*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1*

*УДК 512.554*

# ПРИМЕРЫ ПЕРВИЧНЫХ ЙОРДАНОВЫХ СУПЕРАЛГЕБР ВЕКТОРНОГО ТИПА И СУПЕРАЛГЕБР ТИПА ЧЕНГА — КАЦА

**В. Н. Желябин**

**Аннотация.** Построены примеры первичных йордановых супералгебр векторного типа, у которых нечетная часть является конечнопорожденным проективным модулем ранга 1 с произвольным числом порождающих. Из этих примеров строятся примеры первичных йордановых супералгебр типа Ченга — Каца.

**Ключевые слова:** йорданова супералгебра, супералгебра векторного типа, дифференциально простая алгебра, первичная алгебра, проективный модуль.

В теории колец большое значение имеет описание первичных алгебр. Первичные невырожденные йордановы алгебры описаны Е. И. Зельмановым [1, 2]. Как оказалось, такие первичные йордановы алгебры близки к классическим. Пример С. В. Пчелинцева первичной йордановой алгебры с абсолютными делителями нуля [3] показывает, что требование невырожденности является существенным. Этот пример получил название «монстра Пчелинцева». В [4] указаны примеры первичных алгебр с абсолютными делителями нуля в многообразиях альтернативных и $(\gamma, \delta)$-алгебр. Все эти примеры строились, исходя из некоторых вспомогательных (-1,1)-алгебр. В [5] с помощью йордановых супералгебр векторного типа были даны другие конструкции «монстра Пчелинцева». В [6] показано, что в качестве «вспомогательных алгебр» могут быть использованы грассмановы оболочки подходящих йордановых $(-1, 1)$-супералгебр векторного типа. Более точно, примером первичной йордановой алгебры в [6] явилась свободная алгебра в многообразии йордановых алгебр, которое порождено грассмановой оболочкой йордановой супералгебры векторного типа. В [7] с помощью супералгебр векторного типа дана более простая конструкция первичных вырожденных йордановых алгебр. Йордановы супералгебры векторного типа с одним дифференцированием изучались в [8, 9]. Так, в [8] найден критерий простоты йордановой супералгебры, который был обобщен в [10]. В [9] доказана специальность таких йордановых супералгебр. В [11] построена универсальная ассоциативная обертывающая алгебра для простой йордановой супералгебры векторного типа с одним дифференцированием.

В [12, 13] описаны унитальные простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью $A$, нечетная часть $M$ которых является ассоциативным $A$-модулем. Толчком для этих исследований была работа [14], в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00938–а), программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1.419), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (№ 14.740.11.0346).

которой описаны простые $(-1,1)$-супералгебры характеристики $\neq 2,3$. В йордановом случае если супералгебра не является супералгеброй невырожденной билинейной суперформы, то ее четная часть $A$ — дифференциально простая алгебра относительно некоторого множества дифференцирований, а нечетная часть $M$ — конечнопорожденный проективный $A$-модуль ранга 1. Умножение в $M$ задается с помощью фиксированных конечных множеств дифференцирований и элементов алгебры $A$. Как оказалось, каждая такая йорданова супералгебра является подсупералгеброй в супералгебре векторного типа $J(\Gamma, D)$.

Первый пример простой супералгебры векторного типа с несколькими дифференцированиями над полем действительных чисел, который не изоморфен алгебре $J(\Gamma, D)$, построен И. П. Шестаковым и описан в [13]. Пример подобной супералгебры, но уже над полем характеристики нуль, в котором неразрешимо уравнение $t^2+1=0$, построен в [15, 16]. Наконец, в [17] построен пример простой супералгебры векторного типа с несколькими дифференцированиями над произвольным полем нулевой характеристики. С использованием нового примера йрдановой супералгебры векторного типа в [17] также приведен пример простой йордановой супералгебры типа Ченга — Каца. Примеры этих супералгебр являются ответом на вопрос из [18]. Простые йордановы супералгебры изучались в [10, 19–23].

В построенных примерах йордановых супералгебр векторного типа нечетная часть является двупорожденным модулем над четной частью. В данной работе мы строим примеры первичных йордановых супералгебр векторного типа, у которых нечетная часть является проективным модулем ранга один с любым числом порождающих. Из этих примеров получаем примеры первичных йордановых супералгебр типа Ченга — Каца.

