Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 517.54

КВАЗИМЁБИУСОВОСТЬ НА МАЛЫХ ОКРУЖНОСТЯХ И КВАЗИКОНФОРМНОСТЬ

В. В. Асеев

Аннотация. Доказывается, что отображение области в расширенной плоскости (без требования инъективности и непрерывности), являющееся ω-квазимёбиусовым на достаточно малых окружностях, будет локально квазиконформным в этой области с верхней оценкой коэффициента квазиконформности, зависящей только от ω. Аналогичный результат получен для отображений, η-квазисимметрических на малых окружностях (для евклидовой и для хордовой метрик), а также для отображений, удовлетворяющих локальному условию мёбиусовых середин.

Ключевые слова: квазимёбиусово вложение, квазисимметрическое вложение, функция искажения, квазиконформное отображение, коэффициент квазиконформности, условие мёбиусовых середин, абсолютное двойное отношение, ангармоническое отношение, хордовая метрика.

1. Терминология и формулировки основных теорем. Понятие квазимёбиусовых вложений введено в 1984–85 гг. независимо В. В. Асеевым и Вяйсяля в [1, 2] как естественная модификация квазисимметричности, более удобная для работы с отображениями в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}}^n$.

1.1. Определение (см. [2, с. 219; 1, с. 17; 3, определение 1.3.1]). Топологическое вложение $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ метрических пространств называется *квазимёбиусовым*, если существует такой гомеоморфизм $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ вещественной полуоси на себя (называемый *функцией искажения*), что для любой упорядоченной четверки попарно различных точек $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathscr{X}$ (т. е. *тетрады*) выполняется следующая оценка *абсолютного двойного отношения* (absolute cross-ratio) образа этой тетрады:

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|_{\mathscr{Y}} |f(x_3) - f(x_4)|_{\mathscr{Y}}}{|f(x_1) - f(x_3)|_{\mathscr{Y}} |f(x_2) - f(x_4)|_{\mathscr{Y}}} \leq \eta\left(\frac{|x_1 - x_2|_{\mathscr{X}} |x_3 - x_4|_{\mathscr{X}}}{|x_1 - x_3|_{\mathscr{X}} |x_2 - x_4|_{\mathscr{X}}}\right), \tag{1.1.1}$$

где через $|a - b|_{\mathscr{M}}$ обозначается расстояние между точками в метрическом пространстве $\mathscr{M}$. Отображение, удовлетворяющее этому условию, называют *η-квазимёбиусовым вложением*.

1.2. Замечание. Так как функция искажения $\eta_0(t) = \max\{t, \eta(t)\}$ также осуществляет гомеоморфизм полуоси $[0, +\infty)$ на себя и оценка (1.1.1) остается справедливой при замене η на η_0, всегда можно считать, что функция искажения удовлетворяет дополнительному условию

$$\eta(t) \geq t. \tag{1.2.1}$$

Основные свойства квазимёбиусовых вложений, их связь с квазисимметричностью и квазиконформностью в областях $\subset \overline{\mathbb{R}}^n$ описаны в статье [2] и в обзоре [3].

Объектом изучения в данной статье служат отображения $f : D \to \overline{\mathbf{C}}$ области D в расширенной плоскости $\overline{\mathbf{C}} \equiv \overline{\mathbb{R}}^2$, обладающие следующим свойством.

1.3. Определение. Пусть ω — функция искажения. Отображение $f : D \to \overline{\mathbf{C}}$ области $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ назовем *ω-квазимёбиусовым на малых окружностях*, если у каждой точки $z \in D$ имеется такая окрестность $U(z) \subset D$, что ограничение $f|\Sigma$ на любой обобщенной окружности $\Sigma \subset U(z)$ является ω-квазимёбиусовым вложением. (От отображения f не требуется ни непрерывности, ни инъективности в области D.)

Центральным результатом статьи является

1.4. Теорема. *Пусть ω — функция искажения и D — область в $\overline{\mathbf{C}}$. Если $f : D \to \overline{\mathbf{C}}$ — ω-квазимёбиусово отображение на малых окружностях, то f — локально гомеоморфное квазиконформное отображение с коэффициентом квазиконформности*

$$K[f] \le 2\omega(1/2) + \sqrt{4(\omega(1/2))^2 - 1}. \tag{1.4.1}$$

В приложениях более известно понятие квазисимметрического отображения, возникшее в связи с задачей Альфорса — Берлинга о продолжении гомеоморфизма вещественной оси до квазиконформного отображения плоскости (см. [4, 5]) и модифицированное Тукиа и Вяйсяля [6] в 1980 г. для отображений метрических пространств.

1.5. Определение [6, с. 97]. Пусть η — функция искажения. Топологическое вложение $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ метрических пространств называется *η-квазисимметрическим*, если для любой тройки попарно различных точек $x_1, x_2, x_3 \in \mathscr{X}$ выполняется оценка

$$\frac{|f(x_1) - f(x_3)|_{\mathscr{Y}}}{|f(x_2) - f(x_3)|_{\mathscr{Y}}} \le \eta\left(\frac{|x_1 - x_3|_{\mathscr{X}}}{|x_2 - x_3|_{\mathscr{X}}}\right). \tag{1.5.1}$$

На плоскости используем как евклидово ($|a-b|$), так и хордовое ($h(a,b)$) расстояния между точками. По аналогии с 1.3 вводим следующее

1.6. Определение. Пусть η — функция искажения. Отображение $f : D \to \overline{\mathbf{C}}$ области $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ называем *η-квазисимметрическим на малых окружностях* в хордовой (или в евклидовой) метрике, если у каждой точки $z \in D$ (соответственно $z \in D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$) имеется такая окрестность $U(z) \subset D$ (соответственно $U(z) \subset D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$), что для любой обобщенной окружности $\Sigma \subset U(z)$ ограничение $f|\Sigma$ является η-квазисимметрическим вложением в хордовой (соответственно в евклидовой) метрике.

