Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 519.21

НЕРАВЕНСТВА И ПРИНЦИПЫ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

А. А. Боровков, А. А. Могульский

Аннотация. Пусть $S(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями на $[0,\infty)$. Установлены локальный и «обычный» принципы больших уклонений для траекторий процессов $s_T(t) := \frac{1}{T}S(tT)$, $t \in [0,1]$, при $T \to \infty$, а также получен ряд неравенств для распределений траекторий $S(t)$.

Ключевые слова: процесс с независимыми приращениями, условие Крамера, функция уклонений, принцип больших уклонений (п.б.у.), локальный принцип больших уклонений (л.п.б.у.), неравенства чебышевского типа, выпуклое множество.

§ 1. Введение

Пусть $S(t)$, $t \geq 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями, т. е. процесс, характеристическая функция которого имеет вид

$$\mathbf{E}e^{ivS(t)} = e^{t\beta(v)},$$

где согласно представлению Леви — Хинчина

$$\beta(v) = \beta(v; q, \sigma, \mathscr{B}) := iqv - \frac{v^2\sigma^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ivx} - 1 - \frac{ivx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\mathscr{B}(x),$$

$\mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации, непрерывная в точке $x = 0$.

Нам понадобится моментное условие Крамера **[C]** на распределение случайной величины $S(1)$:

[C] $\quad \psi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda S(1)} < \infty$ при некотором вещественном $\lambda \neq 0$.

Обозначим $\lambda_+ := \sup\{\lambda : \psi(\lambda) < \infty\}$, $\lambda_- := \inf\{\lambda : \psi(\lambda) < \infty\}$,

$$b_0(\lambda) := \int\limits_{-1}^{1} \left(e^{\lambda x} - 1 - \frac{\lambda x}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\mathscr{B}(x),$$

$$b_1(\lambda) := \int\limits_{|x|>1} \left(e^{\lambda x} - 1 - \frac{\lambda x}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\mathscr{B}(x),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00285), а также РНП.2.1.1.346.

© 2013 Боровков А. А., Могульский А. А.

так что $b(\lambda) := \ln \psi(\lambda) = b_0(\lambda) + b_1(\lambda)$. Нетрудно видеть, что $b_0(\lambda) < \infty$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\sup\{\lambda : b_1(\lambda) < \infty\} = \lambda_+, \quad \inf\{\lambda : b_1(\lambda) < \infty\} = \lambda_-$$

и что условие [**C**] эквивалентно неравенству $\lambda_+ - \lambda_- > 0$. Если $S(t)$ имеет на $[0, T]$ с вероятностью 1 конечное число скачков, т. е. функция $\beta(v)$ представима в виде

$$\beta(v) = iqv - \frac{v^2\sigma^2}{2} + \mu \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{ivx} - 1)\, dF_\zeta(x), \tag{1.1}$$

где F_ζ — функция распределения скачков $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ обобщенного пуассоновского процесса с интенсивностью $\mu > 0$, то можно записать также, что для $\psi_\zeta(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda\zeta}$, $\zeta =_D \zeta_1$, выполняется

$$\sup\{\lambda : \psi_\zeta(\lambda) < \infty\} = \lambda_+, \quad \inf\{\lambda : \psi_\zeta(\lambda) < \infty\} = \lambda_-,$$

так что условия Крамера [**C**] для $S(1)$ и ζ эквивалентны.

Исследованию принципов больших уклонений (п.б.у.) для траекторий случайных блужданий, порожденных суммами случайных величин, посвящена обширная литература (см., например, [1–9] и указанную в них библиографию). Неравенства для траекторий случайных блужданий изучались в [8].

Если выполнено условие

[$\mathbf{C}_\infty$] $\psi_\zeta(\lambda) < \infty$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$,

то в [1] установлен п.б.у. для траекторий процессов

$$s_T = s_T(t) := \frac{S(tT)}{T},$$

построенных по процессу $S(t)$ вида (1.1) при $\sigma = q = 0$, $T \to \infty$ (ниже в теореме 3.3 получено распространение этого утверждения на более общий случай).

В [10] рассматриваются процессы $S(t)$, имеющие на отрезке $[0, T]$ траектории из пространства $\mathbb{V}[0, T]$ функций ограниченной вариации, т. е. такие, для которых функция $\beta(v)$ представима в виде (ср. с (1.1))

$$\beta(v) = iqv - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{ivx} - 1)\, \nu(dx),$$

где ν — произвольная мера (вообще говоря, неограниченная) такая, что $\int |x|\, \nu(dx) < \infty$. При выполнении условия Крамера

[$\mathbf{C}_0$] $\psi(\lambda) < \infty$ в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$

в [10] установлен п.б.у. [10, теорема 5.1] для последовательности $\{s_T\}$ в пространстве $\mathbb{V}[0, 1]$, снабженном топологией слабой сходимости: $f_n \to f$, если $\int g(t)\, df_n(t) \to \int g(t)\, df(t)$ для любой непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции $g = g(t)$. Отметим, что такой важный в граничных задачах и приложениях функционал, как максимум траектории $\bar{f} = \sup\limits_{0 \le t \le 1} f(t)$, разрывен в этой топологии, так что использовать теорему 5.1 из [10] для оценки $\ln \mathbf{P}(\bar{s}_T \ge v)$ нельзя. Для отыскания асимптотики $\frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\bar{s}_T \ge v)$ при $T \to \infty$ с помощью п.б.у. следует использовать более сильную топологию (скажем, топологию, порожденную равномерной метрикой, метрикой ρ, определенной в [6], или метрикой Скорохода).

