Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 510.67

ЛИНЕЙНО МИНИМАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Е. Р. Байсалов

Аннотация. Доказано, что любая неабелева линейно минимальная алгебра Ли содержит бесконечную локально конечную линейно минимальную подалгебру.

Ключевые слова: линейная минимальность, алгебра Ли.

Алгебраическая (бесконечная) структура M сигнатуры Σ называется (*определимо*) *минимальной*, если любое подмножество M, определимое с помощью формулы логики первого порядка в сигнатуре $\Sigma(M)$, конечно или коконечно. Такая структура называется *сильно минимальной*, если каждая структура из ее элементарного класса минимальна. В частности, бесконечное кольцо $\langle R; +, \cdot, 0\rangle$ минимально, если любое формульное в языке $\{=, +, \cdot, R\}$ подмножество R конечно или коконечно, и оно называется *сильно минимальным*, если минимально любое его элементарное расширение.

Классические примеры нетривиальных минимальных колец — алгебраически замкнутые поля (следствие элиминации кванторов). Имеется несколько гипотез относительно строения минимальных колец.

Гипотеза 1. *Неизоморфные элементарно эквивалентные минимальные кольца сильно минимальны.*

Гипотеза 2. *Каждое минимальное кольцо сильно минимально, и в нем интерпретируется бесконечное поле.*

Первая из гипотез известна в общей формулировке для произвольных минимальных структур. Вторая гипотеза, более сильная, чем первая, формулируется только для минимальных колец; известны примеры, показывающие, что в общем случае для произвольных минимальных структур оба утверждения этой гипотезы неверны [1].

Вагнер подтвердил первое утверждение гипотезы 2 для полей положительной характеристики: такие минимальные поля алгебраически замкнуты [2]. До сих пор неизвестно, существуют ли минимальные, но не алгебраически замкнутые поля нулевой характеристики.

Исследования неассоциативных минимальных колец возобновились в [3] и далее были продолжены в [4–6]. В [7] был введен новый вид минимальности для колец и алгебр: l-минимальность (линейная минимальность), и там же было показано, что классы (нетривиальных) линейно минимальных колец и алгебр практически совпадают.

Определение 1 [7]. Бесконечная алгебра $\mathfrak{A}$ называется *линейно минимальной* (сокращенно *l-минимальной*), если любое ненулевое линейное преобразование из алгебры умножений $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ имеет конечное ядро и является сюръекцией, т. е. отображением «на».

В данной работе приводятся начальные результаты исследований линейно минимальных алгебр Ли. Зафиксируем бесконечную линейно минимальную алгебру Ли $\langle L; +, [\cdot,\cdot]\rangle$ над полем F. Напомним определяющие тождества этой алгебры:

$$x^2 = 0, \tag{AC}$$

$$[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0. \tag{IJ}$$

Как обычно, предполагаем, что алгебра L не абелева. Тогда, как показано в [6, 7], поле F конечно и алгебра L бесконечномерна; более того, можно предполагать, что L — центральная алгебра над F. Пусть p — характеристика поля F.

В настоящей статье основные результаты из [6], доказанные для определимо минимальных лиевых колец, переносятся на линейно минимальные алгебры Ли. Доказывается, что l-минимальность наследуется некоторыми локально конечными подалгебрами алгебры Ли. Мы придерживаемся определений и терминологии из [8].

§ 1. Предварительные результаты

Обозначим через D_L алгебру *дифференцирований* кольца Ли L, т. е. алгебру, состоящую из всех линейных отображений $d : L \to L$ таких, что для любых $x, y \in L$

$$d[xy] = [dx, y] + [x, dy].$$

Заметим, что в алгебрах Ли левое умножение на элемент является оператором дифференцирования:

$$[a[xy]] = [[ax]y] + [x[ay]]$$

или, если лиево произведение $[ax]$ обозначить через ax, то

$$a[xy] = [ax, y] + [x, ay].$$

Это следует из тождества Якоби (IJ) и антикоммутативности, т. е. $[xy] = -[yx]$, которая является следствием тождества (AC). Таким образом, L вкладывается в свою алгебру дифференцирований D_L и образует там идеал *внутренних дифференцирований.*

Пусть $a, b \in L$ — элементы такие, что $[ab] \neq 0$. Тогда как следствие линейной минимальности ядро $\operatorname{Ker} a$ отображения $l_a : x \mapsto [ax]$ конечно. Центр C алгебры L является подмножеством $\operatorname{Ker} a$, значит, он конечен.