Пусть $R$ — поле действительных чисел и $n$ — натуральное число. Рассмотрим алгебру полиномов $R[x_0,\dots,x_n]$ от переменных $x_0,x_1,\dots,x_n$. Через $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=0,\dots,n$, обозначим операторы дифференцирования алгебры $R[x_0,x_1,\dots,x_n]$ по переменным $x_0,x_1,\dots,x_n$.

Рассмотрим многочлен $S^n(x_0,\dots,x_n) = x_0^2+\dots+x_n^2-1$. Пусть $\Gamma_n = R[x_0,\dots,x_n]/\bigl(x_0^2+\dots+x_n^2-1\bigr)$ — фактор-алгебра алгебры $R[x_0,\dots,x_n]$ по идеалу $\bigl(x_0^2+\dots+x_n^2-1\bigr) = S^n(x_0,\dots,x_n)R[x_0,\dots,x_n]$. Отождествим образы элементов $x_0,x_1,\dots,x_n$ при каноническом гомоморфизме $R[x_0,\dots,x_n]\mapsto\Gamma_n$ с элементами $x_0,x_1,\dots,x_n$. Тогда

$$\Gamma_n = R[x_1,\dots,x_n] + x_0R[x_1,\dots,x_n],$$

где $R[x_1,\dots,x_n]$ — кольцо полиномов от переменных $x_1,\dots,x_n$. Алгебра $\Gamma_n$ не содержит делителей нуля.

Пусть $A_n$ — подалгебра в $\Gamma_n$, порожденная элементами $1, x_1^2,\dots,x_n^2$, $x_ix_j$, $i,j=0,\dots,n$, $i\neq j$. В алгебре $\Gamma_n$ рассмотрим подпространство $M_n = A_nx_0+\dots+A_nx_n$. Тогда $M_n$ — ассоциативный $A_n$-модуль. Ясно, что $M_n$ не имеет $A_n$-кручений. Рассмотрим $A_n$-модуль $M_n\otimes_{A_n}M_n$. Тогда элемент $x_0\otimes x_0+\dots+x_n\otimes x_n$ порождает $A_n$-модуль $M_n\otimes_A M_n$. Действительно, для порождающих $x_i,x_j$ имеет место

$$\begin{aligned}x_i\otimes x_j = \bigl(x_0^2+\dots+x_n^2\bigr)(x_i\otimes x_j) &= x_0^2x_i\otimes x_j+\dots+x_n^2x_i\otimes x_j\\ = x_0x_ix_0\otimes x_j+\dots+x_nx_ix_n\otimes x_j &= x_0\otimes x_0x_ix_j+\dots+x_n\otimes x_nx_ix_j\\ &= x_ix_j(x_0\otimes x_0+\dots+x_n\otimes x_n).\end{aligned}$$

Заметим, что $\Gamma_n = A_n+M_n$ является $Z_2$-градуированной алгеброй (см. ниже). Пусть $D$ — четное дифференцирование алгебры $\Gamma_n$, т. е. $D(A_n)\subseteq A_n$,

$D(M_n) \subseteq M_n$. Предположим, что $D$ не равно нулю на $A_n$. Если $v, u$ — элементы из $M_n$, то положим $D_{v,u} = vuD$. Нетрудно видеть, что

$$D_{v,u}(a)x = D_{x,u}(a)v, \quad D_{v,u} = D_{u,v}, \quad D_{bx,v}(a) = bD_{x,v}(a)$$

для любых $x, v, u \in M_n$ и $a, b \in A_n$.

Для произвольных $a \in A_n$ и $x \in M_n$ определим отображение $\phi_{a,x} : M_n \mapsto A_n$, заданное правилом $\phi_{a,x}(y) = D_{x,y}(a)$. Тогда $\phi_{a,x}$ — гомоморфизм $A_n$-модулей. Покажем, что модуль $M_n \otimes_A M_n$ не имеет $A_n$-кручений.