С помощью теоремы 1.4 доказана

1.7. Теорема. *Пусть η — функция искажения и D — область в $\overline{\mathbf{C}}$. Если отображение $f : D \to \overline{\mathbf{C}}$ η-квазисимметрическое на малых окружностях (в евклидовой или в хордовой метрике), то f — локально гомеоморфное квазиконформное отображение в D с коэффициентом квазиконформности*

$$K[f] \le \eta(1). \tag{1.7.1}$$

С использованием работы [7] требование квазимёбиусовости на малых окружностях в теореме 1.4 удается заменить более слабым геометрическим условием — условием мёбиусовых середин.

1.8. Определение [7, 1.7]. *Мёбиусовой серединой* упорядоченной тройки попарно различных точек $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbf{C}}$ называется такая точка $z \in \overline{\mathbf{C}}$, для которой ангармоническое отношение четверки точек z, z_1, z_2, z_3 удовлетворяет равенству

$$[z : z_2 : z_1 : z_3] = 1/2. \tag{1.8.1}$$

У любой тройки попарно различных точек в $\overline{\mathbf{C}}$ мёбиусова середина существует, единственна и лежит на обобщенной окружности, проходящей через эти точки.

1.9. Определение [7, 1.8]. Пусть $0 \le \delta < 1/2$ и Σ — обобщенная окружность в $\overline{\mathbf{C}}$. Топологическое вложение $f : \Sigma \to \overline{\mathbf{C}}$ удовлетворяет *условию мёбиусовых середин* с константой δ, если для любой тройки попарно различных точек $z_1, z_2, z_3 \in \Sigma$ и их мёбиусовой середины z выполняется оценка

$$|[f(z) : f(z_2) : f(z_1) : f(z_3)] - 1/2| \le \delta. \tag{1.9.1}$$

1.10. Теорема. *Пусть $0 \le \delta < 1/2$ и D — область в $\overline{\mathbf{C}}$. Пусть отображение $f : D \to \overline{\mathbf{C}}$ обладает следующим свойством.*

У любой точки $z_0 \in D$ имеется такая окрестность $U(z_0) \subset D$, что для любой обобщенной окружности $\Sigma \subset U(z_0)$ ограничение $f|\Sigma$ является топологическим вложением, удовлетворяющим условию мёбиусовых середин с константой δ. Тогда f — локально гомеоморфное квазиконформное отображение с коэффициентом квазиконформности

$$K[f] \le \sqrt{1 + 4\delta^2} + 2\delta. \tag{1.10.1}$$

2. Доказательство теоремы 1.4 (локальная инъективность и непрерывность). Докажем, что отображение $f : D \to \overline{\mathbf{C}}$ локально гомеоморфно в области D.

Для произвольно заданной точки $z_0 \in D$ существует такой открытый круг $Q \subset \overline{Q} \subset D$, что $z_0 \in Q$ и f ω-квазимёбиусово на любой окружности в $\overline{Q}$. Через любые две точки $z_1, z_2 \in \overline{Q}$ можно провести окружность $S \subset \overline{Q}$. Так как $f|S$ — топологическое вложение, то $f(z_1) \ne f(z_2)$. Следовательно, f инъективно в круге $\overline{Q}$.

Допустим, что f не непрерывно в некоторой точке $\xi_0 \in Q$. Тогда имеется такая последовательность $\xi_n \to \xi_0$, что $c' = \lim f(\xi_n) \ne f(\xi_0)$. Пусть $R = \operatorname{dist}(\xi_0, \partial Q)$ в хордовой метрике. При всех достаточно больших n через точки ξ_0 и ξ_n можно провести окружность S_n с хордовым диаметром $R/3$. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что последовательность ω-квазимёбиусовых вложений $\{f|S_n\}$ имеет графический предел $\Gamma \subset \overline{\mathbf{C}} \times \overline{\mathbf{C}}$. Тогда $S_0 = \operatorname{pr}_1 \Gamma = \lim S_n$ есть окружность с хордовым диаметром $R/3$ и $\xi_0 \in S_0$. Так как $(\xi_0, f(\xi_0)) \in \Gamma$ и $(\xi_0, c') = \lim(\xi_n, f(\xi_n)) \in \Gamma$, по известной теореме (см., например, [3, теорема 2.2.1]) о графических пределах ω-квазимёбиусовых вложений $\Gamma \subset (\{\xi_0\} \times \overline{\mathbf{C}}) \cup (S_0 \times \{c\})$ с некоторой константой $c \in \overline{\mathbf{C}}$. Это, в частности, означает, что для любой последовательности $w_n \in S_n$ с $\lim w_n \in S_0 \setminus \{\xi_0\}$ имеется сходимость $\lim f(w_n) = c$.

Построим окружность $\Sigma \subset Q$, пересекающуюся с $S_0 \setminus \{\xi_0\}$ в двух разных точках $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$. Тогда (при всех достаточно больших n) $\Sigma \cap S_n = \{w_n^{(1)}, w_n^{(2)}\}$, где $w_n^{(1)} \to w^{(1)}$ и $w_n^{(2)} \to w^{(2)}$. Следовательно, $f(w_n^{(1)}) \to c$ и $f(w_n^{(2)}) \to c$. В силу непрерывности $f|\Sigma$ это приводит к равенству $f(w^{(1)}) = c = f(w^{(2)})$, противоречащему инъективности $f|Q$. Таким образом, f непрерывно в Q.

Тогда для любого открытого круга $Q' \subset \overline{Q}' \subset Q$, содержащего z_0, отображение $f|\overline{Q}'$ инъективно и непрерывно. Следовательно (см. [8, § 41.III, теорема 3]), $f|\overline{Q}'$ есть гомеоморфизм. Локальная гомеоморфность f в D доказана.

