Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ, У КОТОРЫХ ВСЕ n–МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ $\mathfrak{U}$–СУБНОРМАЛЬНЫ

В. А. Ковалева, А. Н. Скиба

Аннотация. Описываются конечные разрешимые группы, все n-максимальные подгруппы которых являются $\mathfrak{U}$-субнормальными.

Ключевые слова: n-максимальная подгруппа, разрешимая группа, сверхразрешимая группа, минимальная несверхразрешимая группа, $\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа.

К 70-летию Виктора Даниловича Мазурова

§ 1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны. Символ $\pi(G)$ обозначает множество простых делителей порядка группы G, символ $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп.

Напомним, что $\mathfrak{U}$-*корадикалом группы* G называется пересечение всех таких нормальных подгрупп N из G, что $G/N \in \mathfrak{U}$; $\mathfrak{U}$-корадикал группы G обозначают символом $G^{\mathfrak{U}}$.

Пусть ϕ — некоторое упорядочение простых чисел. Запись $p\phi q$ означает, что p предшествует q в упорядочении ϕ, $p \neq q$. Напомним, что группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ называется ϕ-*дисперсивной*, если $p_1 \phi p_2 \phi \dots \phi p_n$ и для любого i группа G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$. Если при этом упорядочение ϕ таково, что $p\phi q$ всегда влечет $p > q$, то ϕ-дисперсивная группа называется *дисперсивной по Оре*.

Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-*максимальной* (*второй максимальной*) *подгруппой в* G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, и т. д.

Одним из интересных и содержательных направлений в теории конечных групп является исследование связи между структурой группы и ее n-максимальными подгруппами ($n > 1$). Одним из наиболее ранних результатов в данном направлении является работа Хупперта [1], установившего сверхразрешимость группы, в которой все вторые максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт доказал, что если все 3-максимальные подгруппы группы G нормальны в G, то коммутант G' группы G является нильпотентной группой и главный ранг группы G не превосходит 2. Эти два результата получили развитие в работах многих авторов. Среди недавних результатов о n-максимальных подгруппах ($n > 1$) можно отметить работы [2], где доказана разрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования, [3–5], в которых получены новые характеризации сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. В [6] дана классификация ненильпотентных групп, все 2-максимальные подгруппы которых являются TI-подгруппами. В [7] получено описание групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами. В [8] описаны ненильпотентные группы, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны, в [9] — группы, у которых все 3-максимальные подгруппы являются S-квазинормальными, т. е. перестановочными со всеми силовскими подгруппами. В дальнейшем этот результат был усилен в [10], где были описаны группы, все 3-максимальные подгруппы которых субнормальны.

Несмотря на все эти и многие другие известные результаты о n-максимальных подгруппах, по-прежнему не потеряла свое значение фундаментальная статья Манна [11], где изучалось строение групп, у которых n-максимальные подгруппы субнормальны. Манн доказал, что если все n-максимальные подгруппы разрешимой группы G субнормальны и $|\pi(G)| \geq n+1$, то G нильпотентна; если же $|\pi(G)| \geq n-1$, то G является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества всех простых чисел. Наконец, в случае, когда $|\pi(G)| = n$, Манн привел полное описание группы G.

Сверхразрешимым аналогом субнормальных подгрупп является понятие $\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппы. Напомним, что подгруппа H разрешимой группы G называется *$\mathfrak{U}$-субнормальной в G*, если либо $H = G$, либо найдется такая цепь $H = H_0 < \cdots < H_n = G$, что $|H_i/H_{i-1}|$ — простое число для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Основной целью данной работы является доказательство следующих сверхразрешимых аналогов теорем Манна, упомянутых выше.

Теорема A. *Если каждая n-максимальная подгруппа разрешимой группы G $\mathfrak{U}$-субнормальна в G и $|\pi(G)| \geq n+2$, то G сверхразрешима.*

Теорема B. *Пусть G — разрешимая группа с $|\pi(G)| \geq n+1$. Тогда все n-максимальные подгруппы G $\mathfrak{U}$-субнормальны в G в том и только в том случае, когда G является группой одного из следующих типов.*

I. *G сверхразрешима.*

II. *$G = A \rtimes B$, где $A = G^{\mathfrak{U}}$ и B — холловы подгруппы в G, G дисперсивна по Оре и выполняются следующие условия:*

(1) *подгруппа A либо имеет вид $N_1 \times \cdots \times N_t$ ($t \geq 2$), где N_i — минимальная нормальная подгруппа в G, являющаяся силовской подгруппой в G ($i = 1, \ldots, t$), либо является силовской p-подгруппой в G экспоненты p для некоторого простого числа p, причем коммутант, подгруппа Фраттини и центр группы A совпадают, каждый главный фактор группы G ниже $\Phi(A)$ является циклическим, а $P/\Phi(A)$ — нециклический главный фактор группы G;*

(2) *для каждого простого делителя p порядка группы A любая n-максимальная подгруппа H из G сверхразрешима и индуцирует на силовской p-подгруппе из A группу автоморфизмов, являющуюся расширением некоторой p-группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$.*

Теорема C. *Если каждая n-максимальная подгруппа разрешимой группы G $\mathfrak{U}$-субнормальна в G и $|\pi(G)| \geq n$, то G является ϕ-дисперсивной для* *некоторого упорядочения ϕ множества всех простых чисел.*

В статье используются стандартные обозначения, которые при необходимости можно найти в книге [12].