Предложение 1. *Фактор-алгебра $\overline{L} = L/C$ линейно минимальна.*

Доказательство. Любому элементу $\bar f(\bar x)$ алгебры умножений $\mathfrak{T}(\overline{L})$ фактор-алгебры соответствует элемент $f(x) \in \mathfrak{T}(L)$ такой, что $\bar f(\bar x) = f(x) + C = \overline{f(x)}$. Ясно, что если преобразование $\bar f$ ненулевое, то f также ненулевое. Ввиду линейной минимальности $\operatorname{Ker} f$ конечно и $\operatorname{Im} f = L$. Тем самым $\operatorname{Im} \bar f = \overline{L}$ и $\operatorname{Ker} \bar f = \overline{\operatorname{Ker} f}$ конечно. $\square$

Таким образом, мы можем продолжать наше исследование, предполагая, что L — алгебра с нулевым центром (меняем L на $\overline{L}$). Как следствие, отображение $l_a : L \to L$, порожденное левым умножением на произвольный фиксированный ненулевой элемент a, является сюръекцией. При этом разные элементы порождают разные отображения. Итак, L *изоморфно* вложена в D_L

посредством отображения $a \mapsto l_a$. Поэтому в дальнейшем часто отождествляем элемент $a \in L$ и отображение $l_a \in D_L$ (и считаем, что $L \subseteq D_L$). Кроме того, l-минимальность влечет, что если $a \neq 0$, то $\operatorname{Im} l = L$ и $\operatorname{Ker} l$ конечно для $l \in \{l_a, r_a\}$ (здесь $r_a : x \mapsto [xa]$). Отметим также, что теперь алгебра L проста, так как $[aL] = L$ для любого $0 \neq a \in L$.

Обозначим через a^q оператор, полученный q-кратным применением оператора внутреннего дифференцирования l_a, определенного элементом $a \in L$, т. е.

$$a^q x = l_a^q x = \underbrace{[a[a \dots [a}_{q\ times}x] \dots]].$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname{Ker} a \subset \operatorname{Ker} a^q$ и $|\operatorname{Ker} a^q| = |\operatorname{Ker} a|^q$. При $q = p^k$, где p — характеристика кольца L, а k — произвольное натуральное число, a^q является дифференцированием [8], т. е. $a^q \in D_L$.

Предложение 2. *Теория* $\mathrm{Th}(L)$ *не является* ω*-категоричной в сигнатуре* $\{=, +, \cdot, F\}$, *где скаляры из* F *рассматриваются как унарные функции.*

Доказательство. Пусть a — произвольный ненулевой элемент алгебры L. Тогда, так как $a \in \operatorname{Ker} a$, имеем $|\operatorname{Ker} a| > 1$. Значит, алгебраическое замыкание (в теоретико-модельном смысле) элемента a в L бесконечно, поскольку содержит ядра всех операторов a^k для каждого натурального k. Следовательно, $\mathrm{Th}(L)$ не ω-категорична. $\square$

Предложение 3. *Не существует строго возрастающей* $\subset$*-цепи ядер элементов из* $L \subseteq D_L$.

Доказательство. Допустим, что существует бесконечная строго возрастающая $\subset$-цепь $\operatorname{Ker} a_0 \subset \operatorname{Ker} a_1 \subset \dots \subset \operatorname{Ker} a_n \subset \dots$ ядер. Тогда $\operatorname{Ker} a_0$ содержит бесконечное множество $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$; противоречие. $\square$

Напомним, что алгебра L называется *ограниченной*, если она вместе с каждым элементом содержит его p-ю степень, и *совершенной*, если $L = D_L$ [8]. Из предложения 3 следует, что наша линейно минимальная алгебра L далека от совершенства: она даже не является ограниченной. Действительно, для фиксированного элемента $0 \neq a \in L$ ядра элементов вида $a^q \in D_L$, $q = p^k$, образуют бесконечную строго возрастающую $\subset$-цепь. Переформулируем этот результат.

Следствие 1. *Линейно минимальная ограниченная лиева алгебра абелева.*

Таким образом, в случае алгебр Ли линейная минимальность оказывается несовместимой с теми удобствами, что мы привыкли иметь в случае полей. В случае полей аналогом понятия ограниченности служит понятие радикальной замкнутости, а аналогом понятия совершенности — понятие алгебраической замкнутости. Минимальные поля радикально замкнуты, а в случае положительной характеристики они алгебраически замкнуты [2].

