно проверить справедливость тождеств

$$\{xay, x, a\} = \{xya, x, a\} = 0.$$

Они немедленно вытекают из леммы 14 и второго тождества Сейгла (23).

## § 7. Алгебры Мальцева с тождествами (19)–(21)

**1. Предварительные леммы.**

**Лемма 16.** *$[e, x, y] = 0$, где $[x, y, z] = xyz + x(yz)$ — антиассоциатор от $x$, $y$, $z$.*

Доказательство. В силу (21) $0 = \{e, x, y\} = exy - eyx + 2e(xy) = 2exy + 2e(xy)$, откуда вытекает равенство $[e, x, y] = 0$. $\square$

**Лемма 17.** *$ut^2w = 0$, $uvw = 0$, $uvxy = 0$.*

Доказательство. Ввиду линеаризованного тождества (26)

$$(xy)t^2(xz) = -(x(xz))t^2y = -zx^2t^2y = 0,$$

откуда вытекает кососимметричность функции $(ab)t^2(xy)$ по $a$, $b$, $x$, $y$. Тогда

$$(ab)t^2(xy) = -(xb)t^2(ay) = (xy)t^2(ab) = -(ab)t^2(xy)$$

в силу линеаризованного (19), откуда $2ut^2w = 0$, что и доказывает первое равенство.

Докажем теперь, что $(xy)(xz)w = 0$. В силу тождеств (22) и (25)

$$(xy)(xz) = xxyz + xyzx + yzxx + zxxy = -yxzx + yzxx - yxxz = 2yzxx.$$

Значит, $(xy)(xz)w = 2yzx^2w = 0$, т. е. функция $(ab)(xy)w$ кососимметрична по $a$, $b$, $x$, $y$, значит, функция $uvw$ симметрична по $u$, $v$, но в силу антикоммутативности она кососимметрична по этим переменным. Таким образом, $uvw = 0$. Отсюда в силу леммы 16 получаем $uvxy = 0$. $\square$

**Лемма 18.** *Функции $abxyzt$, $abxy(zt)$, $abx(yz)t$ кососимметричны по всем переменным.*

Доказательство представим в виде последовательности пунктов, отождествляя последовательно пару переменных.

$1^0$. $ab^2yzt = 0$.

В силу линеаризованных тождеств (19), (20) и лемм 16, 17

$$ab^2cw = -ab^2wc = wb^2ac = -wb^2(ac) = 0.$$

Значит, $ab^2yzt = -ab^2y(zt) = 0$.

$2^0$. $abx^2zt = 0$ в силу леммы 17.

$3^0$. $abxy^2t = 0$. В силу (19) и леммы 16 имеем

$$wxy^2t = -ty^2(wx) = ty^2wx = -wy^2tx = 0$$

в силу леммы 17.

$4^0$. $abxyz^2 = 0$. В силу (25) и п. $3^0$

$$wxyz^2 = -wxzyz - wxz^2y = wxzzy - wxz^2y = 0.$$

Тем самым доказано, что первая функция кососимметрична по всем переменным. Заметим, что вторая функция в силу леммы 16 противоположна первой.

$5^0$. Преобразуем выражение $W(yz)z$, где $W = abx$, используя тождество (25) и п. $4^0$:

$$W(yz)z = -yzWz = yWz^2 + yz^2W = yz^2W.$$

В силу леммы 16 и п. $1^0$

$$yz^2(abc) = -yz^2(ab)c = yz^2abc = 0.$$

Значит, функция $abx(yz)t$ кососимметрична по $y$, $z$, $t$. Из леммы 16 и п. $1^0$ вытекает ее кососимметричность по $a$, $b$, $x$. Значит, осталось проверить, что она кососимметрична по $x$, $t$. В силу (19) $vxwx = -vx^2w - vwx^2 = 0$ по лемме 16. $\square$

**Лемма 19.** $Vxw = -Vwx$.

Доказательство. Пусть $v = pq$, $w = rs$, $V = va$.