Упомянем еще работу [11], в которой в предположениях, близких к рассмотренным в [10], изучаются процессы $\left\{s_T(t) := \frac{1}{T}S(tT);\ 0 \le t < \infty\right\}$ на бесконечном интервале времени. Для этого семейства установлен п.б.у. также при весьма слабой (и трудно определяемой) топологии.

Целью настоящей заметки являются: a) получение неравенств и доказательство локального принципа больших уклонений (л.п.б.у., см. [6, 7]) для траекторий $s_T(t)$, $0 \le t \le 1$, без каких-либо моментных условий, b) доказательство при условии $[\mathbf{C}_\infty]$ «обычного» п.б.у. в пространстве $\mathbb{D}$ функций без разрывов второго рода с равномерной метрикой.

§ 2. Неравенства

2.1. Формулировки утверждений. Сначала введем ряд обозначений. Пусть

$$\Lambda(\alpha) := \sup_\lambda\{\lambda\alpha - \ln\psi(\lambda)\} \tag{2.1}$$

— функция уклонений случайной величины $S(1)$, $\mathbb{C}_a$ — пространство абсолютно непрерывных функций. Для $f \in \mathbb{C}_a$ определен интеграл Лебега

$$I(f) := \begin{cases} \int\limits_0^1 \Lambda(f'(t))\,dt, & \text{если } f(0) = 0, \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим на пространстве $\mathbb{D}$ функций без разрывов второго рода функционал J следующим образом. Для произвольной функции $f \in \mathbb{D}$ положим $J(f) = \infty$, если $\operatorname{Var} f = \infty$ или $f(0) \ne 0$. Если $\operatorname{Var} f < \infty$, то справедливо разложение $f = f_a + f_s + f_\partial$, где f_a, f_s, f_∂ — абсолютно непрерывная, сингулярная непрерывная и сингулярная дискретная компоненты f соответственно. Класс функций ограниченной вариации обозначим через $\mathbb{V}$. Для $f \in \mathbb{V}$, $f(0) = 0$, положим

$$J(f) := I(f_a) + \lambda_+ \operatorname{Var}(f_s^+ + f_\partial^+) - \lambda_- \operatorname{Var}(f_s^- + f_\partial^-), \tag{2.2}$$

где $f_s^\pm$, $f_\partial^\pm$ — возрастающие и убывающие компоненты f_s, f_∂ в разложениях $f_s = f_s^+ + f_s^-$, $f_\partial = f_\partial^+ + f_\partial^-$ соответственно ($\operatorname{Var} f_s = \operatorname{Var} f_s^+ + \operatorname{Var} f_s^-$, такое же соотношение справедливо для $\operatorname{Var} f_\partial$). Если выполнено условие $[\mathbf{C}_\infty]$, то $\lambda_\pm = \pm\infty$ и $J(f) = \infty$ для любой функции $f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{C}_a$.

Для любого множества B функций из $\mathbb{D}$ обозначим

$$I(B) := \inf_{f \in B \cap \mathbb{C}_a} I(f), \quad J(B) := \inf_{f \in B} J(f).$$

Будем использовать ниже пространство $\mathbb{C}$ непрерывных функций на $[0, 1]$ с равномерной метрикой

$$\rho(f, g) := \sup_{0 \le t \le 1} |f(t) - g(t)|$$

и пространство $\mathbb{D}$ функций без разрывов второго рода с метрикой

$$\rho_{\mathbb{D}}(f, g) := \inf_{q \in \mathscr{Q}} \max\{\rho(f * q, g), \rho(q, \mathrm{e})\},$$

где $\mathrm{e} = \mathrm{e}(t) = t$ при $t \in [0, 1]$, $f * q = f(q(t))$, $\mathscr{Q}$ — класс возрастающих непрерывных функций $q = q(t)$, обладающих свойством $q(0) = 0$, $q(1) = 1$. Нетрудно видеть, что метрика $\rho_{\mathbb{D}}$ эквивалентна метрике Скорохода.