Пусть $b(x_0 \otimes x_0 + \cdots + x_n \otimes x_n) = 0$. Тогда

$$(\phi_{a,x} \otimes \mathrm{id})(b(x_0 \otimes x_0 + \cdots + x_n \otimes x_n)) = b(1 \otimes \phi_{a,x}(x_0)x_0 + \cdots + 1 \otimes \phi_{a,x}(x_n)x_n) = 0.$$

Отсюда

$$b(D_{x,x_0}(a)x_0 + \cdots + D_{x,x_n}(a)x_n) = b(D_{x_0,x_0}(a)x + \cdots + D_{x_n,x_n}(a)x) = 0.$$

Так как $M_n$ не имеет $A_n$-кручений, то $b(D_{x_0,x_0}(a) + \cdots + D_{x_n,x_n}(a)) = 0$. Поэтому

$$bD(a) = b\big(x_0^2 D(a) + \cdots + x_n^2 D(a)\big) = b(D_{x_0,x_0}(a) + \cdots + D_{x_n,x_n}(a)) = 0.$$

Поскольку $D(a) \neq 0$ для некоторого $a \in A_n$, то $b = 0$. Отсюда получаем, что $M_n \otimes_{A_n} M_n \cong A$.

Таким образом, справедлива

**Лемма 1.** *Пусть $M_n = A_n x_0 + \cdots + A_n x_n$. Тогда $M_n$ — проективный ранга 1 $A_n$-модуль.*

Заметим, что приведенные выше результаты справедливы для любого поля характеристики нуль.

Возникает вопрос о числе порождающих модуля $M_n$. Здесь имеет место

**Теорема 1** (R. Swan, см. [24]). *Модуль $M_n$ не может быть порожден меньшим, чем $n+1$, числом элементов.*

Если $n = 1$, то теорема 1 верна (см. [15, 16]) для любого поля характеристики нуль, в котором нельзя извлечь квадратный корень из $-1$.

Пусть $F$ — поле характеристики не 2. Супералгебра $J = J_0 + J_1$ — это $\mathrm{Z}_2$-градуированная $F$-алгебра, т. е.

$$J_0^2 \subseteq J_0, \quad J_1^2 \subseteq J_0, \quad J_1 J_0 \subseteq J_1, \quad J_0 J_1 \subseteq J_1.$$

Положим $A = J_0$ и $M = J_1$. Пространство $A$ ($M$) называется *четной* (*нечетной*) *частью супералгебры* $J$. Элементы множества $A \cup M$ называются *однородными.* Выражение $p(x)$, где $x \in A \cup M$, означает индекс четности однородного элемента $x$: $p(x) = 0$, если $x \in A$ ($x$ четный) и $p(x) = 1$, если $x \in M$ ($x$ нечетный). Для элемента $x$ из $J$ через $R_x$ обозначим оператор правого умножения на элемент $x$. Супералгебра $J$ называется *йордановой,* если для однородных элементов выполнимы следующие операторные тождества:

$$aR_b = (-1)^{p(a)p(b)} bR_a, \tag{1}$$

$$R_{a^2} R_a = R_a R_{a^2}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} R_a R_b R_c + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)+p(b)p(c)} R_c R_b R_a + (-1)^{p(b)p(c)} R_{(ac)b} \\ = R_a R_{bc} + (-1)^{p(a)p(b)} R_b R_{ac} + (-1)^{p(a)p(c)+p(b)p(c)} R_c R_{ab}. \end{aligned} \tag{3}$$

Дадим эквивалентное определение йордановой супералгебры.

Пусть $G$ — алгебра Грассмана над $F$, заданная образующими $1, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ и определяющими соотношениями: $\xi_i^2 = 0$, $\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i$. Произведения

$$1, \xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k,$$

образуют базис алгебры $G$ над $F$. Обозначим через $G_0$ и $G_1$ подпространства, порожденные соответственно произведениями четной и нечетной длины. Тогда $G = G_0 + G_1$ — $\mathrm{Z}_2$-градуированная $F$-алгебра.

Пусть теперь $A = A_0 + A_1$ — произвольная супералгебра над $F$. Рассмотрим тензорное произведение $F$-алгебр $G \otimes A$. Его подалгебра

$$G(A) = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$$

называется *грассмановой оболочкой супералгебры* $A$.

Алгебра $J = J_0 \oplus J_1$ называется *йордановой супералгеброй*, если ее грассманова оболочка $G(J)$ является йордановой алгеброй.

Приведем некоторые примеры йордановых супералгебр.