§ 2. Предварительные результаты

Напомним, что максимальная подгруппа H группы G называется $\mathfrak{U}$-*нормальной в* G, если $G/H_G \in \mathfrak{U}$; в противном случае подгруппа H называется $\mathfrak{U}$-*абнормальной в* G. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{U}$-*субнормальной в* G, если либо $H = G$, либо найдется такая цепь $H = H_0 < \dots < H_n = G$, что H_{i-1} — $\mathfrak{U}$-нормальная максимальная подгруппа в H_i для всякого $i = 1, 2, \dots, n$.

Следующие результаты будут использованы в данной работе.

Лемма 2.1. *Пусть G — группа и H — $\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа в G.*

(1) *Если $K \leq G$, то $H \cap K$ является $\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппой в K* [13, *лемма* 6.1.7(2)].

(2) *Если N — нормальная подгруппа в G, то HN/N — $\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа в G/N* [13, *лемма* 6.1.6(3)].

(3) *Если $K \leq G$ и K $\mathfrak{U}$-субнормальна в H, то K $\mathfrak{U}$-субнормальна в G* [13, *лемма* 6.1.6(1)].

(4) *Если K — подгруппа из G и $G^{\mathfrak{U}} \leq K$, то K $\mathfrak{U}$-субнормальна в G* [13, *лемма* 6.1.7(1)].

Лемма 2.2 [12, теорема 15.10]. *Пусть G — группа с нильпотентным сверхразрешимым корадикалом. Пусть H и M — подгруппы из G такие, что $H \in \mathfrak{U}$, $H \leq M$, $HF(G) = G$. Если H $\mathfrak{U}$-субнормальна в M, то $M \in \mathfrak{U}$.*

Лемма 2.3 [12, следствие 4.14.1]. *Пусть группа G имеет четыре сверхразрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты. Тогда G сверхразрешима.*

Лемма 2.4 [12, гл. VI, теорема 24.2]. *Пусть G — разрешимая группа. Если $G^{\mathfrak{U}} \neq 1$ и каждая $\mathfrak{U}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{U}$, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *$G^{\mathfrak{U}}$ является p-группой для некоторого простого числа p;*

(2) *$G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — нециклический главный фактор группы G;*

(3) *если группа $G^{\mathfrak{U}}$ неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p;*

(4) *если $G^{\mathfrak{U}}$ абелева, то она элементарна;*

(5) *если $p > 2$, то $G^{\mathfrak{U}}$ имеет экспоненту p; при $p = 2$ экспонента $G^{\mathfrak{U}}$ не превышает 4;*

(6) *любые две $\mathfrak{U}$-абнормальные максимальные подгруппы группы G сопряжены в G.*

Напомним, что минимальной несверхразрешимой группой называется несверхразрешимая группа, все собственные подгруппы которой сверхразрешимы.

Лемма 2.5 [12, гл. VI, теоремы 26.3, 26.5]. *Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *G разрешима и $|\pi(G)| \leq 3$;*

(2) *если G не является группой Шмидта, то G дисперсивна по Оре;*

(3) *$G^{\mathfrak{U}}$ является единственной нормальной силовской подгруппой в G;*

(4) *если S — дополнение к $G^{\mathfrak{U}}$ в G, то $S/S \cap \Phi(G)$ либо примарная циклическая группа, либо группа Миллера — Морено.*

§ 3. Группы, все вторые максимальные подгруппы которых $\mathfrak{U}$-субнормальны

Доказательства теорем A, B и C базируются на свойствах групп, у которых все 2-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны. Такие группы описаны в данном параграфе.

Напомним, что *максимальной цепью длины n (n-максимальной цепью) группы* G называется всякая цепь вида $E_n < E_{n-1} < \cdots < E_1 < E_0 = G$, где E_i является максимальной подгруппой в E_{i-1}, $i = 1, \ldots, n$. Подгруппа H группы G называется *строго n-максимальной подгруппой в* G, если H является n-максимальной подгруппой в G, но не является n-максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе группы G. Максимальная цепь $E_n < E_{n-1} < \cdots < E_1 < E_0 = G$ называется *строго n-максимальной*, если E_i является строго i-максимальной подгруппой группы G для всех $i = 1, \ldots, n$.

В [14] Асаад, усиливая полученные Хуппертом результаты [1], рассмотрел влияние строго n-максимальных подгрупп ($n = 2, 3, 4$) на строение группы. В частности, им было доказано, что если все строго 2-максимальные подгруппы нормальны, то группа сверхразрешима. В [15] Спенсер изучал такие группы G, в которых каждая n-максимальная цепь содержит по крайней мере одну субнормальную в G подгруппу. В частности, им было доказано, что если каждая максимальная цепь длины два группы G содержит субнормальную в G подгруппу, то G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. В данном параграфе изучаем группы, в каждой строго 2-максимальной цепи которых существует собственная $\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа.

Заметим, что если группа G сверхразрешима, то каждая ее подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна.