Теорема 2.1. *Для любого выпуклого открытого в* $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$ *множества* B

$$\mathbf{P}(s_T \in B) \le e^{-TJ(B\mathbb{C}_a)} \le e^{-TJ(B)}. \tag{2.3}$$

Пусть $f \in \mathbb{C}$ и $(f)_\varepsilon$ — совокупность функций $g \in \mathbb{D}$ таких, что $\rho(f,g) < \varepsilon$ (ε-окрестность в $\mathbb{D}$ функции $f \in \mathbb{C}$ относительно равномерной метрики). Нетрудно видеть, что если $g \in (f)_\varepsilon$ при заданных непрерывной функции f и $\varepsilon > 0$, то

(a) найдется δ такое, что $(g)_\delta \subset (f)_\varepsilon$;

(b) найдутся неубывающая функция $q \in \mathscr{Q}$ и число δ такие, что

$$\rho(q, \mathrm{e}) = \sup_{t\in[0,1]} |q(t) - \mathrm{e}(t)| < \delta, \quad g(q(t)) \in (f)_\varepsilon.$$

Другими словами, достаточно малые «сдвиги» функции $g \in (f)_\varepsilon$ «вверх-вниз и вбок» не выводят g из $(f)_\varepsilon$. Но сказанное означает, что множество $(f)_\varepsilon$, будучи открытым относительно ρ, будет также открытым и относительно метрики $\rho_{\mathbb{D}}$. Так как, кроме того, множество $(f)_\varepsilon$ выпукло, из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Для любой функции* $f \in \mathbb{C}$ *и любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon) \le e^{-TJ((f)_\varepsilon)}.$$

Будут полезны также излагаемые ниже неравенства для случайной величины

$$\overline{S}(T) = \sup_{0\le t\le T} S(t).$$

Наряду с функцией $\Lambda(\alpha)$ в (2.1) определим функцию $\lambda(\alpha)$ как значение λ, при котором достигается верхняя грань в (2.1), так что

$$\Lambda(\alpha) = \lambda(\alpha)\alpha - \ln\psi(\lambda(\alpha)).$$

Известно [12], что $\lambda(\alpha)$ является решением уравнения $\frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \alpha$ и не убывает по α.

Теорема 2.2. (i) *При всех* $T > 0$, $x \ge 0$, $\lambda \ge 0$

$$\mathbf{P}(\overline{S}(T) \ge x) \le e^{-\lambda x}\max\{1, \psi^T(\lambda)\}. \tag{2.4}$$

(ii) *Пусть* $\mathbf{E}S(1) < 0$, $\lambda_1 := \max\{\lambda : \psi(\lambda) \le 1\}$. *Тогда при всех* $T > 0$, $x \ge 0$

$$\mathbf{P}(\overline{S}(T) \ge x) \le e^{-\lambda_1 x}. \tag{2.5}$$

Если $\lambda_+ > \lambda_1$, *то* $\psi(\lambda_1) = 1$, $\Lambda(\alpha) \ge \lambda_1\alpha$ *при всех* α, $\Lambda(\alpha_1) = \lambda_1\alpha_1$, *где*

$$\alpha_1 := \arg\{\lambda(\alpha) = \lambda_1\} = \frac{\psi'(\lambda_1)}{\psi(\lambda_1)}, \tag{2.6}$$

так что прямая $y = \lambda_1\alpha$ *касается в точке* $(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1)$ *выпуклой функции* $y = \Lambda(\alpha)$. *При этом наряду с* (2.5) *при* $\alpha := \frac{x}{T}$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(\overline{S}(T) \ge x) \le e^{-T\Lambda_1(\alpha)}, \tag{2.7}$$

где

$$\Lambda_1(\alpha) := \begin{cases} \lambda_1\alpha & \text{при } \alpha \le \alpha_1, \\ \Lambda(\alpha) & \text{при } \alpha > \alpha_1. \end{cases}$$

Если $\alpha \le \alpha_1$, *то неравенство* (2.7) *совпадает с* (2.5), *при* $\alpha > \alpha_1$ *оно сильнее, чем* (2.5).

(iii) *Пусть* $\mathbf{E}S(1) \ge 0$, $\alpha = \frac{x}{T} \ge \mathbf{E}S(1)$. *Тогда при всех* $T > 0$

$$\mathbf{P}(\overline{S}(T) \ge x) \le e^{-T\Lambda(\alpha)}. \tag{2.8}$$

Теоремы 2.1 и 2.2 переносят неравенства, установленные в [8; 9, лемма 2.1.1] для случайных блужданий, порожденных суммами случайных величин, на случайные процессы с независимыми приращениями.

Теорема 2.2 выделяет три непересекающиеся возможности:

(a) $\mathbf{E}S(1) < 0$, $\lambda_+ = \lambda_1$,

(b) $\mathbf{E}S(1) < 0$, $\lambda_+ > \lambda_1$,

(c) $\mathbf{E}S(1) \ge 0$,

в которых $\mathbf{P}(\overline{S}(T) \ge x)$ оценивается правыми частями неравенств (2.5), (2.7) и (2.8) соответственно. Однако если принять некоторые естественные соглашения, то все три названных неравенства можно записать в одинаковом виде (2.7). Действительно, обратимся к определению (2.6) значения α_1. Как отмечено, $\lambda(\alpha)$ — решение уравнения $\frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \alpha$, которое имеет единственное решение при

$$\alpha \in [\alpha_-, \alpha_+], \quad \alpha_+ := \lim_{\lambda \uparrow \lambda_+} \frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)}, \quad \alpha_- := \lim_{\lambda \downarrow \lambda_-} \frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)}.$$