§ 2. Существование бесконечной локально конечной подалгебры

Этот параграф посвящен доказательству основной теоремы, утверждающей, что наша линейно минимальная модулярная алгебра Ли L содержит бесконечную локально конечную подалгебру, являющуюся также линейно минимальной. Счетно категоричные алгебры локально конечны, поэтому мы можем сказать, что имеется некоторое сходство между ними и линейно минимальными модулярными алгебрами Ли.

Теорема. *Для любого $a \in L^* \stackrel{\text{def}}{=} L \backslash \{0\}$ подмножество*

$$[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in L \mid \{a^n x : n \in \omega\} \text{ конечно}\}$$

образует бесконечную линейно минимальную локально конечную подалгебру алгебры L.

Доказательство. Для удобства введем обозначения (для данного a и натуральных чисел m, k) для элементов алгебры умножений$\mathfrak{T}(L)$:

$\phi_m \stackrel{\text{def}}{=} \phi(m) \stackrel{\text{def}}{=} a^m$ — линейное отображение;

$d_k \stackrel{\text{def}}{=} \phi(p^k) \in D_L$ — дифференцирование.

Данное множество $[a]$ бесконечно, так как содержит объединение строго возрастающей $\subset$-цепи ядер линейных преобразований ϕ_m, $m \in \omega$.

Пусть b — произвольный элемент из $[a]$. Так как множество $\{a^n b : n \in \omega\}$ конечно, последовательность $\{\phi_n b\}_{n\in\omega}$ (которую можно называть историей элемента b под действием a) финально периодична, скажем, с периодом π для некоторого положительного целого π.

Лемма 1. *Последовательность $\{d_n b\}_{n\in\omega}$ финально периодична.*

Доказательство. Пусть k, m — неотрицательные целые числа такие, что $\pi = m \cdot p^k$ и m не делится на p. Если $m > 1$, то обозначим через t порядок элемента p в группе обратимых элементов кольца вычетов по модулю m, т. е. t — наименьшее положительное целое число такое, что $p^t \equiv 1 \bmod m$; если $m = 1$, то полагаем $t = 1$. Тогда ясно, что последовательность $\{p^k, p^{k+1}, p^{k+2}, \dots\}$ периодична с периодом t в кольце вычетов по модулю π. Следовательно, последовательность $\{d_n b\}_{n\in\omega}$ будет также периодичной с периодом t начиная с номера $n = k$. Лемма доказана.

Обозначим через $t = t(b)$ наименьший период последовательности $\{d_n b\}_{n\in\omega}$.

Пусть $b_1, b_2, \dots, b_k$ — произвольный конечный набор элементов из данного множества $[a]$. Тогда для любого $1\le i \le k$ последовательность $\{d_n b_i\}_{n\in\omega}$ финально периодична с периодом $T = \text{НОК}\{t(b_i) : 1 \le i \le k\}$. Это значит, что для достаточно большого N все элементы указанного выше набора попадают в ядро оператора $d \stackrel{\text{def}}{=} d_N - d_{N+T} \in D_L$. Следовательно, вся подалгебра, порожденная набором $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, попадает в ядро оператора дифференцирования d. Заметим, что оператор d ненулевой, так как имеем строгое включение $\operatorname{Ker} d_N \subset \operatorname{Ker} d_{N+T}$ и любой элемент из разности $\operatorname{Ker} d_{N+T} \backslash \operatorname{Ker} d_N$ не переводится этим оператором в нуль. Значит, ядро $\operatorname{Ker} d$ конечно, и, следовательно, подалгебра, порожденная набором $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, также конечна.

Теперь утверждение теоремы о том, что множество $[a]$ образует подалгебру, становится почти очевидным. Действительно, пусть $b, c \in [a]$. Очевидно, $a \in [a]$. Тогда множества $\{a^n(b+c) : n \in \omega\}$ и $\{a^n(bc) : n \in \omega\}$ конечны, так как конечна содержащая их подалгебра, порожденная элементами a, b, c.

Линейная минимальность подалгебры $[a]$ будет доказана ниже (см. следствие 3).

Замечание. Если оператор дифференцирования $0 \ne d \in \mathfrak{T}(L)$ переводит a в нуль, то его ядро является подмножеством $[a]$, т. е. $\operatorname{Ker} d \subset [a]$. Действительно, если множество $\{a^n c : n \in \omega\}$ бесконечно, то бесконечным является и множество $d(\{a^n c : n \in \omega\}) = \{a^n d(c) : n \in \omega\}$. Следовательно, $c \notin \operatorname{Ker} d$, более того, $d(c) \notin [a]$. В частности, если дифференцирования $d_1 \ne d_2 \in \mathrm{T}(L)$ обращают в нуль a и $c \notin [a]$, то $d_1(c) \ne d_2(c)$.