3. Доказательство теоремы 1.4 (квазиконформность). Нам понадобится следующая вспомогательная

3.1. Лемма. *Пусть последовательность $\{f_n : \overline{B}_n \to \overline{\mathbf{C}}\}$ топологических вложений замкнутых кругов $\overline{B}_n$ имеет графический предел Γ с $\mathrm{pr}_1\,\Gamma = \lim \overline{B}_n = \overline{B}$, где B либо открытый круг, либо $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{q\}$. Если каждое отображение f_n ω-квазимёбиусово на любой окружности в $\overline{B}_n$, то либо $\Gamma = (\{\xi_0\} \times \overline{\mathbf{C}}) \cup (\overline{B} \times \{c\})$ с некоторыми $\xi_0 \in B$ и $c \in \overline{\mathbf{C}}$ (случай (Y1)), либо множество Γ над B совпадает с графиком непрерывного отображения, которое есть либо константа (случай (Y2)), либо топологическое вложение (случай (Y3)).*

Доказательство. Пусть над некоторой точкой ξ_0 множество Γ не одноточечно и $B' \subset \overline{B}' \subset B$ — произвольно малый круг, содержащий ξ_0. Пусть $R = \mathrm{dist}(\xi_0, \partial B)$ в хордовой метрике. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что существуют $b = \lim f_n(\xi_0)$ и такая последовательность $\xi_n \to \xi_0$, что $\lim f_n(\xi_n) = b' \neq b$. При всех достаточно больших n через ξ_0 и ξ_n проходит окружность Σ_n с хордовым диаметром $R/2$. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что $\{f_n|\Sigma_n\}$ имеет графический предел Γ_0. Так как $(\xi_0, b) \in \Gamma_0$ и $(\xi_0, b') = \lim(\xi_n, f_n(\xi_n)) \in \Gamma_0$, по теореме о графических пределах ω-квазимёбиусовых вложений [3, теорема 2.2.1] $\Gamma_0 \subset (\{\xi_0\} \times \overline{\mathbf{C}}) \cup (\Sigma_0 \times \{c\})$, где $c \in \overline{\mathbf{C}}$ и $\Sigma_0 = \mathrm{pr}_1\,\Gamma_0 = \lim \Sigma_n$ есть окружность с хордовым диаметром $R/2$, проходящая через ξ_0. В частности, $f_n(w_n) \to c$ для любой последовательности $w_n \in \Sigma_n$ с пределом $\lim w_n \in \Sigma_0 \setminus \{\xi_0\}$.

Допустим, что **(A0)** существует последовательность $\{a_n \in \overline{B}_n \setminus B'\}$, для которой $\lim f_n(a_n) = c' \neq c$. Тогда справедливо **(A1)** если $f_n \to c$ равномерно на границе жордановой области $G \subset \overline{G} \subset B'$, то $f_n(\overline{G}) \to \{c\}$ и $f_n \to c$ равномерно на $\overline{G}$ (в противном случае $f_n(\overline{B}_n \setminus B') \to \{c\}$, что противоречит (A0)).

Построим открытый круг $B^{(0)} \subset \overline{B}^{(0)} \subset B'$ с хордовым диаметром $R/4$, содержащий ξ_0, у которого $S_0 = \partial B^{(0)}$ пересекается с $\Sigma_0 \setminus \{\xi_0\}$ в двух точках $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$. Перейдя к подпоследовательности, можем считать, что $\{f_n|S_0\}$ имеет графический предел Γ_1. Так как $w^{(1)} = \lim w_n^{(1)}$ и $w^{(2)} = \lim w_n^{(2)}$, где $\{w_n^{(1)}, w_n^{(2)}\} = S_0 \cap \Sigma_0$, то $(w^{(1)}, c) \in \Gamma_1$ и $(w^{(2)}, c) \in \Gamma_1$. Тогда по теореме 2.2.1 из [3] $\Gamma_1 = (\{z_1\} \times Z_1) \cup (S_0 \times \{c\})$, где $z_1 \in S_0$ и Z_1 содержит более одной точки (случай $\Gamma_1 = S_0 \times \{c\}$ невозможен ввиду (A1) для области $G = B^{(0)}$, содержащей ξ_0).

Построим открытый круг $B^{(1)} \subset \overline{B}^{(1)} \subset B' \setminus \{\xi_0\}$ с хордовым диаметром, меньшим чем $R/4$, содержащий z_1, граница которого $S_1 = \partial B^{(1)}$ пересекает S_0 в двух точках, отличных от z_1. Перейдя к подпоследовательности, можем считать, что $\{f_n|S_1\}$ имеет графический предел Γ_2. Так как $f_n \to c$ на множестве $S_0 \cap S_1$, по теореме 2.2.1 из [3] $\Gamma_2 = (\{z_2\} \times Z_2) \cup (S_1 \times \{c\})$, где $z_2 \in S_1$ и Z_2 содержит более одной точки (случай $\Gamma_2 = S_1 \times \{c\}$ невозможен ввиду (A1) для области $G = B^{(1)} \ni z_1$). Допустив, что $z_2 \in B^{(0)}$, получим равномерную сходимость $f_n \to c$ на $\partial(B^{(0)} \cup B^{(1)})$, противоречащую (A1), так как $\xi_0 \in B^{(0)} \cup B^{(1)}$. Допустив, что $z_2 \notin \overline{B}^{(0)}$, получим равномерную сходимость $f_n \to c$ на $\partial(B^{(0)} \setminus \overline{B}^{(1)})$, противоречащую (A1), так как $\xi_0 \in B^{(0)} \setminus \overline{B}^{(1)}$. Следовательно, $z_2 \in S_0 \cap S_1$.

Построим открытый круг $B^{(2)} \subset \overline{B}^{(2)} \subset B' \setminus \{z_1, \xi_0\}$ с достаточно малым хордовым диаметром, содержащий z_2. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что $\{f_n|S_2\}$, где $S_2 = \partial B^{(2)}$, имеет графический предел Γ_3. Так как на двухточечном множестве $T_2 = S_2 \cap S_1$ имеется сходимость $f_n \to c$, в силу теоремы 2.2.1 из [3] $\Gamma_3 = (\{z_3\} \times Z_3) \cup (S_2 \times \{c\})$, где $z_3 \in S_2$ и Z_3 содержит более одной точки (случай $\Gamma_3 = S_3 \times \{c\}$ противоречит (A1) с $G = B^{(2)} \ni z_3$). Допустив, что $z_3 \in B^{(1)}$, получим равномерную сходимость $f_n \to c$ на $\partial(B^{(1)} \cup B^{(2)})$, что противоречит (A1), так как $z_1 \in B^{(1)} \cup B^{(2)}$. Допустив, что $z_3 \notin \overline{B}^{(1)}$, получаем равномерную сходимость $f_n \to c$ на $\partial(B^{(1)} \setminus \overline{B}^{(2)})$, что противоречит (A1) с $G = B^{(1)} \setminus \overline{B}^{(2)} \ni z_1$. Следовательно, $z_3 \in S_2 \cap S_1$.