При $\alpha \ge \alpha_+$ функция $\lambda(\alpha)$ определяется как постоянное значение λ_+. Это означает, что при $\lambda_1 = \lambda_+$ значение α_1 определено неоднозначно и может принимать любое значение от α_+ до ∞, так что, полагая $\alpha_1 = \max\{\alpha : \lambda(\alpha) = \lambda_1 = \lambda_+\} = \infty$, превратим неравенство (2.7) в случае $\lambda_1 = \lambda_+$ (т. е. в случае (a)) в неравенство

$$\mathbf{P}(\overline{S}(T) \ge x) \le e^{-T\lambda_1\alpha} = e^{-\lambda_1 x},$$

т. е. в неравенство (2.5).

Если $\mathbf{E}S(1) \ge 0$, то $\lambda_1 = 0$. Если $\lambda_+ = 0$, то $\lambda_+ = \lambda_1$ и имеем ту же ситуацию, что и прежде, но теперь $\mathbf{P}(\overline{S}(T) \ge x)$ допускает лишь тривиальную оценку значением 1. Если $\lambda_+ > 0$, то $\alpha_1 = \mathbf{E}S(1)$, при $\alpha \le \alpha_1$ оценка (2.7) снова будет тривиальной, а при $\alpha > \alpha_1$ она совпадает с (2.8).

Следствие 2.2. *Если положить*

$$\alpha_1 := \max\{\alpha : \lambda(\alpha) = \lambda_1\} = \begin{cases} \frac{\psi'(\lambda_1)}{\psi(\lambda_1)}, & \text{если } \lambda_+ > \lambda_1, \\ \infty, & \text{если } \lambda_+ = \lambda_1, \end{cases}$$

то неравенство (2.7) *справедливо без каких-либо условий на* $\mathbf{E}S(1)$ *и* λ_+ *и включает в себя неравенства* (2.5) *и* (2.8).

Из результатов работы [13] (где изучается асимптотика распределения максимума последовательных сумм случайных величин) нетрудно извлечь, что показатели экспонент в неравенстве (2.7) асимптотически неулучшаемы:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\overline{S}(T) \ge x) = -\Lambda_1(\alpha) \quad \text{при } \frac{x}{T} = \alpha.$$

Это же можно установить и с помощью принципа больших уклонений (см., например, [1, 6]).

2.2. Доказательство теоремы 2.2. (i) Случайная величина

$$\eta(x) := \inf\{t > 0 : S(t) \ge x\}$$

является марковским моментом. Поэтому событие $\{\eta(t) \in dt\}$ и случайная величина $S(T)-S(t)$ независимы и

$$\psi^T(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda S(T)} \geq \int_0^T \mathbf{E}(e^{\lambda S(T)}; \eta(x) \in dt) \geq \int_0^T \mathbf{E}(e^{\lambda(x+S(T)-S(t))}; \eta(x) \in dt)$$

$$= e^{\lambda x} \int_0^T \psi^{T-t}(\lambda)\mathbf{P}(\eta(x) \in dt) \geq e^{\lambda x} \min\{1, \psi^T(\lambda)\}\mathbf{P}(\eta(x) \leq T).$$

Отсюда получаем утверждение (i).

(ii) Неравенство (2.5) немедленно вытекает из (2.4), если положить $\lambda = \lambda_1$.

Пусть теперь $\lambda_+ > \lambda_1$. Тогда, очевидно, $\psi(\lambda_1) = 1$ и из определения функции $\Lambda(\alpha)$ следует, что

$$\Lambda(\alpha) \geq \lambda_1\alpha - \ln\psi(\lambda(\alpha_1)) = \lambda_1\alpha.$$

Кроме того,

$$\Lambda(\alpha_1) = \lambda_1\alpha_1 - \ln\psi(\lambda(\alpha_1)) = \lambda_1\alpha,$$

тем самым кривые $y = \lambda_1\alpha$ и $y = \Lambda(\alpha)$ касаются в точке $(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1)$.

Далее, ясно, что $\psi(\lambda(\alpha)) \geq 1$ при $\alpha \geq \alpha_1$. Для таких $\alpha = \frac{x}{T}$ оптимальным выбором для λ в (2.4) будет значение $\lambda = \lambda(\alpha)$. При таких $\lambda(\alpha)$, $\alpha = \frac{x}{T}$, получаем

$$\mathbf{P}(\overline{S}(T) \geq x) \leq e^{-T\Lambda(\alpha)}.$$

Вместе с (2.5) это доказывает (2.7). Ясно также, что $\Lambda(\alpha) > \lambda_1\alpha$ при $\alpha > \lambda_1$, что доказывает последнее утверждение п. (ii).