В силу тождества (19) $ax^2w + wx^2a = 0$ и $axvw + avxw + wvxa + wxva = 0$. Отсюда с учетом леммы 17

$$avxw + wxva = 0. \tag{28}$$

Из леммы 18 вытекает

$$wxva = -wavx = -vawx. \tag{29}$$

Значит, из (28) и (29) имеем $avxw = -wxva = vawx = -avwx$, но это и есть требуемое соотношение. $\square$

**2. Доказательство теоремы 3.** Докажем сначала, что $(M^4M)M = (0)$. Так как в алгебре $M$ верно тождество Филиппова $h_a = 0$, линеаризуя его по $a$, имеем

$$\{xy, z, w\}a + \{xy, z, a\}w + \{xw, y, a\}z + \{xa, y, w\}z = 0. \tag{30}$$

Положим $t := xyzaw$ и проведем предварительные вычисления, применяя леммы 17 и 18:

$$xyzwa = -t, \quad xaywz = -t,$$
$$xy(zw)a = -zw(xy)a = -z(xy)wa = xyzwa = -t,$$
$$xwyaz = -xwy(az) = -x(az)yw = (az)xyw = azxyw = xyazw = -t,$$
$$xw(ya)z = -(ya)(xw)z = -yaxwz = -xyawz = xyazw = -xyzaw = -t,$$
$$(xa)(yw)z = -(yw)(xa)z = xw(ya)z = -t.$$

Каждое слагаемое из (30) выразим через $t$, используя предварительные вычисления и лемму 16:

$$\{xy, z, w\}a = xyzwa - xywza + 2xy(zw)a = -t - 2t = -3t,$$
$$\{xy, z, a\}w = 2xyzaw = 2t,$$
$$\{xw, y, a\}z = 2xwyaz + 2xw(ya)z = -2t - 2t = -4t,$$
$$\{xa, y, w\}z = xaywz + 2(xa)(yw)z = -t - 2t = -3t,$$

следовательно, (30) принимает вид $-3t + 2t - 4t - 3t = 0$ или $-8t = 0$, значит, $t = 0$.

Итак, $(M^4M)M = 0$. Тогда в силу леммы 16 $M^4M^2 = (0)$. Отсюда ввиду леммы 19 получаем $(M^3M^2)M = 0$. Значит, $M^5M = (0)$.

Обозначая оператор правого умножения в алгебре Мальцева через $R_x$, заметим, что справедливо операторное соотношение [14]

$$2R_{xyz} = [[R_x, R_y], R_z] + [R_y, R_{zx}] + [R_x, R_{yz}],$$

из которого вытекает $(M^3)^2 = (0)$. $\square$

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Пчелинцев С. В.* Изотопы первичных $(-1, 1)$- и йордановых алгебр // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 388–423.
2. *Филиппов В. Т.* О полупервичных алгебрах Мальцева характеристики 3 // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 1. С. 100–111.
3. *Филиппов В. Т.* Первичные алгебры Мальцева // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 5. С. 669–677.
4. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
5. *Роомельди Р. Э.* Центры свободного $(-1, 1)$-кольца // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 4. С. 861–876.
6. *Пчелинцев С. В.* Первичные алгебры и абсолютные делители нуля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 1. С. 79–100.
7. *Kleinfeld E.* Right alternative rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. V. 4. P. 939–944.
8. *Hentzel I. R.* The characterization of $(-1, 1)$-rings // J. Algebra. 1974. V. 30. P. 236–258.
9. *Пчелинцев С. В.* Тождества свободной $(-1, 1)$-алгебры ранга 3 // Исследования по теории колец и алгебр. Новосибирск: Наука, 1989. С. 110–131.
10. *Роомельди Р. Э.* $(-1, 1)$-Кольца: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1975.

**11.** *Пчелинцев С. В.* О многообразии алгебр типа $(-1,1)$ // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 2. С. 154–171.
**12.** *Пчелинцев С. В.* О многообразии, порожденном свободной алгеброй типа $(-1,1)$ ранга 2 // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 3. С. 162–178.
**13.** *Buchnev A. A., Filippov V. T., Shestakov I. P.* Checking identities of nonassociative algebras by computer // III Siberian congr. on applied and industrial mathematics (IN–PRIM–98). Novosibirsk, 1998. P. 9.
**14.** *Sagle A. A.* Malcev algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101, N 3. P. 426–458.

*Статья поступила 7 декабря 2011 г.*

Пчелинцев Сергей Валентинович
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
Ленинградский пр., 49, Москва 125468
pchelinzev@mail.ru