Тогда либо $z_3 \in B^{(0)}$, либо $z_3 \notin \overline{B}^{(0)}$. В первом случае получаем равномерную сходимость $f_n \to c$ на $\partial(B^{(0)} \cup B^{(1)} \cup B^{(2)})$, что противоречит (A1) с областью $G = B^{(0)} \cup B^{(1)} \cup B^{(2)}$, содержащей ξ_0. Во втором случае имеем равномерную сходимость $f_n \to c$ на $\partial(B^{(0)} \setminus (\overline{B}^{(1)} \cup \overline{B}^{(2)}))$, что снова противоречит (A1) с областью $G = B^{(0)} \setminus (\overline{B}^{(1)} \cup \overline{B}^{(2)}) \ni \xi_0$.

Таким образом, допущение (A0) приводит к противоречию. Значит, над $\overline{B} \setminus B'$ множество Γ совпадает с графиком постоянного отображения $f_0 \equiv c$, при этом $f_n(\overline{B}') \to \overline{\mathbf{C}}$. В силу произвольной малости круга B', содержащего ξ_0, это означает, что $\Gamma = (\{\xi_0\} \times \overline{\mathbf{C}}) \cup (\overline{B} \times \{c\})$, т. е. реализуется случай (Y1).

Если множество Γ одноточечно над любой точкой $\xi_0 \in B$, то Γ над B совпадает с графиком некоторого непрерывного отображения f_0. Если f_0 инъективно, то реализуется случай (Y3). Если f_0 не инъективно, то $f_0(z_1) = f_0(z_2) = c$ в двух разных точках $z_1, z_2 \in B$. Проведем через них окружность $\Sigma_0 \subset B$. Из равномерной сходимости $f_n|\Sigma_0 \to f_0|\Sigma_0$ и [3, теорема 2.2.1] следует, что $f_0|\Sigma_0 \equiv c$. Через любую точку $z \in B$ можно провести окружность $\Sigma \subset B$, пересекающую Σ_0 в двух разных точках. Тогда по тем же соображениям, что и для Σ_0, имеем $f_0|\Sigma \equiv c$ и, в частности, $f_0(z) = c$. Таким образом, $f_0 \equiv c$ на B, и реализуется случай (Y2). Лемма доказана.

Приступаем к доказательству локальной квазиконформности f. Для этого достаточно установить, что отображение f локально квазимёбиусово. Для произвольно заданной точки $e \in D$ существуют такие открытые круги Q и Q', что $e \in Q' \subset \overline{Q}' \subset Q \subset \overline{Q} \subset D$ и $f|\overline{Q}$ — топологическое вложение, ω-квазимёбиусовое на любой окружности в $\overline{Q}$. Для квазимёбиусовости $f|\overline{Q}'$ достаточно установить (см. [3, 2.3.6]) нормальность семейства $\mathscr{F}$ всех топологических вложений вида $\mu \circ (f|\overline{Q}') \circ \nu : \nu^{-1}(\overline{Q}') \to \overline{\mathbf{C}}$ с произвольными мёбиусовыми преобразованиями μ и ν. Для нормальности $\mathscr{F}$ достаточно показать [3, теорема 2.3.9(ii)], что для произвольно заданной графически сходящейся последовательности $\{g_n = \mu_n \circ (f|\overline{Q}') \circ \nu_n\}$ с тремя неподвижными точками $\{q_1, q_2, q_3\}$ ее графический предел Γ' является графиком топологического вложения. Это и предстоит доказать.

Положим $f_n = \mu_n \circ (f|\overline{Q}) \circ \nu_n$, $B_n = \nu_n^{-1}(Q)$, $B_n' = \nu_n^{-1}(Q')$. Перейдя к подпоследовательности (это не влияет на графический предел Γ'), можем считать, что $\{f_n : \overline{B}_n \to \overline{\mathbf{C}}\}$ также имеет графический предел Γ и существует топологический предел $A = \lim(\overline{\mathbf{C}} \setminus B_n)$, являющийся либо замкнутым кругом, либо одноточечным множеством $\{q\}$. Положим $B = \overline{\mathbf{C}} \setminus A$ и заметим, что $\overline{B} = \operatorname{pr}_1 \Gamma = \lim \overline{B}_n$ ($A \neq \overline{\mathbf{C}}$, так как $\{q_1, q_2, q_3\} \subset B_n$ при всех n).

Случай 1. Пусть $\overline{B} \neq \overline{\mathbf{C}}$. Тогда $\overline{B}'_n$ сходится к замкнутому кругу $\overline{B}' \supset \{q_1, q_2, q_3\}$. Так как конформный модуль $\mathrm{Mod}(Q \backslash \overline{Q}')$ отличен от ∞, сохраняется при мёбиусовых преобразованиях ν_n^{-1} и в силу невырожденности континуумов $\overline{\mathbf{C}} \backslash B$ и $\overline{B}'$ сохраняется при предельном переходе, то $\mathrm{Mod}(B \backslash \overline{B}') \neq \infty$ и это означает, что $\overline{B}' \subset B$. Наличие в B трех неподвижных точек исключает случаи (Y1) и (Y2) в лемме 3.1. Стало быть, в силу этой леммы реализуется случай (Y3), т. е. Γ' — график топологического вложения $f_0 : \overline{B}' \to \overline{\mathbf{C}}$, что и требовалось установить.

Случай 2. Пусть теперь $B = \overline{\mathbf{C}} \setminus \{q\}$. Так как две точки из $\{q_1, q_2, q_3\}$ лежат в B, случай (Y2) в лемме 3.1 не реализуется. В случае (Y1) две точки из $\{q_1, q_2, q_3\}$ лежат в $\overline{B} \setminus \{\xi_0\}$, а это противоречит сходимости $f_n \to \mathrm{const}$, равномерной на компактах в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{\xi_0\}$. Поэтому случай (Y1) также не реализуется. Следовательно, по лемме 3.1 имеем равномерную на компактах в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{q\}$ сходимость $f_n \to f_0$ к топологическому вложению $f_0 : \overline{\mathbf{C}} \setminus \{q\} \to \overline{\mathbf{C}}$. Допустим, что множество Γ над точкой q не одноточечно, т. е. $\mathrm{diam}(\Gamma \cap (\{q\} \times \overline{\mathbf{C}})) = \delta > 0$ (в хордовой метрике). Выберем $\{a, b\} \subset \{q_1, q_2, q_3\} \setminus \{q\}$ и фиксируем такой круг B'', что $a \in B''$ и $q \notin \overline{B}''$.