(iii) Так как $\lambda(\mathbf{E}S(1)) = 0$ и $\lambda(\alpha)$ не убывает, то $\lambda(\alpha) \geq 0$ при $\alpha \geq \mathbf{E}S(1)$. В случае $\mathbf{E}S(1) \geq 0$ выполняется $\psi(\lambda) \geq 1$ при $\lambda \geq 0$. Поэтому $\psi(\lambda(\alpha)) \geq 1$ при $\alpha \geq \mathbf{E}S(1)$. Подставляя в (2.4) $\lambda = \lambda(\alpha)$ при $\alpha \geq \mathbf{E}S(1)$, получаем (2.8). Теорема доказана.

2.3. Доказательство теоремы 2.1. Разобьем доказательство на несколько этапов.

(i) Построим непрерывную ломаную $s_{T,n} = s_{T,n}(t)$, $t \in [0,1]$, по узловым точкам $\left(\frac{k}{n}, s_T\left(\frac{k}{n}\right)\right)$, $k = 0, \ldots, n$, и заметим, что распределения процесса $s_{T,n}$ слабо сходятся при $n \to \infty$ к распределению процесса s_T в пространстве $\mathbb{D}$ функций на $[0,1]$ без разрывов второго рода с метрикой $\rho_{\mathbb{D}}$. Для доказательства этого утверждения можно воспользоваться следующим критерием слабой сходимости в $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$ (см., например, [14, § 1–3]).

Для слабой сходимости распределений процесса Z_n к распределению процесса Z необходимо и достаточно выполнение следующих условий.

1. Существует счетное всюду плотное на $[0,1]$ множество $\mathscr{S}$ такое, что конечномерные распределения $\{Z_n(t) : t \in \mathscr{S}\}$ слабо сходятся к конечномерным распределениям $\{Z(t) : t \in \mathscr{S}\}$.

2. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\Delta\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(\omega_\Delta^{\mathbb{D}}(Z_n) > \varepsilon\big) = 0, \tag{2.9}$$

где $\omega_\Delta^{\mathbb{D}}(f) := \sup\limits_{t\in[0,1]} \min\{\omega^+(t,\Delta),\ \omega^-(t,\Delta)\}$,

$$\omega^\pm(t,\Delta) := \sup_{u\in(0,\Delta),\ t\pm u\in[0,1]} |f(t) - f(t \pm u)|.$$

Выполнение первого условия для процессов $s_{T,n}$ и s_T легко показать, если в качестве $\mathscr{S}$ взять множество рациональных чисел. Второе условие также выполняется очевидным образом, поскольку: (a) в силу необходимости условия (2.9) оно выполняется, если вместо $s_{T,n}$ поставить s_T; (b) имеет место очевидное неравенство

$$\omega_\Delta^{\mathbb{D}}(s_{T,n}) \le \omega_\Delta^{\mathbb{D}}(s_T).$$

Таким образом, требуемая сходимость в $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$ доказана. Из нее следует, что для любого открытого множества B в $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$ выполняется

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(s_{T,n} \in B) \ge \mathbf{P}(s_T \in B).$$

Так как функция $s_{T,n}$ непрерывна, в левой части этого неравенства вместо B можно написать $B\mathbb{C}$, так что

$$\mathbf{P}(s_T \in B) \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(s_{T,n} \in B\mathbb{C}). \tag{2.10}$$

Отметим, что топологии, порожденные метриками $\rho_{\mathbb{C}}$ и $\rho_{\mathbb{D}}$ в пространстве $\mathbb{C}$, совпадают, поэтому открытое в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{D}})$ множество $B\mathbb{C}$ открыто и в пространстве $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$.

(ii) Оценим теперь вероятность, стоящую в правой части (2.10), в случае, когда множество B (а стало быть, и $B\mathbb{C}$) выпукло. В этом случае множество $B\mathbb{C}$ выпукло и открыто и согласно [8, теорема 2.2]

$$\mathbf{P}(s_{T,n} \in B\mathbb{C}) \le \exp\{-nJ_{(\xi)}(B\mathbb{C}_a)\},$$

где $\xi := \xi^{T,n} := \frac{n}{T} S\big(\frac{T}{n}\big)$, $J_{(\xi)}(f)$ — интеграл уклонений (см. (2.2)), соответствующий случайной величине ξ. Так как $J_{(\xi)}(B\mathbb{C}_a) \ge J_{(\xi)}(B)$, получаем

$$\mathbf{P}(s_{T,n} \in B\mathbb{C}) \le \exp\{-nJ_{(\xi)}(B)\}. \tag{2.11}$$

(iii) Найдем значение $J_{(\xi)}(B)$. Поскольку для $\xi = \xi^{T,n}$ выполняется

$$\ln \mathbf{E} e^{\lambda\xi} = \frac{T}{n} \ln \psi\left(\frac{n}{T}\lambda\right),$$

где $\psi(\lambda) := \mathbf{E} e^{\lambda S(1)}$, то

$$\Lambda_{(\xi)}(\alpha) = \sup_\lambda \left\{\lambda\alpha - \frac{T}{n} \ln \psi\left(\frac{n}{T}\lambda\right)\right\} = \frac{T}{n} \Lambda_{(S(1))}(\alpha).$$