Определение 2. Будем говорить, что элементы a и b *подобны*, и писать $a \approx b$, если множество $\{a^n b : n \in \omega\}$ конечно.

Предложение 4. *Отношение* $\approx$ *— эквивалентность на* L^*.

Доказательство. Рефлексивность очевидна. Пусть $a \approx b$, $a \approx c$ и $a \in L^*$. Тогда множества $\{b^n a : n \in \omega\}$ и $\{c^n b : n \in \omega\}$ конечны, так как по теореме 2 они содержатся в конечных подалгебрах, порожденных множествами $\{a, b\}$ и $\{b, c\}$ соответственно. Таким образом, $\approx$ симметрично и транзитивно. $\square$

Предложение 5. *Если в* L^* *количество* $\approx$*-классов больше* 1*, то множество таких классов бесконечно.*

Доказательство. Действительно, пусть a и b не $\approx$-эквивалентны. Тогда для любого $x \in [b]$ элементы $a+x$ и b также не $\approx$-эквивалентны (иначе получаем $a = (a+x)-x \approx b$; противоречие). Следовательно, для любых различных $x, y \in [b]$ элементы $a + x$ и $a + y$ не $\approx$-эквивалентны, а множество $[b]$ бесконечно. $\square$

Итак, отношение подобия является отношением эквивалентности на множестве L^* ненулевых элементов алгебры. Это отношение не элементарно, т. е. не является определимым, но оказывается очень интересным: каждый класс эквивалентности вместе с нулем образует локально конечную бесконечную подалгебру алгебры L.

Произвольный класс подобия вместе с нулем назовем *алгеброй подобных элементов.*

Лемма 2. *Пусть* B *— алгебра подобных элементов и* $a \in B$*,* $x \in L$ *и* $[a, x] = b \in B$*. Тогда* $x \in B$.

Доказательство. По определению отношения подобия множество $\{a^n b : n \in \omega\}$ конечно, следовательно, множество $\{a^n x : n \in \omega\} = \{x\} \cup \{a^n b : n \in \omega\}$ также конечно. Значит, $x \in B$.

Следствие 2. *Алгебра подобных элементов совпадает со своим нормализатором.*

Действительно, по лемме 2 для элемента $x \in L$ и алгебры подобных элементов B следующие условия эквивалентны:

(a) $x \in B$;

(b) $[xB] = [Bx] \subseteq B$.

В самом деле, если $0 \neq b \in B$, то $[bB] = [Bb] = B$, так как l_b, r_b — сюръекции и по лемме 2 $l_b^{-1}(B) = r_b^{-1}(B) = B$. Следующее предложение утверждает, что верен более общий факт.

Предложение 6. *Пусть* B *— алгебра подобных элементов и* $0 \neq \varphi \in \mathfrak{T}(B)$*. Если* $\varphi c \in B$*, то* $c \in B$.

Доказательство. Пусть f — линейный многочлен над $B = [a]$, соответствующий преобразованию $0 \neq \varphi \in \mathfrak{T}(B)$, т. е. $\varphi : x \mapsto f(x)$. Пусть $\varphi c = f(c) = b_0 \in B$ и $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — список всех элементов из B, участвующих в выражении f в качестве параметров. Как в доказательстве теоремы, найдется ненулевой оператор дифференцирования $d \in \mathfrak{T}(L)$, содержащий в своем ядре все $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k$ и a. На самом деле таких (различных) операторов бесконечно много, например, можно брать p^i-степени оператора d для любого $i \in \omega$.

Тогда для любого такого оператора d имеем $0 = d(b_0) = d(f(c)) = f(d(c))$, значит, $d(c)$ попадает в конечное ядро преобразования φ. Теперь из вышеприведенного замечания следует, что $c \in [a] = B$. $\square$

Следствие 3. *Алгебра подобных элементов линейно минимальна.*

§ 3. Одно замечание о минимальных кольцах Ли

Приведем следующее естественное усиление требования линейной минимальности для колец.

Определение 3. Бесконечное кольцо называется *e-минимальным*, если любой определимый (в сигнатуре кольца) ненулевой эндоморфизм его аддитивной группы имеет конечное ядро и является сюръекцией, т. е. отображением «на».