Построим открытые круги $P_j \subset \overline{P}_j \subset \overline{\mathbf{C}} \setminus B''$ с хордовыми центрами в q, монотонно стягивающиеся к $\{q\}$ при $j \to \infty$. Для каждого j построим мёбиусово преобразование λ_j с неподвижной точкой a, переводящее круг $\overline{\mathbf{C}} \setminus P_j$ в $\overline{B}''$. Тогда $\lambda_j(b) \to a$ при $j \to \infty$. Так как $S_j = \partial P_j \subset \overline{B}_n$ при всех достаточно больших n, перейдя к подпоследовательности, можно считать, что $S_j \subset \overline{B}_j$ при всех j. Для графика Γf_j отображения f_j имеем неравенство $\mathrm{diam}(\Gamma f_j \cap (\overline{P}_j \times \overline{\mathbf{C}})) \leq \mathrm{diam}\, f_j(\overline{P}_j \cap \overline{B}_j) + \mathrm{diam}\, \overline{P}_j$. Поскольку $\mathrm{diam}\, \overline{P}_j \to 0$, отсюда вытекает соотношение $\liminf \mathrm{diam}\, f_j(\overline{P}_j \cap \overline{B}_j) \geq \lim \mathrm{diam}(\Gamma f_j \cap (\overline{P}_j \times \overline{\mathbf{C}})) \geq \mathrm{diam}(\Gamma \cap (\{q\} \times \overline{\mathbf{C}})) = \delta$. Поэтому для всех достаточно больших j справедлива оценка

$$\mathrm{diam}\, f_j(\overline{P}_j \cap \overline{B}_j) \geq \delta/2. \tag{$*$}$$

Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\varphi_j = f_j \circ \lambda_j^{-1}\}$ имеет графический предел Γ''. Так как $\varphi_j(a) = a$ и $\varphi_j(\lambda_j(b)) = b \neq a$, то $(a, a) \in \Gamma''$ и $(a, b) \in \Gamma''$. Следовательно, в лемме 3.1 для последовательности $\{\varphi_j\}$ реализуется случай (Y1) с $\xi_0 = a$. Это означает, что множества $\varphi_j(\lambda_j(\overline{B}_j) \setminus B'') = \varphi_j(\lambda_j(\overline{B}_j \cap \overline{P}_j)) = f_j(\overline{B}_j \cap \overline{P}_j)$ стягиваются в точку при $j \to \infty$. Но это противоречит неравенству $(*)$. Следовательно, Γ является графиком непрерывного отображения $\tilde{f}_0$, совпадающего с f_0 на $\overline{\mathbf{C}} \backslash \{q\}$. Если $\tilde{f}_0(q) = f_0(z)$ для некоторого $z \neq q$, то f_0-образы проколотых окрестностей точек q и z должны пересекаться, что противоречит инъективности f_0. Таким образом, $\tilde{f}_0$ — гомеоморфизм, и Γ — график топологического вложения. Тогда и $\Gamma' \subset \Gamma$ также является графиком топологического вложения, что и требовалось установить.

4. Доказательство теоремы 1.4 (оценка коэффициента квазиконформности). Из локальной квазиконформности f следует (см., например, [9, теорема 32.1]), что f дифференцируемо почти всюду в $D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$. Пусть z_0 — произвольная точка дифференцируемости отображения f и $T_f(z_0)$ — матрица Якоби отображения f в этой точке, осуществляющая линейное отображение $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Из дифференцируемости f в точке z_0 вытекает, что последовательность отображений $f_N(x) := N(f(z_0 + x/N) - f(z_0))$ сходится при $N \to \infty$ к L равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}^2$. На окружности $\Sigma = \{|\zeta| = 1\}$ каждое из отображений $f_N|\Sigma$ определено при достаточно больших N и, будучи композицией мёбиусовых преобразований $\tau_N(x) = z_0 + x/N$ и $s_N(w) = N(w - f(z_0))$ с ω-квазимёбиусовым вложением $f|\tau_N(\Sigma)$, является ω-квазимёбиусовым вложением. Тогда $L|\Sigma$ — равномерный предел отображений $f_N|\Sigma$ при $N \to \infty$ — также является ω-квазимёбиусовым вложением (см., например, [3, теорема 2.1.8]). Линейное отображение L переводит окружность Σ в эллипс $L(\Sigma)$ с полуосями $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$. Отметим точки $a^*, b^* \in L(\Sigma)$ с $|a^*| = \lambda_{\max}$ и $|b^*| = \lambda_{\min}$. Рассмотрев на Σ тетраду $a = L^{-1}(a^*)$, $b = L^{-1}(b^*)$, $(-a)$, $(-b)$, приходим к соотношению

$$\frac{|b^* - a^*| \cdot |(-b^*) - (-a^*)|}{|b^* - (-b^*)| \cdot |a^* - (-a^*)|} \le \omega\left(\frac{|b - a| \cdot |(-b) - (-a)|}{|b - (-b)| \cdot |a - (-a)|}\right) = \omega\left(\frac{1}{2}\right),$$

т. е.

$$\frac{\lambda_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}{4\lambda_{\max}\lambda_{\min}} \le \omega\left(\frac{1}{2}\right).$$

Тогда для $K[L] = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ получаем неравенство $(K[L] + 1/K[L]) \le 4\omega(1/2)$, из которого вытекает оценка

$$K[T_f(z_0)] = K[L] \le 2\omega(1/2) + \sqrt{4(\omega(1/2))^2 - 1}.$$

Так как эта оценка верна в любой точке дифференцируемости отображения f, т. е. почти всюду в D, для коэффициента квазиконформности локально квазиконформного отображения f получаем требуемую оценку (1.4.1). Теорема 1.4 доказана.