Теорема 3.1. *Пусть G — несверхразрешимая группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$G = P \rtimes M$, где $P = G^{\mathfrak{U}}$ — минимальная нормальная подгруппа в G, $|P| = p^{\alpha}$ и M — группа одного из следующих видов:*

(i) *M — циклическая группа порядка q^a для некоторого простого q и q^{a-1} делит $p-1$,*

(ii) *$M = Q \rtimes R$, где $|Q| = q$ делит $p-1$ и $|R| = r^b$ делит $p-1$ для некоторых простых чисел q и r, R — циклическая группа и $Q \not\leq C_G(P)$;*

(2) *каждая 2-максимальная подгруппа группы G $\mathfrak{U}$-субнормальна в G;*

(3) *в каждой строго максимальной цепи длины два группы G имеется собственная $\mathfrak{U}$-субнормальная в G подгруппа.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $G = P \rtimes M$, где $P = G^{\mathfrak{U}}$ — минимальная нормальная подгруппа в G, $|P| = p^{\alpha}$ и M — группа вида (i). Тогда G содержит в точности два класса максимальных сопряженных подгрупп, представителями которых являются M и PM_1, где M_1 — максимальная подгруппа в M. Так как M — циклическая группа порядка q^a и q^{a-1} делит $p-1$, то M и PM_1 сверхразрешимы. Поэтому G — минимальная несверхразрешимая группа и все подгруппы из PM_1 $\mathfrak{U}$-субнормальны в PM_1. Поскольку $|G : PM_1| = q$, то PM_1 $\mathfrak{U}$-нормальна в G, поэтому по лемме 2.1(3) все подгруппы из PM_1 $\mathfrak{U}$-субнормальны в G. Пусть T — произвольная максимальная подгруппа из M. Тогда PT — максимальная нормальная подгруппа в G, PT сверхразрешима и $|G : PT| = q$. Следовательно, все подгруппы из PT являются $\mathfrak{U}$-субнормальными в G, поэтому T $\mathfrak{U}$-субнормальна в G.

Пусть теперь M является группой вида (ii). Тогда G содержит в точности три класса максимальных сопряженных подгрупп, представителями которых являются M, PR и PQR_1, где R_1 — максимальная подгруппа из R. Понятно, что подгруппы M, PR, PQR_1 сверхразрешимы. Так как $|G : PR| = q$ и $|G : PQR_1| = r$, то PR и PQR_1 $\mathfrak{U}$-нормальны в G, поэтому все их максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны в G. Кроме того, так же, как и выше, получаем, что всякая максимальная подгруппа из M является $\mathfrak{U}$-субнормальной G.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

(3) $\Rightarrow$ (1) Сначала покажем, что все максимальные подгруппы с непростым индексом из G сверхразрешимы. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G, у которой индекс $|G : M|$ не является простым числом, и T — произвольная максимальная подгруппа в M. Допустим, что T не является строго 2-максимальной подгруппой в G. Это означает, что существует по крайней мере одна максимальная цепь подгрупп G_i группы G $(0 \leq i \leq n)$ такая, что $T = G_r$ для $r \geq 3$ и группа G_i максимальна в G_{i-1}. Среди всех таких цепей группы G выберем цепь наибольшей длины $T = G_r < \cdots < G_2 < G_1 < G_0 = G$. В этом случае группа G_2 является строго 2-максимальной подгруппой в G. Так как $T \leq M$ и $T \leq G_2$, то $T \leq G_2 \cap M$. Если $G_2 \cap M = 1$, то $T = 1$ и $|M| = p$ для некоторого простого числа p. Следовательно, в этом случае получаем, что группа M сверхразрешима.

Пусть теперь $G_2 \cap M \neq 1$ и G_1 $\mathfrak{U}$-нормальна в G. Если $T < G_1 \cap M$, то ввиду максимальности подгруппы T в M получаем, что $G_1 \cap M = M$, откуда $G_1 = M$. Поскольку согласно предположению подгруппа G_1 $\mathfrak{U}$-нормальна в G, индекс $|G : M|$ является простым числом, что противоречит выбору подгруппы M. Значит, $T = G_1 \cap M$. Следовательно, T $\mathfrak{U}$-субнормальна в M по лемме 2.1(1), так что $|M : T|$ — простое число. Если же G_1 не является $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппой в G, то согласно условию подгруппа G_2 $\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Если $T < G_2 \cap M$, то $G_2 \cap M = M$ ввиду максимальности T в M, поэтому $G_2 = M$, что противоречит максимальности подгруппы M. Значит, $T = G_2 \cap M$, T $\mathfrak{U}$-нормальна в M по лемме 2.1(1), и $|M : T|$ — простое число. В силу произвольности T получаем, что все максимальные подгруппы из M имеют в M простые индексы, стало быть. M — сверхразрешимая группа. Следовательно, в группе G все максимальные подгруппы непростого индекса сверхразрешимы.

Покажем теперь, что группа G разрешима. Предположим, что это не так, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G и $H/N < T/N < G/N$ — строго 2-максимальная цепь в G/N. Тогда $H < T < G$ является строго 2-максимальной цепью в G, поэтому согласно условию либо H, либо T $\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Следовательно, по лемме 2.1(2) либо H/N, либо T/N $\mathfrak{U}$-субнормальна в G/N. Значит, ввиду выбора группы G группа G/N разрешима. Поэтому N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, $N \nleq \Phi(G)$ и N не абелева. Следовательно, по теореме Бернсайда о разрешимости бипримарных групп найдется такой простой делитель p порядка группы N, что $p \geq 5$. Пусть N_p — произвольная силовская p-подгруппа из N. Тогда для некоторой силовской p-подгруппы P группы G

имеет место $N_p \leq P$, что влечет $N_p = P \cap N$. Значит, $P \leq N_G(N_p)$. Поскольку N — неабелева группа, в G существует такая максимальная подгруппа M, что $N_G(N_p) \leq M$, $N_p \leq P \leq M$, откуда $G = NN_G(N_p) = NM$ и, следовательно, $N \nleq M$.