Отсюда

$$nI_{(\xi)}(f) = TI(f)$$

для $f \in \mathbb{C}_a$, $I(f)$ соответствует случайной величине $S(1)$. Кроме того, при очевидных соглашениях относительно обозначений имеем

$$\lambda_\pm^{(\xi)} = \frac{T}{n} \lambda_\pm^{(S(1))}.$$

Поэтому в силу представления (2.2)

$$nJ_{(\xi)}(f) = TJ(f), \quad nJ_{(\xi)}(B) = TJ(B),$$

где $J(f)$, $J(B)$ соответствуют случайной величине $S(1)$. Используя (2.11), находим

$$\mathbf{P}(s_{T,n} \in B\mathbb{C}) \le \exp\{-TJ(B)\}.$$

Возвращаясь к (2.10), в силу (2.11) получаем неравенство (2.3). Теорема доказана.

§ 3. Принципы больших уклонений

3.1. Формулировки утверждений.

Теорема 3.1. *Для любой функции $f \in \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, справедливы соотношения*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_\varepsilon) = -J(f), \tag{3.1}$$

где $(f)_\varepsilon$ — ε-окрестность в $\mathbb{D}$ функции f в равномерной метрике.

Теорема 3.2. *Для любого выпуклого открытого в $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$ множества B существует*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in B) = -J(B).$$

Теорема 3.3. *Если выполнено условие $[\mathbf{C}_\infty]$, то для любого измеримого множества B справедливы неравенства*

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in B) \le -J([B]) = -I([B]),$$

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in B) \ge -J((B)) = -I((B)),$$

где $[B]$, (B) — замыкание и открытая внутренность множества B в метрике ρ соответственно.

Согласно определениям 1.1–1.3 и замечанию 1.2 в [6] можно сказать, что теорема 3.1 означает выполнение локального принципа больших уклонений (локального п.б.у.) в пространстве $(\mathbb{D}, \rho)$ с параметрами (T, J) в подклассе функций из $\mathbb{C}$.

Аналогично теорема 3.2 означает выполнение п.б.у. в $(\mathbb{D}, \rho)$ с параметрами (T, J) в подклассе выпуклых множеств, а теорема 1.3 — выполнение «обычного» п.б.у. в $(\mathbb{D}, \rho)$ с параметрами (T, J).

Отметим также, что наряду с (3.1) возможны другие формы записи л.п.б.у. согласно эквивалентным определениям 1.1–1.3 в [6].

3.2. Доказательство теоремы 3.1. В силу результатов § 1 в [6] для доказательства л.п.б.у. (3.1) достаточно установить выполнение неравенства

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_\varepsilon) \le -J((f)_{\delta(\varepsilon)}) \tag{3.2}$$

для любой функции $f \in \mathbb{C}$, $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и неравенства

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_\varepsilon) \ge -I(f) \tag{3.3}$$

при любых функции $f \in \mathbb{C}_a$ и константы $\varepsilon > 0$ (см. [6, определение 1.3]).

Из следствия 2.1 вытекает, что имеет место равномерная оценка сверху (3.2) при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Остается получить оценку снизу (3.3).

Доказательство неравенства (3.3) разобьем на четыре этапа.

(i) Предположим сначала, что выполнено условие $[\mathbf{C}_\infty]$, и при $T = n$ оценим

$$P_n := \mathbf{P}(\rho(s_n, s_{n,n}) \ge \delta) \le n\mathbf{P}(\sup_{t\in[0,1]} |S(t) - tS(1)| \ge \delta n).$$

Обозначим $A_n = \{\max(S(t) - t(S(1)) \geq \delta n\}$. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A_n;\, S(1) \geq 0) + \mathbf{P}(A_n; S(1) < 0) \\ \leq \mathbf{P}(\max_{t\in[0,1]} S(t) \geq \delta n) + \mathbf{P}(\min_{t\in[0,1]} S(t) \leq -\delta n).$$

Аналогичные неравенства справедливы для события $\{\min(S(t) - tS(1)) \leq -\delta n\}$. Поэтому

$$P_n \leq 2n[\mathbf{P}(\max_{t\in[0,1]} S(t) \geq \delta n) + \mathbf{P}(\min_{t\in[0,1]} S(t) \leq -\delta n)].$$

При получении оценок для P_n, не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbf{E}S(1) = 0$ (хотя это обстоятельство несущественно; см. также лемму 2.3 в [6]). Тем самым в силу теоремы 2.2

$$P_n \leq 2n[e^{-\Lambda(\delta n)} + e^{-\Lambda(-\delta n)}].$$

При условии $[\mathbf{C}_\infty]$ выполняется $\frac{\Lambda(\pm\delta n)}{\delta n} \to \infty$ при $n \to \infty$, стало быть, для любого фиксированного $N > 0$ и $n \to \infty$

$$P_n = o(e^{-nN}). \tag{3.4}$$

(ii) Оценим снизу ($\delta \in (0, \varepsilon)$):

$$\mathbf{P}\big(s_n \in (f)_\varepsilon\big) \geq \mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon; \rho(s_n, s_{n,n}) < \delta) \geq \mathbf{P}(s_{n,n} \in (f)_{\varepsilon-\delta}, \rho(s_n, s_{n,n}) < \delta) \\ \geq \mathbf{P}(s_{n,n} \in (f)_{\varepsilon-\delta}) - \mathbf{P}(\rho(s_n, s_{n,n}) \geq \delta). \tag{3.5}$$