4.1. Следствие. *Пусть ω — функция искажения, удовлетворяющая условию*

$$\omega(1/2) \le 1/2 + \delta. \tag{4.1.1}$$

Если отображение $f : D \to \overline{\mathbf{C}}$ области $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ является ω-квазимёбиусовым на малых окружностях, то оно локально квазиконформно с оценкой

$$K[f] \le 1 + 2\delta + \sqrt{\delta + \delta^2} \tag{4.1.2}$$

для его коэффициента квазиконформности.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1.4 и оценки (1.4.1) с учетом неравенства (4.1.1).

5. Доказательство теоремы 1.7 (случай евклидовой метрики). Известно (см., например, [2, теорема 3.2] или [10, теорема 2.6]), что из η-квазисимметричности вытекает ω-квазимёбиусовость с функцией искажения ω, зависящей только от η. Поэтому f ω-квазимёбиусово на малых окружностях в D и в силу теоремы 1.4 является локально квазиконформным отображением в D. В частности, f дифференцируемо почти всюду в D.

Пусть z_0 — произвольная точка дифференцируемости отображения f и $T_f(z_0)$ — матрица Якоби в точке z_0 — осуществляет линейное преобразование $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Тогда последовательность $\{f_N := s_N \circ f \circ \tau_n\}$, где $\tau_N(\zeta) = z_0 + \zeta/N$ и $s_N(w) = N(w - f(z_0))$, сходится равномерно на компактах в $\mathbb{R}^2$ к отображению L. Так как на любой окружности $S \subset \mathbb{R}^2$ отображение $f_N|S$ есть композиция подобий (сохраняющих отношение расстояний) и η-квазисимметрического вложения $f|\tau_N(S)$, то $f_N|S$ при всех достаточно больших N является η-квазисимметрическим вложением. Тогда $L|S$, будучи равномерным пределом η-квазисимметрических вложений, также является η-квазисимметрическим вложением [6, теорема 3.7] на любой окружности $S \subset \mathbb{R}^2$.

Отображение L переводит окружность $\Sigma = \{|\zeta| = 1\}$ в эллипс с полуосями $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$. Отметим на $L(\Sigma)$ точки a^*, b^* с $|a^*| = \lambda_{\max}$ и $|b^*| = \lambda_{\min}$. Для тройки точек $0, a = L^{-1}(a^*), b = L^{-1}(b^*)$ (через эти три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность S) имеем неравенство

$$\frac{|a^* - 0|}{|b^* - 0|} \le \eta\left(\frac{|a - 0|}{|b - 0|}\right) = \eta(1),$$

из которого следует, что

$$K[T_f(z_0)] = K[L] = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{|a^* - 0|}{|b^* - 0|} \le \eta(1).$$

Так как эта оценка выполняется во всех точках z_0 дифференцируемости отображения f, оно локально квазиконформно с требуемой оценкой (1.7.1) для его коэффициента квазиконформности. Теорема 1.7 в случае евклидовой метрики доказана.

6. Доказательство теоремы 1.7 (случай хордовой метрики). Так же, как и в предыдущем случае, устанавливаем, что f ω-квазимёбиусово в хордовой метрике на малых окружностях в D, где функция искажения ω зависит лишь от η. Однако для любой тетрады в $\overline{\mathbf{C}}$ значения абсолютного двойного отношения в евклидовой и в хордовой метриках совпадают, поэтому ω-квазимёбиусовость в хордовой метрике равносильна ω-квазимёбиусовости в евклидовой метрике. Значит, отображение f ω-квазимёбиусово в евклидовой метрике на малых окружностях в D. По теореме 1.4 оно локально квазиконформно и, следовательно, почти всюду дифференцируемо в D.

Пусть $z_0 \in D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$ — точка дифференцируемости f. Построим сферические изометрии $\sigma_1, \sigma_2 : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ (отображения, сохраняющие расстояния в хордовой метрике) такие, что $\sigma_1(z_0) = 0 = \sigma_2(f(z_0))$. Отображение $g = \sigma_2 \circ f \circ \sigma_1^{-1}$ дифференцируемо в точке 0 и $g(0) = 0$. Матрицы Якоби $T_f(z_0)$ и $T_g(0)$ связаны равенством

$$T_g(0) = T_{\sigma_2}(f(z_0)) \cdot T_f(z_0) \cdot T_{\sigma_1^{-1}}(0).$$

Сферические изометрии σ_1^{-1} и σ_2 являются 1-квазиконформными отображениями. Поэтому имеем равенство коэффициентов квазиконформности

$$K[T_f(z_0)] = K[T_g(0)]. \tag{6.1}$$

В силу дифференцируемости отображения g в точке 0 последовательность $\{g_N := s_N \circ g \circ \tau_N\}$, где $s_N(w) = Nw$ и $\tau_N(\zeta) = \zeta/N$, сходится к линейному отображению $L = T_g(0)$ равномерно на компактах в $\mathbb{R}^2$. Покажем, что $L|S$ η-квазисимметрическое в евклидовой метрике на любой окружности $S \subset \mathbb{R}^2$.

Пусть $\Sigma = \{|\zeta| = R\}$. При всех достаточно больших $N > N_0$ окружность $S = \tau_N(\Sigma) = \{|z| = R/N\}$ содержится в $\sigma_1(U(z_0))$, поэтому $g|S$ определено и является η-квазисимметрическим в хордовой метрике. Так как на любой окружности с центром в 0 отношение расстояний в хордовой и в евклидовой метриках совпадают, $g|S$ η-квазисимметрическое в евклидовой метрике. Отображение $\tau_N : \Sigma \to S$ сохраняет отношение расстояний как в евклидовой, так и в хордовой метриках. Поэтому $(g \circ \tau_N)|S$ будет η-квазисимметрическим вложением в евклидовой метрике. Отображение подобия s_N сохраняет отношение расстояний в евклидовой метрике. Следовательно, $g_N = s_N \circ g \circ \tau_N$ при всех достаточно больших $N > N_0$ является η-квазисимметрическим вложением в евклидовой метрике на любой окружности в $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ с центром в точке 0.