Предположим, что $N \cap M \nleq \Phi(M)$. Тогда найдется такая максимальная в M подгруппа T, что $(N \cap M)T = M$. Поэтому $G = NM = N(N \cap M)T = NT$. Предположим, что T не является строго 2-максимальной подгруппой в G. Тогда в G имеется отличная от M максимальная подгруппа V такая, что T — собственная немаксимальная подгруппа в V. Пусть L — максимальная подгруппа из V такая, что $T \leq L$ и L является строго 2-максимальной подгруппой в G. Предположим, что V $\mathfrak{U}$-нормальна в G. Тогда $G/V_G \in \mathfrak{U}$, откуда $V_G \neq 1$. Тогда $N \leq V_G$ и $G = NV \leq V$, что противоречит выбору подгруппы V. Значит, L $\mathfrak{U}$-субнормальна в G, что так же, как и выше, приводит к противоречию. Следовательно, T является строго 2-максимальной подгруппой в G.

По условию теоремы либо T либо M является $\mathfrak{U}$-субнормальной в G. В каждом из этих случаев, как и выше, приходим к противоречию. Значит, $N \cap M \leq \Phi(M)$, поэтому подгруппа $N \cap M$ нильпотентна. Следовательно, $N_N(N_p) = N_G(N_p) \cap N \leq M \cap N$, что влечет нильпотентность подгруппы $N_N(N_p)$. Но тогда $O^p(N) \neq N$ по [16, гл. X, теорема 8.13]. Следовательно, у группы N имеется абелев композиционный фактор, и N — абелева группа. Полученное противоречие завершает доказательство разрешимости группы G.

Так как группа G разрешима, по лемме 2.4 получаем, что справедливы следующие утверждения:

(a) $P = G^{\mathfrak{U}}$ — s-группа для некоторого простого делителя s порядка группы G;

(b) $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы G и $|P/\Phi(P)| > s$.

(c) все максимальные подгруппы непростого индекса из G сопряжены в G.

Пусть M — максимальная подгруппа непростого индекса из G. Тогда M не $\mathfrak{U}$-субнормальна в G, поэтому $P \nleq M$ по лемме 2.1(4), что влечет $G = PM$. Так как $|G : M| = |P/\Phi(P)|$ не является простым числом, то, как показано выше, M — сверхразрешимая группа. Предположим, что $\Phi(P) \neq 1$. Тогда ввиду сверхразрешимости группы M в ней имеется такая максимальная подгруппа T, что $|M : T| = s$. Как и при доказательстве разрешимости группы G, можно показать, что T является строго 2-максимальной подгруппой в G. По условию теоремы T $\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Следовательно, в G найдется такая максимальная подгруппа L, что $T \leq L$ и $G/L_G \in \mathfrak{U}$. Но тогда $P = G^{\mathfrak{U}} \leq L_G$, откуда следует, что $G = PT = L$. Полученное противоречие показывает, что $\Phi(P) = 1$, поэтому согласно (b) P — минимальная нормальная подгруппа в G и $G = P \rtimes M$. Пусть D — максимальная подгруппа из G такая, что $P \leq D$. Тогда $D = P \rtimes (D \cap M)$, где $D \cap M$ — максимальная в M подгруппа. Как и выше, можно показать, что $D \cap M$ является строго 2-максимальной подгруппой в G, поэтому $D \cap M$ $\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Так как M сверхразрешима, $D \cap M$ сверхразрешима и по лемме 2.2 D сверхразрешима. Следовательно, все максимальные подгруппы из G сверхразрешимы. Значит, G — минимальная несверхразрешимая группа, стало быть, утверждения (1)(i) и (1)(ii) вытекают из леммы 2.5. Теорема доказана.

Нетрудно проверить, что упомянутые выше результаты Асаада и Спенсера являются следствиями теоремы 3.1.

§ 4. Доказательства теорем A, B и C

Доказательство теоремы A. Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа из G. Тогда согласно условию все $(n-1)$-максимальные подгруппы из M $\mathfrak{U}$-субнормальны в G, а значит, они $\mathfrak{U}$-субнормальны в M по лемме 2.1(1). Так как при этом ввиду разрешимости группы G либо $|\pi(M)| = |\pi(G)|$, либо $|\pi(M)| = |\pi(G)| - 1$, то M сверхразрешима по выбору группы G. Значит, G является минимальной несверхразрешимой группой. Тогда по лемме 2.5 $|\pi(G)| = 3$. Следовательно, все максимальные подгруппы группы G $\mathfrak{U}$-нормальны, поэтому группа G сверхразрешима, что противоречит выбору этой группы. Теорема доказана.