В силу л.п.б.у. для $s_{n,n}$ (см., например, [2])

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_{n,n} \in (f)_{\varepsilon-\delta}) \geq -I(f).$$

Поэтому из (3.5), (3.4) вытекает выполнение (3.3) (напомним, что мы положили $T = n$).

(iii) Покажем, что условие $[\mathbf{C}_\infty]$ излишне для выполнения (3.3). Это делается с помощью стандартных рассуждений (см., например, [6]) с использованием срезок для величин скачков ζ_k. Пусть $s_n^{(N)}$ — случайный процесс того же вида, что и s_n, но со скачками $\zeta_k^{(N)}$, $\big|\zeta_k^{(N)}\big| \leq N$, имеющими распределение

$$\mathbf{P}(\zeta^{(N)} \in B) = \mathbf{P}(\zeta \in B / |\zeta| \leq N).$$

Обозначим через Q_n число скачков процесса s_n на отрезке $[0, n]$, которые по абсолютной величине больше 1, и положим

$$B_n := \{Q_n \leq Rn\}.$$

Тогда для заданного $M > 0$ найдется R такое, что при всех достаточно больших n

$$\mathbf{P}(\overline{B}_n) \leq e^{-Mn}. \tag{3.6}$$

Далее, при $C_n := \{|\zeta_j| \leq N$ для всех $j \leq Rn\}$ имеем

$$\mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon) \geq \mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon; B_n C_n) = \mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon; B_n \,/\, C_n)\mathbf{P}(C_n) \\ = \mathbf{P}\big(s_n^{(N)} \in (f)_\varepsilon;\ B_n\big)\mathbf{P}(C_n) \geq \big[\mathbf{P}\big(s_n^{(N)} \in (f)_\varepsilon\big) - \mathbf{P}(B_n)\big](1 - \mathbf{P}(|\zeta| > N))^{Rn}.$$

Так как $\zeta^{(N)}$ удовлетворяет условию $[\mathbf{C}_\infty]$, в силу п. (ii) и (3.6) получаем

$$\begin{aligned}\underline{\lim}\,\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(s_n\in(f)_\varepsilon)\ge\underline{\lim}\,\frac{1}{n}\ln\big[\mathbf{P}\big(s_n^{(N)}\in(f)_\varepsilon\big)-\mathbf{P}(\overline{B}_n)\big]\\+R\ln(1-\mathbf{P}(|\zeta|>N))\ge-I^{(N)}(f)+R\ln(1-\mathbf{P}(|\zeta|>N)),\end{aligned}\tag{3.7}$$

где $I^{(N)}(f)$ — интеграл уклонений, построенный по функции уклонений $\Lambda^{(N)}$ для случайных величин $S^{(N)}(1)$, соответствующих скачкам $\zeta^{(N)}$. Поскольку $\Lambda^{(N)}(\alpha)\to\Lambda(\alpha)$, $I^{(N)}(f)\to I(f)$, $\ln(1-\mathbf{P}(|\zeta|>N))\to 0$ при $N\to\infty$, а левая часть (3.7) от N не зависит, неравенство (3.3) при $T=n$ доказано.

(iv) Докажем теперь (3.3) без ограничения $T=n$. Положим

$$\bar f(t):=\begin{cases}f(t), & \text{если } t\in[0,1],\\ f(1), & \text{если } t>1.\end{cases}$$

Для любых $f\in\mathbb{C}_a$ и $\varepsilon>0$ при $n:=[T]$, учитывая, что процесс $S(t)$ определен при всех $t\ge 0$, имеем

$$\begin{aligned}\{s_T\in(f)_\varepsilon\}&=\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\frac{1}{T}S(t)-f\left(\frac{t}{T}\right)\right|<\varepsilon\right\}\\&\supset\left\{\sup_{0\le t\le n+1}\left|\frac{1}{T}S(t)-\bar f\left(\frac{t}{T}\right)\right|<\varepsilon\right\}\\&=\left\{\sup_{0\le t\le n+1}\left|\frac{1}{n+1}S(t)-\frac{T}{n+1}\bar f\left(\frac{t}{T}\right)\right|<\frac{T}{n+1}\varepsilon\right\}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le n+1}\left|\frac{T}{n+1}\bar f\left(\frac{t}{T}\right)-f\left(\frac{t}{n+1}\right)\right|=0,$$