Тогда отображение $L|\Sigma$, будучи пределом равномерно сходящейся последовательности η-квазисимметрических в евклидовой метрике вложений, также является η-квазисимметрическим вложением (см. [6, теорема 3.7]) на любой окружности $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ с центром в 0. Преобразования переноса $Q_a : \zeta \mapsto \zeta + a$ являются евклидовыми изометриями, и для любой окружности $S = \{|\zeta - a| = R\}$ имеем $S = Q_a(\Sigma)$, где $\Sigma = \{|\zeta| = R\}$. Так как $L \circ Q_a(\zeta) = L(\zeta + a) = L(\zeta) + L(a) = Q_{L(a)} \circ L(\zeta)$, отображение

$$L|S = Q_{L(a)} \circ (L|\Sigma) \circ Q_{(-a)}|S,$$

где $\Sigma = Q_{(-a)}(S)$, является η-квазисимметрическим вложением в евклидовой метрике.

Таким образом, показано, что L является η-квазисимметрическим на любой окружности $S \subset \mathbb{R}^2$ в евклидовой метрике и, значит, по доказанному выше его коэффициент квазиконформности удовлетворяет оценке $K[L] \le \eta(1)$. В силу равенства (6.1) это означает, что $K[T_f(z_0)] \le \eta(1)$ в любой точке дифференцируемости локально квазиконформного отображения f, т. е. $K[f] \le \eta(1)$. Теорема 1.7 полностью доказана.

7. Доказательство теоремы 1.10. Известно [7, теорема 1.10], что топологическое вложение обобщенной окружности, удовлетворяющее условию мёбиусовых середин с константой $\delta \in [0, 1/2)$, является ω-квазимёбиусовым с функцией искажения ω, зависящей лишь от δ. Поэтому отображение $f : D \to \overline{\mathbf{C}}$ в теореме 1.10 ω-квазимёбиусово на малых окружностях и тогда по теореме 1.4 локально квазиконформно в области D. В частности, f дифференцируемо почти всюду в D.

Возьмем произвольную точку $z_0 \in D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$ дифференцируемости отображения f. Пусть $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейное преобразование, осуществляемое матрицей Якоби $T_f(z_0)$. Последовательность $f_N := s_N \circ f \circ \tau_N$, где $\tau_N(\zeta) = z_0 + \zeta/N$ и $s_N(w) = N \cdot (w - f(z_0))$, сходится при $N \to \infty$ к L равномерно на компактах в $\mathbb{R}^2$ и, в частности, на любой окружности $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$. При этом $f_N|\Sigma = s_N \circ (f|\tau_N(\Sigma)) \circ \tau_N|\Sigma$, где окружность $\tau_N(\Sigma)$ содержится в $U(z_0)$ при всех достаточно больших $N > N_0$.

Пусть на окружности $\Sigma = \{|\zeta| = 1\}$ задана произвольная тройка попарно различных точек $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ с мёбиусовой серединой ζ_0. Тогда $\zeta_0 \in \Sigma$ и $[\zeta_0 : \zeta_2 : \zeta_1 : \zeta_3] = 1/2$. Подобие τ_N сохраняет ангармоническое отношение, поэтому $\tau_N(\zeta_0)$ есть мёбиусова середина тройки точек $\tau_N(\zeta_1), \tau_N(\zeta_2), \tau_N(\zeta_3)$ на окружности $\tau_N(\Sigma)$, которая содержится в $U(z_0)$ при всех достаточно больших $N > N_0$. В силу выполнения для f условия мёбиусовых середин на окружностях в $U(z_0)$ получаем соотношение

$$|[f(\tau_N(\zeta_0)) : f(\tau_N(\zeta_2)) : f(\tau_N(\zeta_1)) : f(\tau_N(\zeta_3))] - 1/2| \le \delta. \tag{7.1}$$

Так как подобие s_N сохраняет ангармоническое отношение, из (7.1) вытекает оценка

$$|[f_N(\zeta_0) : f_N(\zeta_2) : f_N(\zeta_1) : f_N(\zeta_3)] - 1/2| \le \delta$$

при всех $N > N_0$. Переходя к пределу в этой оценке при $N \to \infty$, получаем неравенство

$$|[L(\zeta_0) : L(\zeta_2) : L(\zeta_1) : L(\zeta_3)] - 1/2| \le \delta, \tag{7.2}$$

выполняющееся для любой тройки попарно различных точек $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \Sigma$ и их мёбиусовой середины ζ_0.

Линейное преобразование L переводит окружность Σ в эллипс с полуосями $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$. Отметим на Σ точки a и $b = ia$, у которых $|L(a)| = \lambda_{\max}$, $|L(b)| = \lambda_{\min}$. Так как $[(-b) : a : (-a) : b] = (a-b)^2/(-4ab) = (1-i)^2/(-4i) = 1/2$, то $(-b)$ есть мёбиусова середина тройки точек $(-a), a, b \in \Sigma$. В силу (7.2)

$$|[(-L(b)) : L(a) : (-L(a)) : L(b)] - 1/2| \le \delta.$$

Поскольку $L(b) = ikL(a)$, где $k = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, то

$$[(-L(b)) : L(a) : (-L(a)) : L(b)] = \frac{(1-ik)^2}{(-4ik)} = \frac{1-k^2-2ik}{(-4ik)}.$$

Тем самым получаем неравенство

$$\frac{k^2-1}{4k} = \left|\frac{1-k^2-2ik}{-4ik} - \frac{1}{2}\right| \le \delta,$$

из которого вытекает оценка

$$K[T_f(z_0)] = K[L] = \lambda_{\max}/\lambda_{\min} = k \le 2\delta + \sqrt{1+4\delta^2}. \tag{7.3}$$

Таким образом, в каждой точке $z_0 \in D$ дифференцируемости локально квазиконформного отображения f получена оценка (7.3). Это означает выполнение требуемой оценки (1.10.1) для коэффициента квазиконформности $K[f]$. Теорема доказана.

