Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 512.5

О ГРУППАХ ПЕРИОДА 36

Э. Джабара, Д. В. Лыткина

Аннотация. Доказывается локальная конечность группы периода 36, содержащей инволюцию и не содержащей элементов порядка 6.

Ключевые слова: периодическая группа, порядок элемента, спектр, локальная конечность.

Работа посвящена 70-летию со дня рождения В. Д. Мазурова

Введение. Обозначим через $\omega(G)$ спектр группы G, т. е. множество порядков ее элементов. Если спектр G конечен, то пусть $\mu(G)$ — множество максимальных по делимости элементов спектра G.

История исследований периодических групп с предписанным спектром началась со знаменитой работы Бернсайда [1], вышедшей в 1902 г., в которой он впервые сформулировал свои известные проблемы. В частности, он задал вопрос об условиях, при которых конечно порожденная группа ограниченного периода обязательно конечна. Бернсайд отметил очевидный факт локальной конечности групп периода 2 и показал, что это верно и для групп периода 3.

В 1937 г. Нойман [2] обратил внимание на естественность задачи исследования групп с заданным спектром. В частности, он доказал локальную конечность любой группы G с $\mu(G) = \{2, 3\}$.

Обзор дальнейших исследований в этом направлении см. в [3]. Из не вошедших в [3] результатов отметим доказательство локальной конечности группы G с $\mu(G) = \{3, 8\}$ [4].

Настоящая работа посвящена доказательству следующего факта.

Теорема. *Пусть G — группа периода 36, не содержащая элементов порядка 6. Тогда либо $\mu(G) = \{9\}$, либо G локально конечна и выполняется одно из следующих утверждений.*

(1) *Силовская 2-подгруппа T из G двуступенно нильпотентна и нормальна в G, а силовская 3-подгруппа является циклической группой, действующей свободно на T.*

(2) *$O_2(G)$ — нетривиальная элементарная абелева группа, силовская 3-подгруппа R из G — циклическая группа, действующая свободно на $O_2(G)$, и $|G : O_2(G)R| = 2$.*

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке проекта MIUR “Teoria dei gruppi e applicazioni”, работа второго — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11–01–00456, 11–01–91158, 12.01.90006), Президентской программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ–4620.2012.1), Федеральной целевой программы «Научно-образовательные кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (государственный контракт 14.740.11.1510) и Программы СО РАН проектов партнерских фундаментальных исследований на 2012–2014 гг. (проект № 14).

(3) *Силовская 3-подгруппа R из G абелева и нормальна в G. Силовская 2-подгруппа T из G действует свободно на R и является либо циклической группой, либо группой кватернионов. При этом $G = RT$.*

Здесь и в дальнейшем для краткости *группой периода n* будем называть любую группу с тождественным соотношением $x^n = 1$, а *n-ступенно нильпотентной группой* — группу с тождественным соотношением $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = 1$, где $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ и $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = [[x_1, x_2, \ldots, x_n], x_{n+1}]$ для $n \geq 2$. В этом смысле, например, класс двуступенно нильпотентных групп периода 36 является многообразием и включает в себя, в частности, все элементарные абелевы 2-группы.

Обозначения и известные факты. Множество элементов порядка n из группы G будем обозначать через $\Gamma_n(G)$.

Назовем действие G на нетривиальной группе V *свободным*, если $v^g \neq v$ для любых нетривиальных $v \in V$ и $g \in G$.

Ф.1 (В. П. Шунков [5]). *Пусть x — инволюция из периодической группы G. Если $|C_G(x)|$ — конечное число, то G локально конечна.*

Ф.2 (А. Х. Журтов [6]). *Если периодическая группа без инволюций действует свободно на абелевой группе, то элементы порядка 3 из G порождают циклическую подгруппу.*

Ф.3 (Нойман [7]). *(Локально) конечная группа, обладающая автоморфизмом порядка 3 без неподвижных точек, нильпотентна ступени два.*

Ф.4 (И. Н. Санов [8], Д. В. Лыткина [9]). *Группа G периода 12 без элементов порядка 6 локально конечна. При этом возможен лишь один из следующих случаев:*

(а) *$G = VQ$, где V — нетривиальная нормальная элементарная абелева 3-подгруппа, Q является 2-группой, которая действует свободно на V и изоморфна либо циклической группе порядка 4, либо группе кватернионов порядка 8;*

(б) *$G = T\langle a\rangle$, где T — нормальная нильпотентная 2-подгруппа ступени нильпотентности 2, а порядок a равен 3;*

(в) *$G = TS$, где T — элементарная абелева нормальная 2-подгруппа, а S изоморфна симметрической группе степени 3.*

Ф.5 (А. Х. Журтов, В. Д. Мазуров [3]). *Непримарная группа периода 18 без элементов порядка 6 локально конечна и либо является расширением абелевой группы периода 9 посредством группы порядка 2, либо расширением элементарной абелевой 2-группы посредством циклической группы периода 9.*

Ф.6 (см. [10, теоремы III.6.5, III.6.6]). *Группа периода 3 трехступенно нильпотентна и, в частности, локально конечна.*

Предварительные результаты. Положим $\Delta(G) = \{x^2 \mid x \in \Gamma_4(G)\}$.

Лемма 1. *Пусть G — группа, не содержащая элементов порядка 8.*
1. *Если $(xy)^4 = 1$ для любых элементов $x, y \in \Gamma_2(G)$, то $\langle\Gamma_2(G)\rangle$ — 2-группа.*
2. *Если $(xy)^4 = 1$ для любых элементов $x, y \in \Delta(G)$, то $\langle\Delta(G)\rangle$ — 2-группа.*

Доказательство. 1. Вычисления в GAP [11] по алгоритму перечисления смежных классов показывают, что порядок группы

$$\begin{aligned}F = \langle x, y, z \mid 1 &= x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^4 = (yz)^4 = (xz)^4 \\ &= ((xy)^2 \cdot z)^4 = ((xz)^2 \cdot y)^4 = (x \cdot z^y)^4 = (x \cdot y^z)^4 = (z \cdot y^x)^4\rangle\end{aligned}$$

равен 2^{11}, поэтому для $x, y, z \in \Gamma_2(G)$ группа $K = \langle x, y, z\rangle$ является конечной 2-группой периода 4.

Пусть $x \in \langle\Gamma_2(G)\rangle$. Тогда $x = x_1 \cdots x_n x_{n+1}$ для некоторых $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \Gamma_2(G)$. По индукции можно считать, что $y^4 = 1$ для $y = x_1 \cdots x_n$ и $x \in \langle y, x_{n+1}\rangle = \left\langle x_{n+1}, x_{n+1}^y, y^2\right\rangle\langle y\rangle$. Так как $\left\langle x_{n+1}, x_{n+1}^y, y^2\right\rangle$ — конечная 2-группа, инвариантная относительно $\langle y\rangle$, то и $\langle y, x_{n+1}\rangle$ — конечная 2-группа, поэтому $x^4 = 1$.

2. Доказывается простой заменой Γ_2 на Δ. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если G удовлетворяет условию теоремы и $\mu(G) \neq \{4, 9\}$, то G удовлетворяет заключению теоремы.*

Доказательство. Если $\mu(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ или $\mu(G) \subseteq \{2, 9\}$, то G локально конечна по Ф.4 или Ф.5 и ее строение определено в [9] или [3]. Лемма доказана.

Отметим, что вопрос о локальной конечности групп периода 9 до сих пор не решен.

В дальнейшем будем считать, что $\mu(G) = \{4, 9\}$.