для всех достаточно больших T

$$\begin{aligned}&\left\{\sup_{0\le t\le n+1}\left|\frac{1}{n+1}S(t)-\frac{T}{n+1}\bar f\left(\frac{t}{T}\right)\right|<\frac{T}{n+1}\varepsilon\right\}\\&\qquad\supset\left\{\sup_{0\le t\le n+1}\left|\frac{1}{n+1}S(t)-f\left(\frac{t}{n+1}\right)\right|<\frac{1}{2}\varepsilon\right\}=\{s_{n+1}\in(f)_{\varepsilon/2}\}.\end{aligned}$$

Поэтому в силу (iii) получаем соотношения

$$\underline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(s_T\in(f)_\varepsilon)\ge\underline{\lim}_{n+1\to\infty}\frac{1}{n+1}\ln\mathbf{P}(s_{n+1}\in(f)_{\varepsilon/2})\ge-I(f),$$

и неравенство (3.3) доказано. Вместе с ним доказана теорема 3.1.

3.3. Доказательство теоремы 3.2. Из теоремы 2.1 вытекает, что

$$\overline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(s_T\in B)\le-J(B).\tag{3.8}$$

Получим теперь оценку снизу. Из второго равенства в (3.1) (теорема 3.1) следует, что при любых $\varepsilon>0$, $f\in\mathbb{C}$

$$\underline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(s_T\in(f)_\varepsilon)\ge-J(f),$$

тем самым

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_{\mathbb{D},\varepsilon}) \geq -J(f). \tag{3.9}$$

Для любого открытого в $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$ множества B, $f \in B$, и достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(s_T \in B) \geq \mathbf{P}(s_T \in (f)_{\mathbb{D},\varepsilon}).$$

Стало быть, в силу (3.9)

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in B) \geq -J((B\mathbb{C})).$$

Из утверждения (vi) теоремы 2.2 в [6] следует, что $J((B\mathbb{C})) = J((B))$. Вместе с (3.8) это доказывает теорему 3.2.

3.4. Доказательство теоремы 3.3. При выполнении условия $[\mathbf{C}_\infty]$

$$J(f) := \begin{cases} I(f), & \text{если } f \in \mathbb{C}_a, \\ \infty & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

так что $J(B) = I(B\mathbb{C}_a)$. Поэтому множество $K_v := \{f \in \mathbb{D} : J(f) \leq v\}$ лежит в $\mathbb{C}_a$ и является компактом в $(\mathbb{C}_a, \rho)$ и в $(\mathbb{D}, \rho)$. Воспользуемся леммой 2.4 в [6], в силу которой для $s_{n,n}$ выполнено условие $[\mathbf{K}]_0$, состоящее в том, что для любого N найдется компакт K в $(\mathbb{C}, \rho)$ такой, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_{n,n} \notin K) \leq -N.$$

Используя оценки (3.4), получаем, что для s_T выполнено условие $[\mathbf{K}]$, состоящее в том, что для любого N найдется компакт K в $(\mathbb{C}, \rho)$ такой, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \notin (K)_\varepsilon) \leq -N.$$

Тогда в силу теоремы 1.1 в [6] л.п.б.у. влечет за собой р.п.б.у., т. е. утверждение теоремы 3.3, в котором

$$J(B+) := \lim_{\varepsilon\to 0} J((B)_\varepsilon) = J([B]).$$

Теорема 3.3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А.* Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения. 1967. Т. 12, № 4. С. 635–654.
2. *Varadhan S. R. S.* Large deviations and applications. Philadelphia: SIAM, 1984.
3. *Varadhan S. R. S.* Large deviations // Ann. Probab. 2008. V. 36, N 2. P. 397–419.
4. *Dupuis P., Ellis R.* A weak convergence approach to the theory of large deviations. New York: Chichester, 1979.
5. *Пухальский А. А.* К теории больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. 1993. Т. 38, № 3. С. 490–497.
6. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Принципы больших уклонений для траекторий случайных блужданий. I, II, III // Теория вероятностей и ее применения: I. 2011. Т. 56, № 4, С. 627–658. II: 2012. Т. 57, №1, С. 1–33. III (в печати).
7. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О принципах больших уклонений в метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1251–1269.

8. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Экспоненциальные неравенства чебышевского типа для сумм случайных векторов и для случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. 2011. Т. 56, № 1. С. 1–27.
9. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Т. 1. Медленно убывающие распределения скачков. М.: Физматлит АНО, 2008.
10. *Lynch J., Sethuraman J.* Large deviations for processes with independent increments // Ann. Probab. 1987. V. 15, N 2. P. 610–627.
11. *Добрушин Р. Л., Печерский Е. А.* Большие уклонения для процессов с независимыми приращениями на бесконечном интервале // Проблемы передачи информации. 1998. Т. 34, № 4. С. 76–108.
12. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Книжный дом «Либроком», 2009.
13. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.
14. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965.

Статья поступила 15 июня 2012 г.

Боровков Александр Алексеевич, Могульский Анатолий Альфредович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
borovkov@math.nsc.ru, mogul@math.nsc.ru