Доказательство теоремы B. Необходимость. Сначала покажем, что если N — минимальная нормальная подгруппа в G, то условие теоремы сохраняется для G/N. Действительно, если N не является силовской подгруппой группы G, то $|\pi(G/N)| = |\pi(G)|$. Кроме того, если H/N — n-максимальная подгруппа в G/N, то H является n-максимальной подгруппой в G, поэтому H $\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Следовательно, H/N $\mathfrak{U}$-субнормальна в G/N по лемме 2.1(2). Если же в G/N нет n-максимальных подгрупп, то ввиду разрешимости группы G единичная подгруппа из G/N $\mathfrak{U}$-субнормальна в G/N и является при некотором $i < n$ единственной i-максимальной подгруппой в G/N, где $i < |\pi(G/N)|$. Таким образом, и в этом случае условие теоремы верно для G/N. Рассмотрим, наконец, случай, когда N — силовская p-подгруппа в G. Тогда по теореме Шура — Цассенхауза группа G имеет холловскую p'-подгруппу E. Понятно, что $|\pi(E)| = |\pi(G)| - 1$ и E — максимальная в G подгруппа. Поэтому все $(n-1)$-максимальные подгруппы из E $\mathfrak{U}$-субнормальны в E по лемме 2.1(1). Таким образом, в силу индукции по $|G|$, можно считать, что G/N либо сверхразрешима, либо является группой, удовлетворяющей условию II.

Предположим, что группа G не сверхразрешима. Покажем, что в этом случае G — группа, удовлетворяющая условию II. Предположим, что это не так, и пусть G — контрпример минимального порядка. Заметим прежде, что $|\pi(G)| > 2$. Действительно, если $|\pi(G)| = 2$, то по условию все максимальные подгруппы из G $\mathfrak{U}$-нормальны, что влечет сверхразрешимость группы G.

Пусть $A = G^{\mathfrak{U}}$.

(a) *G дисперсивна по Оре, и A — нильпотентная группа.*

Пусть N — произвольная минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда G/N дисперсивна по Оре и $(G/N)^{\mathfrak{U}}$ — нильпотентная группа. Известно, что класс всех дисперсивных по Оре групп является насыщенной формацией, поэтому N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $N \nleq \Phi(G)$. Следовательно, в G имеется такая максимальная подгруппа L, что $G = N \rtimes L$, где $L_G = 1$. Стало быть, $C_G(N) = N$.

Сначала покажем, что группа G дисперсивна по Оре. Так как G разрешима, в G найдется нормальная максимальная подгруппа M, $|G : M| = p$ для некоторого простого p и либо $|\pi(M)| = |\pi(G)|$, либо $|\pi(M)| = |\pi(G)| - 1$. Поскольку все $(n-1)$-максимальные подгруппы из M $\mathfrak{U}$-субнормальны в M по лемме 2.1(1), условие теоремы остается справедливым для M, поэтому M дисперсивна по Оре в силу выбора группы G. Пусть q — наибольшее число из $\pi(M)$, M_q — силовская q-подгруппа из M и P — силовская p-подгруппа из G. Так как M_q характеристична в M, то M_q нормальна в G. Сначала рассмотрим случай, когда $|\pi(M)| = |\pi(G)|$. Тогда q — наибольший простой делитель порядка группы G и $M_q \neq 1$. Тем самым G/M_q дисперсивна по Оре, поэтому ввиду максимальности q группа G также дисперсивна по Оре. Теперь предположим, что $|\pi(M)| = |\pi(G)| - 1$. Если $q > p$, то, как и выше, заключаем, что G также дисперсивна по Оре. Следовательно, $p > q$, и поэтому p является наибольшим простым делителем порядка группы G. Так как $M_q \neq 1$, то $N \leq M_q$. Следовательно, N — q-группа. Кроме того, поскольку, как мы уже установили, $|\pi(G)| > 2$, для некоторого простого делителя r порядка G имеем $q \neq r \neq p$. Пусть W — холловская r'-подгруппа в G. Тогда $PN \leq W$, $|\pi(W)| = |\pi(G)| - 1$ и всякая $(n-1)$-максимальная подгруппа из W $\mathfrak{U}$-субнормальна в W. Следовательно, W — дисперсивная по Оре группа в силу выбора группы G. Значит, P нормальна в G, поэтому $P \leq C_G(N) \leq N$. Полученное противоречие показывает, что группа G дисперсивна по Оре.

Покажем, что A — нильпотентная группа. Если $|\pi(G)| = 3$, то по условию либо все максимальные подгруппы из G, либо все ее 2-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны в G. Но в первом случаем получаем, что группа G сверхразрешима, что противоречит нашему предположению о G. Значит, все 2-максимальные подгруппы группы G $\mathfrak{U}$-субнормальны, поэтому по теореме 3.1 G — минимальная несверхразрешимая группа с абелевым сверхразрешимым корадикалом A. Таким образом, поскольку $|\pi(G)| > 2$, осталось лишь рассмотреть случай, когда $|\pi(G)| \geq 4$. Пусть N является p-группой и P — некоторая силовская p-подгруппа из G. Заметим, что если $N \neq P$, то ввиду теоремы A подгруппа L сверхразрешима, поэтому A нильпотентна. Значит, $N = P$.

Пусть $|\pi(G)| = 4$. Тогда поскольку G не сверхразрешима, либо все 2-максимальные подгруппы из G, либо все ее 3-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны в G. Поэтому все вторые максимальные подгруппы группы G сверхразрешимы. Следовательно, L является либо сверхразрешимой группой, либо минимальной несверхразрешимой группой. Но в первом случае $\mathfrak{U}$-корадикал группы G нильпотентен. Поэтому нам необходимо лишь рассмотреть случай, когда L — минимальная несверхразрешимая группа.

В этом случае $L = Q \rtimes (R \rtimes T)$, где $Q = L^{\mathfrak{U}}$ — нециклическая q-группа, являющаяся минимальной нормальной подгруппой в L, R — группа простого порядка r, делящего $q-1$, и $Q \nleq C_G(P)$. Пусть $V = PQR$. Тогда V не является минимальной несверхразрешимой группой по теореме 3.1. Значит, V — сверхразрешимая группа. Заметим, что $F(V)$ характеристична в V и V нормальна в G. Следовательно, $F(V)$ нормальна в G, и поэтому всякая ее силовская подгруппа нормальна в G. Но N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Стало быть, $F(V) = N = P$. Значит, $V/P \simeq QR$ — абелева группа, поэтому $R \leq C_L(Q)$. Это противоречие показывает, что при $|\pi(G)| = 4$ подгруппа $G^{\mathfrak{U}}$ нильпотентна.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $|\pi(G)| > 4$. Тогда если $\pi(L) = \{p_1, \ldots, p_t\}$, то $t > 3$. Пусть E_i — холловская p_i'-подгруппа группы G. Тогда E_i либо сверхразрешимая группа, либо является минимальной несверхразрешимой группой. Но во втором случае $|\pi(E_i)| \leq 3$ по лемме 2.5, поэтому $|\pi(G)| \leq 4$, что противоречит рассматриваемому случаю. Значит, E_i — сверхразрешимая группа, и ввиду леммы 2.3 группа G сверхразрешима.

(b) *A является холловой подгруппой в G.*

Согласно (a) группа G дисперсивна по Оре. Следовательно, для наибольшего простого делителя r порядка этой группы силовская r-подгруппа R нормальна в G.

Так как по (a) подгруппа A нильпотентна, то $A \leq F(G)$. Предположим, что G содержит две минимальные нормальные подгруппы H и K такие, что H — p-группа и K — q-группа, где $p \neq q$. Не нарушая общности доказательства, можно предполагать, что $H \leq A$. Как показано выше, условие теоремы сохраняется для G/K и $(G/K)^{\mathfrak{U}} = G^{\mathfrak{U}}K/K = AK/K$, стало быть, AK/K — холлова подгруппа в G/K. Пусть A_p — силовская p-подгруппа из A. Тогда KA_p/K — силовская p-подгруппа в AK/K, поэтому KA_p/K — силовская p-подгруппа в G/K. Следовательно, A_p — силовская p-подгруппа в G. Предположим, что $A_p \neq A$ и A_t — силовская t-подгруппа в A, где $t \neq p$. Рассмотрев фактор-группу G/H, видим, что A_t — силовской t-подгруппа в G. Поэтому A является холловой подгруппой в G. Рассмотрим теперь случай, когда все минимальные нормальные подгруппы из G являются p-группами и $p = r$. Тогда $F(G) = P$ — силовская p-подгруппа в G, поэтому $A \leq P$. Если $H \neq A$, то, используя те же аргументы, что и выше, видим, что A является силовской p-подгруппой в G. Следовательно, можно положить $H = A$. Если $\Phi = \Phi(P) \neq 1$, то $\Phi A/\Phi = \Phi G^{\mathfrak{U}}/\Phi = (G/\Phi)^{\mathfrak{U}}$ — холлова подгруппа в G/Φ. Если $H \leq \Phi$, то G/Φ — нильпотентная группа. Но P нормальна в G, так что $\Phi \leq \Phi(G)$. Это показывает, что G нильпотентна, тем самым $H = A = G^{\mathfrak{U}} = 1$, что противоречит предположению о G. Следовательно, $H \nleq \Phi$, поэтому $H\Phi/\Phi$ — неединичная p-группа. Отсюда $H\Phi = P$, стало быть, $H = P$. Полученное противоречие показывает, что $\Phi(P) = 1$. По теореме Машке $P = N_1 \times \cdots \times N_k$ — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы G. Если $N_1 \neq P$, то G/N_1 и G/N_2 сверхразрешимы. Следовательно, группа G также сверхразрешима. Это противоречие показывает, что $A = G^{\mathfrak{U}}$ является холловой подгруппой в G.

(c) *Подгруппа A либо имеет вид $N_1 \times \cdots \times N_t$ $(t \geq 2)$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа в G, представляющая собой силовскую подгруппу в G $(i = 1, \ldots, t)$, либо является силовской p-подгруппой в G экспоненты p для некоторого простого делителя p порядка группы G, причем коммутант, подгруппа Фраттини и центр группы A совпадают, каждый главный фактор группы G ниже $\Phi(A)$ является циклическим, а $P/\Phi(A)$ — нециклический главный фактор группы G.*

Пусть P — силовская p-подгруппа из A, где p делит $|A|$. Ввиду утверждений (a) и (b) P является нормальной силовской подгруппой в G. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G такая, что $N \leq P$. Сначала предположим, что $N \leq \Phi(G)$, и пусть M — максимальная подгруппа из G такая, что $P \nleq M$. Тогда M сверхразрешима по теореме A, поэтому $G/P \simeq M/M \cap P$ — сверхразрешимая группа. В этом случае $A = P$ и каждая не содержащая P максимальная подгруппа из G сверхразрешима. Заметим также, что каждая максимальная подгруппа из G, содержащая P, $\mathfrak{U}$-нормальна. Таким образом, ввиду леммы 2.4 подгруппа $A = G^{\mathfrak{U}}$ удовлетворяет условию II(1).

Предположим, что любая минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в A, не входит в подгруппу $\Phi(G)$. Если $N \neq P$, то G/N сверхразрешима по теореме A. Поэтому $A \leq N$, что противоречит утверждению (b). Следовательно, все силовские подгруппы из A являются минимальными нормальными подгруппами в G, поэтому $A = N_1 \times \cdots \times N_t$ $(t \geq 2)$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа в G, $i = 1, \ldots, t$.

(d) *Для каждого простого делителя p порядка группы A любая n-максимальная подгруппа H из G сверхразрешима и индуцирует на силовской p-подгруппе из A группу автоморфизмов, являющуюся расширением некоторой*

p-группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$.

Пусть H — произвольная n-максимальная подгруппа из G. Пусть H — максимальная подгруппа в такой подгруппе V из G, что V является $(n-1)$-максимальной подгруппой в G. Тогда все максимальные подгруппы из V $\mathfrak{U}$-субнормальны в G. Следовательно, V — сверхразрешимая группа. Итак, H сверхразрешима.

Найдутся такие максимальные в G подгруппы M_1 и M_2, что $H \le M_1 \cap M_2$, M_2 $\mathfrak{U}$-нормальна в G и H является $(n-1)$-максимальной подгруппой в M_1. Понятно, что утверждения теоремы верны относительно M_1 и M_2. Следовательно, если V_i — произвольная $(n-1)$-максимальная подгруппа из M_i и P — силовская p-подгруппа в $M_i^{\mathfrak{U}}$, то $V_i/C_{V_i}(P)$ является расширением некоторой p-группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$.

Предположим, что подгруппа M_2 сверхразрешима. Тогда $M_2/C_{M_2}(P)$ является расширением некоторой p-группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$. Следовательно,

$$H/C_H(P) = H/C_{M_2}(P) \cap H \simeq C_{M_2}(P)H/C_{M_2}(P)$$

— расширение некоторой p-группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$ $(i=1,2)$.

Предположим, что M_2 не является сверхразрешимой группой. Ввиду теоремы А это означает, что M_2 — холлова q'-подгруппа в G, где $|G : M_2| = q$. Следовательно, $|M_1 : M_1 \cap M_2| = q$, что влечет $M_1^{\mathfrak{U}} \le M_1 \cap M_2$.

Предположим, что $\Phi(A) = 1$. В этом случае A является абелевой группой. Пусть $E = M_1^{\mathfrak{U}}H$ и T/L — главный фактор группы E, где $T \le M_1^{\mathfrak{U}} \cap H$ и $|T/L| = p^a$. Пусть P — силовская p-подгруппа в $M_1^{\mathfrak{U}}$. Тогда $T \le P$ и $H/C_H(P)$ является расширением некоторой p-группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$. Поэтому $H/C_H(T/L)$ — расширение некоторой p-группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$. Ввиду изоморфизма $AM_1/A \simeq M_1/M_1 \cap A$ имеет место $M_1^{\mathfrak{U}} \le G^{\mathfrak{U}} = A$, так что $M_1^{\mathfrak{U}}$ является абелевой группой. Следовательно, $C_E(T/L) = M_1^{\mathfrak{U}}(C_E(T/L) \cap H) = M_1^{\mathfrak{U}}C_H(T/L)$. Тем самым

$$E/C_E(T/L) = M_1^{\mathfrak{U}}H/M_1^{\mathfrak{U}}C_H(T/L) \simeq H/C_H(T/L)(H \cap M_1^{\mathfrak{U}})$$

является расширением некоторой p-группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$. Следовательно, $|T/L| = p$. Так как при этом H — сверхразрешимая группа, группа E сверхразрешима. Понятно также, что сверхразрешимой является и группа $E/M_1^{\mathfrak{U}}$. Таким образом, H — $(a_1 + \cdots + a_t)$-максимальная подгруппа в $M_1 \cap M_2$, где $p_1^{a_1} \ldots p_t^{a_t}$ — каноническое разложение числа $|M_1 \cap M_2 : H|$. Таким образом, $n \le |M_1 \cap M_2 : H| + 1$. Следовательно, в M_2 найдется такая $(n-1)$-максимальная подгруппа из V, что $H \le V$. Таким образом, если P — силовская p-подгруппа в $M_2^{\mathfrak{U}}$, то $V/C_V(P)$ является расширением некоторой p-группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$. Если же $\Phi(A) \ne 1$, то M_1 — сверхразрешимая группа, и в этом случае необходимое утверждение доказывается аналогично.

Достаточность. Очевидно, что если группа G сверхразрешима, то каждая ее подгруппа является $\mathfrak{U}$-субнормальной. Пусть G — группа типа II. Пусть H — произвольная n-максимальная подгруппа в G. Так как по условию теоремы для всякого $p \in \pi(G^{\mathfrak{U}})$ любая n-максимальная подгруппа H из G сверхразрешима и индуцирует на силовской p-подгруппе из $G^{\mathfrak{U}}$ группу автоморфизмов, являющуюся расширением некоторой p-группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$, то $G^{\mathfrak{U}}H$ сверхразрешима (см. п. (d) в доказательстве необходимости). Поэтому H $\mathfrak{U}$-субнормальна в $G^{\mathfrak{U}}H$. Кроме того, так как $G^{\mathfrak{U}} \leq G^{\mathfrak{U}}H$, то $G^{\mathfrak{U}}H$ $\mathfrak{U}$-субнормальна в G по лемме 2.1(4). Поэтому по лемме 2.1(3) H $\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Теорема доказана.