8. Обращение теорем 1.4 и 1.7. Наличие свойства квазисимметричности (квазимёбиусовости) на малых окружностях у локально квазиконформного отображения области $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ устанавливается значительно проще. Имеет место

8.1. Теорема. *Любое локально квазиконформное отображение $f : D \to \overline{\mathbf{C}}$ с $K[f] \le Q$ является*

(1) *η-квазисимметрическим в евклидовой метрике на малых окружностях в D;*

(2) *ω-квазисимметрическим в хордовой метрике на малых окружностях в D;*

(3) *ω^*-квазимёбиусовым на малых окружностях в D.*

При этом функции искажения η, ω и ω^* зависят только от Q.

Доказательство п. (1). В силу локальной квазиконформности у каждой точки $z_0 \in D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$ имеется окрестность $U(z_0) \subset D$, в которой отображение f квазиконформно. Возьмем круг $B(z_0, r(z_0))$ такой, что $B(z_0, 2r(z_0)) \subset U(z_0) \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$. Известно (см. [11, теорема 2.4]), что тогда отображение f η-квазисимметрическое в евклидовой метрике в круге $B(z_0, r(z_0))$ с функцией искажения η, зависящей только от Q. Тогда и ограничение $f|\Sigma$ на любой окружности $\Sigma \subset B(z_0, r(z_0))$ будет η-квазисимметрическим вложением в евклидовой метрике. Это означает, что f в D является η-квазисимметрическим в евклидовой метрике на малых окружностях.

Доказательство п. (2). У каждой точки $z_0 \in D$ есть окрестность $U(z_0) \subset D$, в которой f является Q-квазиконформным гомеоморфизмом. Сферические изометрии $\sigma_1, \sigma_2 : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$, у которых $\sigma_2(z_0) = 0 = \sigma_1(f(z_0))$, являются конформными преобразованиями, поэтому отображение $g := \sigma_1 \circ f \circ \sigma_2^{-1}$, $g(0) = 0$, также

Q-квазиконформно в области $\sigma_2(U(z_0))$. Тогда по доказанному в п. (1) найдется круг $B(0,r) \subset \sigma_2(U(z_0))$, в котором g является η-квазисимметрическим в евклидовой метрике на любой окружности с функцией искажения η, зависящей лишь от Q. Выберем $\rho > 0$ так, чтобы $\rho < \min\{1, r\}$ и $g(B(0,\rho)) \subset B(0,1)$. Заметим, что для любых точек $x, y \in B(0,1)$ верно следующее соотношение между евклидовым $|x-y|$ и хордовым $h(x,y)$ расстояниями:

$$\frac{|x-y|}{2} \le h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\cdot\sqrt{1+|y|^2}} \le |x-y|.$$

Поэтому для любой тройки попарно различных точек z_1, z_2, z_3 на окружности $\Sigma \subset B(0,\rho)$ имеем оценку

$$\frac{h(g(z_1),g(z_3))}{h(g(z_2),g(z_3))} \le 2\frac{|g(z_1)-g(z_3)|}{|g(z_2)-g(z_3)|} \le 2\eta\left(\frac{|z_1-z_3|}{|z_2-z_3|}\right) \le 2\eta\left(2\frac{h(z_1,z_3)}{h(z_2,z_3)}\right).$$

Значит, $g|\Sigma$ является ω-квазисимметрическим в хордовой метрике с функцией искажения $\omega(t) = 2\eta(2t)$, зависящей лишь от Q. Так как σ_1^{-1} и σ_2 сохраняют расстояния в хордовой метрике и переводят окружности в окружности, то $f = \sigma_1^{-1}\circ g\circ\sigma_2$ является ω-квазисимметрическим в хордовой метрике на окружностях в $\sigma_2^{-1}(B(0,\rho))$ — окрестности точки z_0. В силу произвольного выбора точки $z_0 \in D$ это дает требуемое утверждение (2).

Доказательство п. (3). В силу п. (2) этой теоремы f является ω-квазисимметрическим в хордовой метрике на малых окружностях в D с ω, зависящим лишь от Q. Так как ω-квазисимметричность влечет ω^*-квазимёбиусовость с функцией искажения ω^*, зависящей только от ω (см. [2, теорема 3.2]), то f ω^*-квазимёбиусово на малых окружностях в D с функцией искажения ω^*, зависящей в итоге только от Q.

Теорема полностью доказана.

8.2. Замечание. Конформное отображение $f : B \to G$ круга $B \subset \mathbf{C}$ на область, граница которой не является кривой с ограниченным искривлением, существует по теореме Римана, но не может быть квазимёбиусовым, так как любое квазимёбиусово отображение продолжается на ∂B и должно переводить окружность ∂B в жорданову кривую с ограниченным искривлением. Однако в силу теоремы 8.1 это конформное отображение ω-квазимёбиусово на малых окружностях в B. Этот пример показывает, что в теореме 1.4 даже в случае гомеоморфизма f из условия его ω-квазимёбиусовости на малых окружностях в D не следует квазимёбиусовости f на всей области D.

Автор глубоко признателен рецензенту, тщательно проанализировавшему содержание работы и предложившему изменения в доказательстве основной теоремы 1.4, позволившие существенно сократить объем этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асеев В. В.* Квазисимметрические вложения и ОИМ-гомеоморфизмы жордановых дуг и кривых // Ред. Сиб. мат. журн. Деп. ВИНИТИ 18.03.84 №3209-84, Новосибирск, 1984, 33 с.

2. *Väisälä J.* Quasimöbius maps // J. Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.

3. *Aseev V. V.* Quasisymmetric embeddings // J. Math. Sci. 2002. V. 108, N 3. P. 375–410.

4. *Beurling A., Ahlfors L.* The boundary correspondence under quasi-conformal mappings // Acta Math. 1956. V. 96. P. 125–142.

5. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
6. *Tukia P., Väisälä J.* Quasisymmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A1 Math. 1980. V. 5. P. 153–175.
7. *Асеев В. В.* Условие мёбиусовых середин как признак квазиконформности и квазимёбиусовости // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 38–58.
8. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.
9. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).
10. *Асеев В. В., Троценко Д. А.* Квазисимметрические вложения, четверки точек и искажение модулей // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 32–38.
11. *Väisälä J.* Quasisymmetric embeddings in Euclidean spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 264, N 1. P. 191–204.

Статья поступила 11 ноября 2011 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru