Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 512.545

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ m–ГРУПП

С. В. Вараксин, А. В. Зенков

Аннотация. Получено описание m-транзитивных представлений произвольной m-группы. Найдены необходимые и достаточные условия того, что m-группа допускает точное m-транзитивное представление. Как следствие установлено, что произвольная подпрямо m-неразложимая группа допускает точное m-транзитивное представление, поэтому всякое многообразие m-групп порождается своими m-транзитивными группами.

Ключевые слова: m-группа, m-транзитивное представление, подпрямо неразложимая m-группа.

1. Введение

Напомним, что *m-группой* называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, {}_{*} \rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является ℓ-группой и одноместная операция ${}_{*}$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т. е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$$(xy)_* = x_* y_*, \quad (x_*)_* = x, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

В дальнейшем m-группу G с фиксированным автоморфизмом ${}_{*}$ записываем как пару $(G, {}_{*})$. Пусть Λ — некоторое линейно упорядоченное множество и a — реверсивный автоморфизм 2-го порядка Λ, т. е. для любых $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ верно $((\lambda)a)a = \lambda$ и $\lambda < \lambda' \Leftrightarrow (\lambda)a > (\lambda')a$. Через $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ обозначим группу (относительно суперпозиции) всех порядковых подстановок Λ. Группа $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ может быть превращена в m-группу, если операция ${}_{*}$ задается с помощью равенства $g_* = aga$ для всякого $g \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$. Согласно [1] *представлением m-группы* $(G, {}_{*})$ порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Λ является ℓ-гомоморфизм $\nu : G \to \mathrm{Aut}(\Lambda)$ такой, что $((g)_*)\nu = a(g)\nu a$ для любого $g \in G$. Этот факт записываем в виде $((G)\nu, \Lambda, a)$. Если ν есть изоморфизм, то представление называется *точным*, и тогда пишем (G, Λ, a). Отметим [1], что всякая m-группа допускает точное представление порядковыми подстановками подходящего линейно упорядоченного множества.

Представление $((G)\nu, \Lambda, a)$ назовем *m-транзитивным*, если для любых $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, быть может, за исключением точки o, существует такой $x \in G_* = \mathrm{gr}\,.((G)\nu, a)$, что $(\lambda)x = \lambda'$(здесь o — точка Λ, неподвижная относительно действия a).

Получено описание m-транзитивных представлений произвольной m-группы (теорема 2.1). Найдены необходимые и достаточные условия того, что m-группа допускает точное m-транзитивное представление (теорема 2.2).

Как следствие установлено, что произвольная подпрямо m-неразложимая группа допускает точное m-транзитивное представление (следствие 2.3), поэтому всякое многообразие m-групп порождается своими m-транзитивными группами (следствие 2.4).

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в [2–4].

2. Основной результат

Пусть $(G,_*)$ — произвольная m-группа и V — ее выпуклая ℓ-подгруппа. Как обычно, через $R(G:V)$ обозначим множество правых смежных классов ℓ-группы G по ее выпуклой ℓ-подгруппе V с порядком: $Vx \leq Vy$ тогда и только тогда, когда $vx \leq y$ для некоторого $v \in V$. Если данный порядок линеен, то V называется *спрямляющей*. Итак, пусть V спрямляющая. Тогда V_* также спрямляющая [5]. Из свойств $_*$ следует, что $V \subseteq V_* \Leftrightarrow V_* \subseteq V$. Значит, либо $V = V_*$, либо эти спрямляющие несравнимы относительно теоретико-множественного включения. Далее рассмотрим

Случай 1. Пусть для некоторого $t \in G$ верно $V^t = H_*$. Тогда $V^{tt_*^{-1}} = (H^{t^{-1}})_*$. Следовательно, можно считать, что $t_* = t^{-1}$. Тогда $H^t = V_*$.

Пусть $X = R(G:V), Y = R(G:H)$. Определим отображение $a : X \rightleftarrows Y$ по правилу $(Vg)a = Htg_*$ и $(Hg)a = Vtg_*$. Далее, $Vg \geq Vf \Leftrightarrow g \geq vf \Leftrightarrow g_* \leq v_*f_* \Leftrightarrow g_* \leq t^{-1}htf_* \Leftrightarrow Htg_* = (Vg)a \leq Htf_* = (Vf)a$. Аналогично можно показать, что $Hg \geq Hf \Leftrightarrow (Hg)a \leq (Hf)a$. Из определения a следуют его взаимная однозначность и то, что $a^2 = e$. Если $V = H$, то рассматриваем X и Y как две порядково антиизоморфные копии линейно упорядоченного множества $R(G:V)$. Здесь же отметим, что если $V \neq V_*$, то $V = V^e = (V_*)_*$.

Пусть (L,R) — сечение в X такое, что $Lh = L$ для любого $h \in H$. Заметим, что такие сечения существуют. Например, если L определить по правилу: $Vg \in L$ тогда и только тогда, когда $Vg \leq Vh$ для подходящего $h \in H$ и $R = R(G:V) \setminus L$. Множество R может оказаться пустым. Будем считать, что $L < H < R$. В силу сказанного выше это неравенство определено корректно. Пусть $g > e \in G \setminus H$. Тогда $H < Hg$ в Y. Если $Lg = L$, то $L < H < Hg < R$. Если $L \subsetneqq Lg$, то $L \subsetneqq Lg < Hg < Rg$, и полагаем $H < Hg$. Следовательно, $\Lambda = X \cup Y$ можно рассматривать как линейно упорядоченное множество. Отметим следующую особенность построенного порядка: сохранены порядки линейно упорядоченных множеств $R(G:V)$ и $R(G:H)$.

Так как пара (L,R) есть сечение в X, пара (Ra, La) — сечение Y и, более того, $Rah_* = Ra$ для $h_* \in H_* = V^t$. Следовательно, неравенства $Ra < Ha = Vt < La$ корректны. Поскольку для любого $g \in G$ верно $Rga = Rag_*$, неравенства $Rga < Hga = Vtg_* < Lga$ корректны. Теперь несложно показать, что a является реверсивным автоморфизмом 2-го порядка линейно упорядоченного множества Λ.

Определим $\nu : G \to \mathrm{Aut}(\Lambda)$ по правилу $(Vx)(g)\nu = Vxg$ и $(Hx)(g)\nu = Hxg$. Пусть $Vx \in \Lambda$ и $g \in G$. Тогда $(Vx)a(g)\nu a = (V_*x_*g)a = Vxg_*$. Аналогично проверяется, что $(Hx)a(g)\nu a = Hxg_*$. Следовательно, ν является представлением. Отметим, что данное представление m-транзитивно (но не транзитивно) и $\ker\nu \subseteq V \cap H$. Если в сечении (L,R) множество R пусто, то $X < Y$ и $\Lambda = X \overleftarrow{\cup} Y$, и в этом случае можно дополнить множество Λ до множества $\Lambda_1 = X \overleftarrow{\cup} \{o\} \overleftarrow{\cup} Y$, считая, что группа G и автоморфизм a действуют на o тривиально.