Пусть $\Gamma$ — ассоциативная суперкоммутативная $F$-супералгебра с ненулевым четным дифференцированием $D$. Изоморфную копию пространства $\Gamma$ с отображением изоморфизма $a \mapsto \bar{a}$ обозначим через $\overline{\Gamma}$. Рассмотрим прямую сумму пространств $J(\Gamma, D) = \Gamma + \overline{\Gamma}$ и определим на $J(\Gamma, D)$ умножение $(\cdot)$ по правилам

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot \bar{b} = \overline{ab}, \quad \bar{a} \cdot b = (-1)^{|b|}\overline{ab}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = (-1)^{|b|}(D(a)b - aD(b)),$$

где $a, b \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ и $ab$ — произведение в $\Gamma$. Тогда $J(\Gamma, D)$ — йорданова супералгебра с четной частью $A = \Gamma_0 + \overline{\Gamma}_1$ и нечетной $M = \Gamma_1 + \overline{\Gamma}_0$. Супералгебра $J(\Gamma, D)$ называется *супералгеброй векторного типа*.

Как обычно, произвольная алгебра $A$ называется *первичной*, если для любых ее идеалов $I$ и $K$ из равенства $IK = 0$ следует $I = 0$ или $K = 0$. Супералгебра называется *первичной*, если в ней нет аннулирующих друг друга ненулевых $\mathrm{Z}_2$-градуированных идеалов.

**Лемма 2.** *Пусть $A$ — суперкоммутативная супералгебра. Тогда $A$ — первичная алгебра в том и только в том случае, когда $A$ — первичная супералгебра.*

Доказательство. Пусть $A$ — первичная супералгебра и $I$, $K$ — идеалы алгебры $A$ такие, что $IK = 0$.

Рассмотрим отображение $\pi : A \mapsto A$, заданное правилом $\pi(a + x) = a - x$, где $a \in A_0$, $x \in A_1$. Ясно, что $\pi$ — автоморфизм алгебры $A$ периода 2. Более того, идеал алгебры $A$ является $\mathrm{Z}_2$-градуированным, если он инвариантен относительно автоморфизма $\pi$.

Пусть $I^\pi$ — образ идеала $I$. Поскольку $I \cap I^\pi \subseteq I$ и $I \cap I^\pi \subseteq I^\pi$, то $(I \cap I^\pi)(K + K^\pi) = 0$. Поэтому можно считать, что $I \cap I^\pi = 0$, т. е. $II^\pi = 0$. Также можно считать, что $I \cap A_0 = I \cap A_1 = 0$. Тогда для $a + x \in I$, где $a \in A_0$, $x \in A_1$, имеем

$$0 = (a + x)(a + x)^\pi = (a + x)(a - x) = a^2.$$

Так как $(a + x)^2 = a^2 + 2ax$, то $ax \in I \cap A_1$. Поэтому $ax = 0$.

Пусть $b + y \in I$, где $b \in A_0$, $y \in A_1$. Тогда $(a + b)^2 = 0$ и $(a + b)(x + y) = 0$. Отсюда $ab = 0$ и $ay + bx = 0$. Следовательно,

$$(a + x)(b + y) = xy \in I \cap A_1.$$

Поэтому $I^2 = 0$. Отсюда получаем, что

$$(I + I^\pi)^2 \subseteq I^2 + II^\pi + (I^\pi)^2 = 0.$$

Таким образом, $I = 0$.

Для йордановых супералгебр векторного типа справедлива

**Теорема 2** (И. П. Шестаков [10]). *Пусть $\Gamma$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра и $D \neq 0$ — четное дифференцирование. Тогда йорданова супералгебра $J(\Gamma, D)$ первична (проста) тогда и только тогда, когда супералгебра $\Gamma$ $D$-первична (соответственно $\Gamma = \Gamma_0$ $D$-проста).*

Критерий простоты для унитальных йордановых супералгебр $J(\Gamma, D)$ доказан в [8].

Пусть $\Gamma$ — ассоциативная коммутативная $F$-алгебра с ненулевым дифференцированием $D$. Рассмотрим две прямые суммы векторных пространств:

$$J_0 = \Gamma + w_1\Gamma + w_2\Gamma + w_3\Gamma, \quad J_1 = \overline{\Gamma} + v_1\overline{\Gamma} + v_2\overline{\Gamma} + v_3\overline{\Gamma},$$

где $\overline{\Gamma}$ — изоморфная копия пространства $\Gamma$.

Пусть $a, b \in \Gamma$. Определим на пространстве $J_0$ коммутативную операцию умножения, полагая

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot w_i b = w_i ab, \quad w_1 a \cdot w_1 b = w_2 a \cdot w_2 b = ab, \quad w_3 a \cdot w_3 b = -ab,$$

$$w_i a \cdot w_j b = 0 \ \text{ для } i \neq j.$$

Положим $v_{i\times i} = 0$, $v_{1\times 2} = -v_{2\times 1} = v_3$, $v_{1\times 3} = -v_{3\times 1} = v_2$, $v_{2\times 3} = -v_{3\times 2} = -v_1$. Определим коммутативное бимодульное действие $J_0 \times J_1 \mapsto J_1$, полагая

$$a \cdot \bar{b} = \overline{ab}, \quad a \cdot v_i\bar{b} = v_i\overline{ab}, \quad w_i a \cdot \bar{b} = v_i\overline{D(a)b}, \quad w_i a \cdot v_j\bar{b} = v_{i\times j}\overline{ab}.$$

Скобка на $J_1$ определяется по правилу

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = D(a)b - aD(b), \quad \bar{a} \cdot v_i\bar{b} = -w_i(ab), \quad v_i\bar{a} \cdot \bar{b} = w_i(ab), \quad v_i\bar{a} \cdot v_j\bar{b} = 0.$$

Тогда пространство $J = J_0 + J_1$ с операцией умножения

$$(a_0 + a_1) \cdot (b_0 + b_1) = (a_0 \cdot b_0 + a_1 \cdot b_1) + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0),$$

где $a_0, b_0 \in J_0$, $a_1, b_1 \in J_1$, является алгеброй, которую обозначают через $CK(\Gamma, D)$ и называют *алгеброй Ченга — Каца*. Как известно (см. [21, 18]), $CK(\Gamma, D)$ — йорданова супералгебра, которая проста тогда и только тогда, когда $\Gamma$ $D$-проста.

**Лемма 3.** *Йорданова супералгебра $CK(\Gamma, D)$ первична тогда и только тогда, когда $\Gamma$ $D$-первична.*

Доказательство. Пусть $I$, $K$ — $D$-инвариантные идеалы $\Gamma$ и $IK = 0$. Тогда

$$P = I + w_1 I + w_2 I + w_3 I + \overline{I} + v_1\overline{I} + v_2\overline{I} + v_3\overline{I},$$

$$Q = K + w_1 K + w_2 K + w_3 K + \overline{K} + v_1\overline{K} + v_2\overline{K} + v_3\overline{K}$$

являются идеалами в $CK(\Gamma, D)$ и $PQ = 0$. Поэтому из первичности $CK(\Gamma, D)$ следует $D$-первичность $\Gamma$.

Пусть $\Gamma$ $D$-первична. Предположим, что $P$ и $Q$ — идеалы в $CK(\Gamma, D)$ такие, что $PQ = 0$. По лемме 2 $P$, $Q$ — $\mathrm{Z}_2$-градуированные идеалы, т. е. $P = P_0 + P_1$, $Q = Q_0 + Q_1$.

Пусть $P_0 \neq 0$. Поскольку $\Gamma$ $D$-первична, аннулятор $\Gamma$ равен нулю. Поэтому $P_0 \cap \Gamma \neq 0$ и $P_0 \cap w_i\Gamma \neq 0$. Пусть $I = \{a \in \Gamma \mid w_1 a \in P_0 \cap w_1\Gamma\}$. Тогда $I$ — идеал в $\Gamma$ и $I \neq 0$. Так как $(w_1\Gamma \cdot \overline{\Gamma}) \cdot \overline{\Gamma} \subseteq w_1(D(\Gamma)\Gamma^2)$, то $D(I)\Gamma^2 \subseteq I$. Покажем, что $D^n(I)\Gamma^{2n} \subseteq I$. Действительно,

$$D^n(I)\Gamma^{2n} \subseteq D(D^{n-1}(I)\Gamma^{2n}) + D^{n-1}(I)D(\Gamma^{2n}) \subseteq D(D^{n-1}(I)\Gamma^{2(n-1)}\Gamma^2)$$
$$+ D^{n-1}(I)\Gamma^{2n} \subseteq D(I\Gamma^2) + I \subseteq D(I)\Gamma^2 + ID(\Gamma^2) + I \subseteq I.$$

Отсюда получаем, что $D^n(I)\Gamma^{2n}(\Gamma\cap Q_0)=0$. В силу $D$-первичности $\Gamma$ имеем, что $D^n(I)(\Gamma\cap Q_0)=0$ для любого $n$. Тогда $I+D(I)+\dots+D^n(I)+\dots$ — $D$-инвариантный идеал $\Gamma$, который аннулирует идеал $\Gamma\cap Q_0$. Отсюда $Q_0=0$. Следовательно, $Q=Q_1$. Поскольку $J_1Q_1\subseteq Q_0$, то $J_1Q_1=0$. Пусть $\bar a+v_1\bar b+v_2\bar c+v_3\bar d\in Q$ и $e\in\Gamma$. Тогда

$$\bar e(\bar a+v_1\bar b+v_2\bar c+v_3\bar c)=0.$$

Поэтому $eb=ec=ed=0$. Отсюда $Q\subseteq\overline{\Gamma}$. Пусть $\bar b\in Q$. Тогда $w_i\Gamma\cdot\bar b=v_i\overline{D(\Gamma)b}$. Значит, $D(\Gamma)b=0$. Поэтому $b$ аннулирует $D$-инвариантный идеал $D(\Gamma)\Gamma$. Следовательно, $Q=0$.

В [13] доказана

**Теорема.** *Пусть $J=A+M$ — простая специальная унитальная йорданова супералгебра, ее четная часть $A$ — ассоциативная алгебра, а нечетная часть $M$ — ассоциативный $A$-модуль. Предположим, что $J$ не является супералгеброй невырожденной билинейной суперформы. Тогда существуют такие элементы $x_1,\dots,x_n\in M$, что*

$$M=Ax_1+\dots+Ax_n$$

*и произведение в $M$ задается равенством*

$$ax_i\cdot bx_j=\gamma_{ij}ab+D_{ij}(a)b-aD_{ji}(b),\quad i,j=1,\dots,n,\tag{4}$$

*где $\gamma_{ij}\in A$, а $D_{ij}$ — дифференцирование алгебры $A$. Алгебра $A$ дифференциально проста относительно множества дифференцирований $\Delta=\{D_{ij}\mid i,j=1,\dots,n\}$. Модуль $M$ является проективным $A$-модулем ранга 1. Кроме того, супералгебра $J$ является подалгеброй супералгебры $J(\Gamma,D)$.*

Йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью, у которых нечетная часть является ассоциативным конечнопорожденным модулем и умножение нечетных элементов задается по формуле (4), будем называть *супералгебрами векторного типа.*

В построенных новых примерах простых йордановых супералгебр, удовлетворяющих условию теоремы, нечетная часть $M$ является двухпорожденным $A$-модулем (см. [13, 15–17]).

Приведем примеры первичных йордановых супералгебр векторного типа, у которых нечетная часть является конечнопорожденным проективным модулем ранга 1 с произвольным числом порождающих.

Пусть $R$ — поле действительных чисел $\Gamma_n=R[x_0,\dots,x_n]/(x_0^2+\dots+x_n^2-1)$, $A_n$ — подалгебра в $\Gamma_n$, порожденная элементами $1,x_1^2,\dots,x_n^2,x_ix_j$, $i,j=0,\dots,n$, $i\neq j$, и $M_n=A_nx_0+\dots+A_nx_n$. Пусть $D$ — четное дифференцирование алгебры $\Gamma_n$, т. е. $D(A_n)\subseteq A_n$, $D(M_n)\subseteq M_n$. Предположим, что $D$ не равно нулю на $A_n$. Тогда $D_{ij}=x_ix_jD$ — ненулевые дифференцирования алгебры $A_n$, $i,j=0,\dots,n$. Положим $\gamma_{ij}=D(x_i)x_j-D(x_j)x_i$. Поскольку $D$ — четное дифференцирование, то $\gamma_{ij}\in A_n$.

Теперь рассмотрим супералгебру $J(\Gamma_n,D)$ и в ней подпространство

$$J(A_n,\Delta_n)=A_n+\overline{M_n},$$

где $\Delta_n=\{D_{ij}\mid i,j=0,\dots,n\}$.

Пусть $a,b\in A$. Тогда в супералгебре $J(\Gamma_n,D)$

$$\begin{aligned}\overline{ax_i}\cdot\overline{bx_j}&=D(ax_i)bx_j-D(bx_j)ax_i=D(x_i)abx_j+D(a)x_ix_jb\\&\quad-D(x_j)abx_i-D(b)x_ix_ja=\gamma_{ij}ab+D_{ij}(a)b-aD_{ij}(b)\in A.\end{aligned}$$

Поэтому $J(A_n,\Delta_n)$ — подсупералгебра йордановой супералгебры $J(\Gamma_n,D)$.

**Теорема 3.** *Йорданова супералгебра $J(A_n, \Delta_n)$ первична, и ее нечетная часть $\overline{M_n}$ — проективный модуль ранга 1. Как $A_n$-модуль $\overline{M_n}$ порождается $n+1$ элементом, но не порождается меньшим числом элементов.*

Доказательство. Пусть $P = P_0 + P_1$, $Q = Q_0 + Q_1$ — идеалы в $J(A_n, \Delta_n)$ и $P \cdot Q = 0$. Тогда $P_0 Q_0 = 0$. Так как $A_n$ не имеет делителей нуля, можно считать, что $Q_0 = 0$. Поэтому $Q \subseteq M_n$ и $Q \cdot M_n = 0$.

Пусть $y \in Q$, $a \in A_n$. Тогда

$$(a, x_i, y) = (a \cdot x_i) \cdot y - a(x_i \cdot y) = x_i y D(a).$$

Тем самым $x_i y D(a) = 0$. Следовательно, $D(a) = 0$. Таким образом, $J(A_n, \Delta_n)$ первична.

Остальные утверждения следуют из леммы 1 и теоремы 1.

Заметим, что супералгебра $J(A_1, \Delta_1)$, где $\Delta_1 = \left\{x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1}\right\}$, является простой (см. [15, 16]).

Рассмотрим построенную выше йорданову супералгебру $CK(\Gamma_n, D)$ и в ней подпространство

$$GCK(A_n, \Delta_n) = A_n + w_1 A_n + w_2 A + w_3 A_n + \overline{M_n} + v_1 \overline{M_n} + v_2 \overline{M_n} + v_3 \overline{M_n}.$$

В алгебре $\Gamma_n$ имеет место $M_n^2 \subseteq A_n$. Поэтому $GCK(A_n, \Delta_n)$ — подсупералгебра в $CK(\Gamma_n, D)$. Следовательно, $GCK(A_n, \Delta_n)$ — йорданова супералгебра с четной частью

$$GCK(A_n, \Delta_n)_0 = A_n + w_1 A_n + w_2 A_n + w_3 A_n$$

и нечетной

$$GCK(A_n, \Delta_n)_1 = \overline{M_n} + v_1 \overline{M_n} + v_2 \overline{M_n} + v_3 \overline{M_n}.$$

Заметим, что супералгебра $GCK(A_n, \Delta_n)$ не изоморфна супералгебре Ченга — Каца $CK(\Gamma, D')$. Действительно, пусть $\phi : GCK(A_n, \Delta_n) \mapsto CK(\Gamma, D')$ — изоморфизм супералгебр. Тогда $\phi(\overline{M_n}) \subseteq \overline{\Gamma} + v_1 \overline{\Gamma} + v_2 \overline{\Gamma} + v_3 \overline{\Gamma}$. Ясно, что $\phi(A_n) = \Gamma$. Предположим, что $\phi(\overline{m}) \in v_1 \overline{\Gamma} + v_2 \overline{\Gamma} + v_3 \overline{\Gamma}$ для некоторого $m \in M_n$. Тогда для любого $a \in A_n$ имеем $\phi((a, \overline{m}, \overline{m})) = (\phi(a), \phi(\overline{m}), \phi(\overline{m}))$. В алгебре $CK(\Gamma, D')$ ассоциатор $(\phi(a), \phi(\overline{m}), \phi(\overline{m})$ равен 0. Поэтому $(a, \overline{m}, \overline{m}) = 0$. Нетрудно видеть, что $(a, \overline{m}, \overline{m}) = D_{m,m}(a) = m^2 D(a)$, где $m^2$ — квадрат элемента $m$ в алгебре $\Gamma_n$. Тогда $m^2 D(a) = 0$. Следовательно, $m = 0$.

Пусть 1 — единица алгебры $\Gamma$ и $\phi^{-1}(\overline{1}) \in v_1 \overline{M_n} + v_2 \overline{M_n} + v_3 \overline{M_n}$. Тогда для любого $b \in \Gamma$ имеем $\phi^{-1}(\bar{b}) \in v_1 \overline{M_n} + v_2 \overline{M_n} + v_3 \overline{M_n}$. Поэтому $\phi^{-1}(\overline{1}) \phi^{-1}(\bar{b}) = 0$ в супералгебре $GCK(A_n, \Delta_n)$. Следовательно, $\overline{1}\bar{b} = 0$ супералгебре $GCK(\Gamma, D')$. Тогда $D'(b) = 0$. Поэтому проекция элемента $\phi^{-1}(\bar{b})$ на пространство $\overline{M_n}$ не равна нулю для любого $b \in \Gamma$.