Доказательство теоремы C. Предположим, что $|\pi(G)| = 2$. Тогда по условию либо все максимальные подгруппы из G, либо все ее 2-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны в G. Поэтому каждая максимальная подгруппа из G сверхразрешима. Следовательно, G является либо сверхразрешимой группой, либо минимальной несверхразрешимой группой. Поэтому группа G ϕ-дисперсивна для некоторого упорядочения ϕ множества всех простых чисел согласно лемме 2.5. Таким образом, будем предполагать, что $|\pi(G)| > 2$.

Если N — минимальная нормальная подгруппа в G, то условие теоремы сохраняется для G/N (см. п. (a) в доказательстве теоремы B). Следовательно, по индукции G/N ϕ-дисперсивна для некоторого упорядочения ϕ множества всех простых чисел. Можно считать, что N не является силовской подгруппой группы G. Более того, поскольку класс всех ϕ-дисперсивных групп является насыщенной формацией (см. [12, с. 35]), то $N \nleq \Phi(G)$. Поэтому (см. п. (a) в доказательстве теоремы B) в G найдется такая максимальная подгруппа M, что $G = N \rtimes M$, все $(n-1)$-максимальные подгруппы из M $\mathfrak{U}$-субнормальны в M и $|\pi(M)| = |\pi(G)|$. Но тогда по теореме B $G/N \simeq M$ — дисперсивная по Оре группа. Таким образом, мы можем предполагать, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, что влечет $C_G(N) = N$.

Пусть N является p-группой, и пусть q — произвольный простой делитель порядка группы G, отличный от p. Пусть E — холлова q'-подгруппа в G. Тогда $N \leq E$ и условие теоремы выполняется для E. Следовательно, по индукции одна из силовских подгрупп группы E, скажем R, нормальна в E. Если при этом $N \nleq R$, то $R \leq C_G(N) = N$. Значит, R — силовская p-подгруппа в E. Понятно также, что R является силовской p-подгруппой в группе G и $(|G : N_G(R)|, r) = 1$ для любого простого числа $r \neq q$. Но поскольку рассматриваем случай, когда $|\pi(G)| > 2$, это влечет, что R нормальна в G. Теорема доказана.

В заключение отметим, что ограничения на $|\pi(G)|$ в теоремах A, B и C ослабить нельзя. Для теоремы A это вытекает из описания минимальных несверхразрешимых групп (см. лемму 2.5). Относительно теоремы C это также верно, как показывает пример симметрической группы степени 4. Пусть теперь p, q, r — простые числа такие, что $p > q > r$, r делит $q-1$, q и r делят $p-1$. Пусть $Q \rtimes R$ — неабелева группа порядка qr, и пусть P_1 — простой точный $\mathbb{F}_pQR$-модуль. Пусть, наконец, $G = (P_1 \rtimes (Q \rtimes R)) \times P_2$, где P_2 — группа порядка p. Тогда сверхразрешимый корадикал $G^{\mathfrak{U}} = P_1$ группы G не является холловой подгруппой в G. При этом легко проверить, что все 3-максимальные подгруппы из G $\mathfrak{U}$-субнормальны в G.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.
2. *Guo X. Y., Shum K. P.* Cover-avoidance properties and the structure of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 181. P. 297–308.

3. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* X-semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 31–41.

4. *Li Baojun, Skiba A. N.* New characterizations of finite supersoluble groups // Sci. China, Ser. A: Math. 2008. V. 50, N. 1. P. 827–841.

5. *Guo W., Skiba A. N.* Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups // J. Algebra. 2009. V. 321. P. 2843–2860.

6. *Li Shirong.* Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI-groups // Mathematical Proc. of the Royal Irish Academy. 2000. V. 100A, N 1. P. 65–71.

7. *Го В., Легчекова Е. В., Скиба А. Н.* Конечные группы, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 3. С. 350–359.

8. *Го В., Луценко Ю. В., Скиба А. Н.* О ненильпотентных группах, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 6. P. 1255–1268.

9. *Lutsenko Yu. V., Skiba A. N.* Structure of finite groups with S-quasinormal third maximal subgroups // Ukrainian Math. J. 2009. V. 61, N 12. P. 1915–1922.

10. *Луценко Ю. В., Скиба А. Н.* Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами // Мат. заметки. 2012. Т. 91, № 5. С. 730–740.

11. *Mann A.* Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 132. P. 395–409.

12. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

13. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.

14. *Asaad M.* Finite groups some whose n-maximal subgroups are normal // Acta Math. Hung. 1989. V. 54, N 1–2. P. 9–27.

15. *Spencer A. E.* Maximal nonnormal chains in finite groups // Pacific J. Math. 1968. V. 27, N 1. P. 167–173.

16. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982.

Статья поступила 15 октября 2012 г.

Ковалева Виктория Александровна, Скиба Александр Николаевич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, математический факультет,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
vika.kovalyova@rambler.ru, alexander.skiba49@gmail.com