Случай 2. Пусть для некоторого $t \in G$ верно $V^t = V_*$. Так как Vt и Vt_*^{-1} сравнимы, например $Vt > Vt_*^{-1}$, то $Vt = V(t \vee t_*^{-1})$. Тогда $tV_* = (t \vee t_*^{-1})V_*$. Следовательно, $V^{t \vee t_*^{-1}} = V_*$ и $(t \vee t_*^{-1})_* = (t \vee t_*^{-1})^{-1}$. Поэтому можно считать, что $t_* = t^{-1}$. Зададим $a : R(G : V) \to R(G : V)$ по правилу $(Vg)a = Vtg_*$. Следующие рассуждения доказывают взаимную однозначность a: $Vg = Vh \Leftrightarrow g = vh \Leftrightarrow g_* = v_*h_* \Leftrightarrow g_* = t^{-1}\tilde{v}th_* \Leftrightarrow Vtg_* = Vth_*$. Далее, $(Vx)aga = (Vtx_*)ga = (Vtx_*g)a = Vtt^{-1}xg_* = Vxg_*$ и $Vg \geq Vh \Leftrightarrow g \geq vh \Leftrightarrow g_* \leq v_*h_* \Leftrightarrow Vtg_* \leq Vth_*$. Поэтому отображение a есть реверсивный автоморфизм 2-го порядка линейно упорядоченного множества $R(G : V)$. Тогда $\nu : G \to \mathrm{Aut}(R(G : V))$, определяемое по правилу $(Vx)(g)\nu = Vxg$, является представлением, которое назовем *правым регулярным представлением.* Отметим, что данное представление транзитивно и $\ker \nu \subseteq V$. В случае, если в G найдется элемент g такой, что $tg_*g^{-1} \in V$, элемент Vg будет неподвижным в $R(G : V)$.

Построенное таким образом линейно упорядоченное множество назовем *множеством, определяемым подгруппой* V.

Рассмотрим произвольное m-транзитивное представление $((G)\nu, \Omega, b)$ m-группы $(G,_*)$. Пусть $L = \{\omega \in \Omega \mid (\omega)b > \omega\}$, $R = \{(\ell)b \mid \ell \in L\}$ и o — неподвижная относительно b точка из Ω. Тогда $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^\varepsilon \overleftarrow{\cup} R$, где $\varepsilon = 1$, если неподвижная точка существует, и $\varepsilon = 0$ в противном случае.

Предположим, что $L(g)\nu = L$ для всякого $g \in G$. Тогда $R(g)\nu = R$ и $(o)(g)\nu = o$, если, конечно, неподвижная точка существует. Зафиксируем $\ell \in L$. Через St_ℓ обозначим стабилизатор ℓ в $(G)\nu$. Известно, что стабилизатор точки является спрямляющей ℓ-подгруппой, поэтому его полный прообраз V в G будет спрямляющей ℓ-подгруппой. Заметим, что $(s)\nu \in St_\ell \Leftrightarrow b(s)\nu b = (s_*)\nu \in St_{\ell b}$. Следовательно, V_* есть полный прообраз $St_{\ell b}$.

Пусть $X = R(G : V)$, $X_* = R(G : V_*)$. Определим (см. случай 1) в X сечение $(X, \varnothing)$. Тогда $\Lambda = X \overleftarrow{\cup} X_*$. Далее определяем a и представление ν' : $G \to \mathrm{Aut}(\Lambda)$. Для каждого $\ell' \in L$ найдется $g' \in G$ такой, что $\ell' = (\ell)(g')\nu$. Тогда $((\ell')b)b(g')\nu b = ((\ell)b)(g'_*)\nu = (\ell)b$. Зададим $\chi : \Omega \to \Lambda$ по правилу $(\ell')\chi = Vg'$ и $((\ell')b)\chi = V_*g'_*$. Непосредственная проверка показывает, что χ — порядковый изоморфизм Ω на Λ. Далее, $((\ell')b)\chi = V_*g'_* = (Vg')a = ((\ell')\chi)a$ и $(\ell')b(g)\nu b)\chi = ((\ell)(g'g_*)\nu)\chi = Vg'g_* = ((\ell')\chi)a(g)\nu' a$.

Предположим, что существуют такие $\ell \in L$, $t \in G$, что $(\ell)(t)\nu = (\ell)b$. Можно считать, что $b(t)\nu b = (t^{-1})\nu$. Рассматриваемое представление транзитивно, поэтому для всякого $\omega \in \Omega$ найдется $g \in G$ такой, что $\omega = (\ell)(g)\nu$. Как и выше, через V обозначим прообраз St_ℓ. Далее поступаем по аналогии с рассмотренным выше случаем, используя случай 2.

Предположим, что существуют различные $\ell, \ell' \in L$, $t \in G$ такие, что $(\ell)(t)\nu = (\ell')b$. Можно считать, что $b(t)\nu b = (t^{-1})\nu$. Обозначим через V полный прообраз в G стабилизатора St_ℓ точки ℓ, через X — линейно упорядоченное множество правых смежных классов $R(G : V)$, через H — полный прообраз в G стабилизатора $St_{\ell'}$ точки ℓ', а через Y — линейно упорядоченное множество правых смежных классов $R(G : H)$. Заметим, что если бы в Ω нашелся элемент ω такой, что $\omega = (\ell)(g)\nu$ и $\omega = (\ell')(g')\nu$ для некоторых g, g' из G, то G действовала бы просто транзитивно на Ω. Поэтому $(\ell)(G)\nu \cap (\ell')(G)\nu = \varnothing$ и $\varepsilon = 0$. Определим порядок на $\Lambda = X \cup Y$ и автоморфизм a на нем, как в случае 1, считая, что сечение (L, R) задано условием $Vg \in L$ тогда и только тогда, когда $(\ell)g < \ell'$. Зададим $\chi : \Omega \to \Lambda$ по правилу $((\ell)g)\chi = Vg$ и $((\ell')g')\chi = Hg'$. По определению порядка на Λ неравенство $Vg < H'g'$ выполнено тогда и только тогда, когда $(\ell)g < (\ell')g'$, $(Vg)a = Htg_*$ и $(Hg)a = Vtg_*$. Несложно показать, что χ — порядковый изоморфизм Ω на Λ.

Тем самым доказана

Теорема 2.1. *Пусть $(G,_*)$ — m-группа и V — ее спрямляющая ℓ-подгруппа. Тогда существует линейно упорядоченное множество, определяемое V, такое, что группа допускает m-транзитивное представление подстановками этого множества. Обратно, для всякого m-транзитивного представления $((G)\nu, \Lambda, a)$ найдется спрямляющая ℓ-подгруппа V, определяющая Λ.*

Следующие примеры иллюстрируют разобранные выше случаи. Отметим, что все представления точные.

Пример 1. Через $\mathbb{Z}^*$ обозначим аддитивную группу целых чисел, полученную из $\mathbb{Z}$ путем обращения порядка. Относительно координатного порядка прямое произведение $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ является ℓ-группой. Определим отображение $\mathrm{Exch} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ по правилу $(x, y)\,\mathrm{Exch} = (y, x)$, где $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Тогда пара $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \mathrm{Exch})$ будет m-группой. Рассмотрим линейно упорядоченное множество $\Lambda = \mathbb{Z} \overleftarrow{\cup} \{o\} \overleftarrow{\cup} \mathbb{Z}^*$. Через $(z)_1((z)_2)$ обозначим элемент Λ, строго меньший (больший) o, и определим $b : \Lambda \to \Lambda$ по правилу $(z)_1 b = (z)_2$, $(z)_2 b = (z)_1$ и $(o)b = o$. Ясно, что b — реверсивный автоморфизм второго порядка Λ. Пусть $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $(z)_1, (z)_2 \in \Lambda$. Определим действие $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ на Λ следующим образом: $(z)_1(x, y) = (z + x)_1$, $(z)_2(x, y) = (z + y)_2$, $(o)(x, y) = o$. Так определенное действие является точным и порядковым. Более того, например, $(z)_1 b(x, y)b = (z)_2(x, y)b = (z + y)_1 = (z)_1(y, x) = (z)_1(x, y)\,\mathrm{Exch}$. Следовательно, можно рассмотреть представление $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \Lambda, b)$.

Пример 2. Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}$ — естественно упорядоченное множество целых чисел и $\mathbb{Z}$ действует правыми сдвигами на Λ. Зададим $(x)a = -x + 1$. Тогда представление $(\mathbb{Z}, \Lambda, a)$ транзитивно и не содержит неподвижной точки. Если определить $(x)a = -x + 4$, то получим транзитивное представление с неподвижной точкой.

Пример 3. Пусть $\Omega = \mathbb{Z}$ — естественно упорядоченное множество целых чисел, $(x)a = -x + 1$, G — группа четных (целых) трансляций, т. е. если $g \in G$, то $(x)g = x + 2n$ для подходящего $n \in \mathbb{Z}$. Далее, $(x)aga = ((-x + 1)g)a = (-x + 1 + 2n)a = x - 1 - 2n + 1 = x - 2n = (x)g^{-1}$. Следовательно, $(G, \mathbb{Z}, a)$ — точное представление m-группы $(G,_*)$, где $g_* = g^{-1}$.

Так как $(x)a = -x + 1$, равенство $(x)a = x$ невозможно, т. е. данное представление не имеет неподвижной точки. Отметим, что $L = \{x \leq 0\}, R = \{x \geq 1\}$.

Пусть $x, y \in \mathbb{Z}$ и $x = 2m$, $y = 2s$. Тогда $(x)g = y$, где $(x)g = x + 2(s - m)$. Аналогичное равенство верно и для нечетных x, y. Если $x = 2m$, $y = 2s + 1$, то $(x)ag = y$, где $(x)g = x + 2(s + m)$. Тем самым доказана m-транзитивность данного представления. Так как $-x + 1 \neq x + 2n$ для любых $x, n \in \mathbb{Z}$, то $(x)a \neq (x)g$ для любого $g \in G$. Следовательно, данное представление m-транзитивно, но не транзитивно, при этом $(L)G \cap R \neq \varnothing$.

Рассмотрим вопрос о существовании точных m-транзитивных представлений. Выпуклая ℓ-подгруппа V m-группы $(G,_*)$ называется *представляющей*, если V спрямляющая и не содержит неединичных m-идеалов.

Теорема 2.2. *Произвольная m-группа $(G,_*)$ допускает точное m-транзитивное представление тогда и только тогда, когда она содержит представляющую ℓ-подгруппу.*

Доказательство. Пусть V представляющая. Тогда ядро представления ν, определяемого V (см. разобранные выше случаи), содержится в V, т. е. ν точное.

Обратно, пусть (G, Λ, a) — точное m-транзитивное представление. Тогда в силу теоремы 1.1 можно считать, что Λ построено, например, из спрямляющих V и H таких, что $V^t = H_*$ и $V \neq H$. Предположим, что V содержит неединичный m-идеал K. Тогда $K \subseteq V_* = H^t$. Следовательно, $K \subseteq H$. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $\lambda = Vx$. Тогда $Vxk = Vxkx^{-1}x = Vx$. Аналогично $Hxk = Hxkx^{-1}x = Hx$. Поэтому $K \subseteq \ker\nu$, что противоречит точности ν. $\square$

Как обычно, неединичная m-группа $(G,_*)$ называется *подпрямо m-неразложимой*, если пересечение всех ее неединичных m-идеалов отлично от единицы.

Следствие 2.3 [6]. *Подпрямо неразложимая m-группа $(G,_*)$ допускает точное m-транзитивное представление.*

Следствие 2.4 [6]. *Всякое многообразие m-групп порождается m-группами, допускающими точное m-транзитивное представление.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Giraudet M., Lukas F.* Groupes á motié ordonnés // Fund. Math. 1991. V. 139, N 2. P. 75–89.
2. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
3. *Kopytov V. M., Medvedev N. Ya.* The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994.
4. *Glass A. M. W.* Partially ordered groups. Singapore: World Sci. Publ. Co., 1999.
5. *Баянова Н. В., Никонова О. В.* Реверсивные автоморфизмы решеточно упорядоченных групп // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 763–768.
6. *Зенков А. В.* О m-транзитивных группах // Мат. заметки (в печати).

Статья поступила 3 мая 2011 г.

Вараксин Сергей Владимирович
Алтайский гос. университет, кафедра алгебры и математической логики,
пр. Ленина, 61, Барнаул 656049
varaksins@yandex.ru

Зенков Алексей Владимирович
Алтайский гос. аграрный университет, кафедра математики,
пр. Красноармейский, 98, Барнаул 656049
alexey_zenkov@yahoo.com