Отсюда получаем, что существует изоморфизм $A_n$-модуля $M_n$ и $\Gamma$-модуля $\Gamma$; противоречие.

Таким образом, супералгебры $GCK(A_n, \Delta_n)$ и $CK(\Gamma, D')$ неизоморфны.

**Теорема 4.** *Йорданова супералгебра $GCK(A_n, \Delta_n)$ первична и не изоморфна супералгебре Ченга — Каца $CK(\Gamma, D')$.*

Заметим, что супералгебра $GCK(A_1, \Delta_1)$, где $\Delta_1 = \left\{x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1}\right\}$, проста (см. [17]).

Автор благодарен рецензенту, замечания которого сбособствовали улучшению данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА


**1.** *Зельманов Е. И.* О первичных йордановых алгебрах // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 2. С. 162–175.

**2.** *Зельманов Е. И.* О первичных йордановых алгебрах. II // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 1. С. 69–104.

**3.** *Пчелинцев С. В.* Первичные алгебры и абсолютные делители нуля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 1. С. 79–100.

**4.** *Пчелинцев С. В.* О нильпотентных элементах и ниль-радикалах альтернативных алгебр // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 6. С. 674–695.

**5.** *Medvedev Yu. A., Zelmanov E. I.* Some counterexamples in the theory of Jordan algebras // Nonassociative algebraic models (Zaragoza, 1989). Commack, NY: Nova Sci. Publ., 1992. P. 1–16.

**6.** *Шестаков И. П.* Супералгебры и контрпримеры // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 6. С. 187–196.

**7.** *Скосырский В. Г.* Первичные йордановы алгебры и конструкция Кантора // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 3. С. 301–316.

**8.** *King D., McCrimmon K.* The Kantor construction of Jordan superalgebras // Comm. Algebra. 1992. V. 20, N 1. P. 109–126.

**9.** *McCrimmon K.* Speciality and nonspeciality of two Jordan superalgebras // J. Algebra. 1992. V. 149, N 2. P. 326–351.

**10.** *Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 675–716.

**11.** *Martinez C., Zelmanov E.* Specializations of Jordan superalgebras // Canad. Math. Bull. 2002. V. 45, N 4. P. 653–671.

**12.** *Желябин В. Н.* Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 276–310.

**13.** *Желябин В. Н., Шестаков И. П.* Простые специальные супералгебры с ассоциативной четной частью // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1046–1072.

**14.** *Шестаков И. П.* Простые супералгебры типа $(-1, 1)$ // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 721–739.

**15.** *Желябин В. Н.* Дифференциальные алгебры и простые йордановы супералгебры // Мат. труды. 2009. Т. 12, № 2. С. 41–51.

**16.** *Zhelyabin V. N.* Differential algebras and simple Jordan superalgebras // Sib. Adv. Math. 2010. V. 20, N 3. P. 223–230.

**17.** *Желябин В. Н.* Новые примеры простых йордановых супералгебр над произвольным полем характеристики нуль // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 4. С. 84–96.

**18.** *Cantarini N., Kac V. G.* Classification of linearly compact simple Jordan and generalized Poisson superalgebras // J. Algebra. 2007. V. 313, N 2. P. 100–124.

**19.** *Kac V. G.* Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Comm. Algebra. 1977. V. 5, N 13. P. 1375–1400.

**20.** *Zelmanov E.* Semisimple finite-dimesional Jordan superalgebras // Lie algebras and related topics. New York: Springer-Verl., 2000. P. 227–243.

**21.** *Martinez C., Zelmanov E.* Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic // J. Algebra. 2001. V. 236, N 2. P. 575–629.

**22.** *Kac V. G., Martinez C., Zelmanov E.* Graded simple Jordan superalgebras of growth one. Providence RI: Amer. Math. Soc. 2001. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 150).

**23.** *Racine M., Zelmanov E.* Simple Jordan superalgebras with semisimple even part // J. Algebra. 2003. V. 270, N 2. P. 374–444.

**24.** *Swan R. G.* Vector bundles and projective modules // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 105. P. 264–277.


*Статья поступила 27 сентября 2012 г.*

Желябин Виктор Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vicnic@math.nsc.ru