Замечания. 1. Определимая минимальность кольца влечет e-минимальность; в свою очередь, e-минимальность кольца влечет l-минимальность.

2. Существуют l-минимальные, но не e-минимальные поля: простое трансцендентное расширение любого поля простой характеристики p (отображение $x \mapsto x^p$ не является сюръекцией).

3. Существуют e-минимальные поля, не являющиеся (определимо) минимальными: поле рациональных чисел, поле вещественных чисел.

Известно, что в случае характеристики (поля алгебры), отличной от 2, тождество антикоммутативности

$$x^2 = 0 \tag{AC}$$

эквивалентно настоящему тождеству антикоммутативности:

$$[xy] = -[yx]. \tag{AC$'$}$$

Если же характеристика поля равна 2, то (AC) влечет (AC$'$), которое в этом случае будет выглядеть как $[xy] = [yx]$ (тождество коммутативности), но обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. Рассмотрим двумерное пространство с базисом $\{e, f\}$ над двухэлементным полем, где умножение базисных элементов задается следующим образом: $[e, e] = [e, f] = [f, e] = 0, [f, f] = e$. Полученное коммутативное кольцо удовлетворяет тождеству Якоби

$$[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0, \tag{IJ}$$

так как произведение любых трех элементов равно 0, т. е. выполняется более сильное «тождество»: $[x[yz]] = 0$. Но, очевидно, это кольцо не удовлетворяет тождеству (AC).

Следующая теорема показывает, что для e-минимальных колец, удовлетворяющих тождеству Якоби, условия (AC) и (AC$'$) эквивалентны.

Предложение 7. *Пусть e-минимальное коммутативное кольцо L характеристики* 2 *удовлетворяет тождеству* (IJ) *Якоби. Тогда оно удовлетворяет тождеству* (AC), *т. е. является лиевым кольцом.*

Доказательство. Если кольцо L абелево, то тождество (AC) тривиально выполняется. Поэтому допустим, что L неабелево. Тогда e-минимальность влечет, что центр $C(L)$ кольца конечен. Тождество Якоби и коммутативность дают

$$[x[yy]] + [y[yx]] + [y[xy]] = [x[yy]] + [y[xy]] + [y[xy]] = [x[yy]] = 0,$$

т. е. $a^2 \in C(L)$ для любого элемента $a \in L$. Значит, эндоморфизм $x \mapsto x^2$ аддитивной группы L^+ имеет конечный образ, являющийся подгруппой центра. Тогда, снова по e-минимальности, этот эндоморфизм нулевой, т. е. кольцо удовлетворяет тождеству $x^2 = 0$. Предложение доказано. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hrushovski E.* A new strongly minimal set // Ann. Pure Appl. Logic. 1993. V. 62, N 2. P. 147–166.

2. *Wagner F. O.* Minimal fields // J. Symbol. Logic. 2000. V. 65, N 4. P. 1833–1835.

3. *Байсалов Е. Р., Мейрембеков К. А., Нуртазин А. Т.* Определимо минимальные модели // Теория моделей в Казахстане. Алматы: EcoStudy, 2006. С. 140–157.

4. *Байсалов Е. Р.* Минимальные кольца, связанные с дифференцированием // Вестн. КазНПУ им. Абая. Сер. Физ.-мат. науки. 2007. № 2. С. 45–51.

5. *Байсалов Е. Р.* Минимальные кольца Новикова // Вестн. КазНУ им. аль-Фараби. Сер. Математика, механика, информатика. 2007. № 2. С. 11–15.

6. *Байсалов Е. Р.* Об определимо минимальных лиевых кольцах // Тр. междунар. науч. конф. «Вычислимость и модели». Усть-Каменогорск, 2010. С. 12–16.

7. *Байсалов Е. Р.* Линейно минимальные кольца и алгебры // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 2. С. 159–167.

8. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.

9. *Erdmann K., Wildon M. J.* Introduction to Lie algebras. New York: Springer-Verl., 2006.

10. *Poizat B.* Groupes stables. Launay; Paris: Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1987.

Статья поступила 12 октября 2011 г.

Байсалов Ержан Рахметтоллаевич
Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева,
ул. К. Мунайтпасова, 5, Астана 010008, Казахстан;
Al-Imam University
College of Science
P.O.BOX 90950
11623 Riyadh
Kingdom of Saudi Arabia
baisalov_er@enu.kz, yerzhan_baisal@mail.ru, ybbaissalov@imamu.edu.sa