Лемма 3. *Если $V = \langle\Delta(G)\rangle$ — 2-группа, то G локально конечна и выполнен один из пп.* (1), (2) *теоремы.*

Доказательство. Пусть R — силовская 3-подгруппа из G. Тогда R действует свободно на V и V локально конечна в силу Ф.4. Поэтому V двуступенно нильпотентна по Ф.3. Так как R действует свободно на центре группы V, по Ф.2 и Ф.6 R — локально конечная и, следовательно, циклическая группа. Если V — силовская 2-подгруппа в G, то $G = VR$ и выполнен п. (1) теоремы. В противном случае $\mu(G/V) = \{2, 9\}$ и по лемме 2 G/V удовлетворяет п. (1) или (3) теоремы, а согласно Ф.2 G удовлетворяет п. (1) или (2) теоремы.

$\langle\Delta(G)\rangle$ **не является 2-группой.** В свете леммы 3 будем в дальнейшем предполагать, что $\langle\Delta(G)\rangle$ содержит элемент порядка 3. По лемме 1 в $\Delta(G)$ найдутся две инволюции, порядок произведения которых равен 3. Иными словами, существуют элемент x порядка 3 и элемент a порядка 4 такие, что для $t = a^2$ выполнено равенство $x^t = x^{-1}$. Зафиксируем элементы x, a, t до конца доказательства.

Лемма 4. *В G существует нециклическая силовская 3-подгруппа и*

$$\langle a, x\rangle = (\langle x\rangle \times \langle x^a\rangle)\,\langle a\rangle.$$

Доказательство. Группа $\langle a, x\rangle$ является гомоморфным образом одной из групп

$$F(i_1, i_2) = \langle a, x \mid 1 = a^4 = x^3 = (a^2x)^2 = (ax)^{i_1} = [x, a]^{i_2}\rangle,$$

где $i_1, i_2 \in \{4, 9\}$. Перебор всех вариантов в GAP показывает, что порядок соответствующей группы больше числа 6 в единственном случае, а именно когда $F = F(4, 9) \simeq (3 \times 3) : 4$. Так как порядок любой собственной фактор-группы F не больше четырех, то $\langle a, x\rangle \simeq F$, и лемма доказана.

Лемма 5. *Элемент t является единственной инволюцией в $C_G(a)$, и $C_G(a) = \langle a\rangle$.*

Доказательство. Пусть $z^2 = 1$ и $[z, a] = 1$. Обозначим x^a через y^{-1}. Тогда $\langle a, x, z\rangle$ — гомоморфный образ группы

$$\begin{aligned} F(i_1, i_2, i_3, i_4) = \langle a, x, z \mid 1 = a^4 = x^3 = [x, y] = y^a x^{-1} = z^2 = [a, z] \\ = (xz)^{i_1} = (xaz)^{i_2} = (x^z y)^{i_3} = (xa^2z)^{i_4}\rangle, \end{aligned}$$

где $i_j \in \{4, 9\}$ для $j = 1, 2, 3, 4$.

Вычисления в GAP показывают, что либо $F(i_1, i_2, i_3, i_4)$ — группа порядка 8, что невозможно, либо $|F(i_1, i_2, i_3, i_4) : \langle a, x\rangle| = 1$ и, следовательно $z = t$. Таким образом, t — единственная инволюция в $C = C_G(a)$.

Предположим, что $C_G(a) \neq \langle a\rangle$. Пусть $b \in C_G(a) \setminus \langle a\rangle$. Тогда $\langle a, b\rangle$ — конечная абелева 2-группа с единственной инволюцией, поэтому она циклическая и тем самым в G есть элемент порядка 8, что неверно.

Лемма 6. *$|C_G(t)| \leq 8$, и $C_G(t)$ — силовская 2-подгруппа в G.*

Доказательство. По лемме 5 $C = C_G(a)$ совпадает с $\langle a\rangle$. Пусть $T = C_G(t)$. Тогда T — (локально конечная) 2-группа. Предположим, что $|T| > 8$. Тогда $N = N_T(C)$ — группа диэдра или кватернионов порядка 8, а $N_T(N)$ — кватернионная, диэдральная или полудиэдральная группа, содержащая элемент порядка 8, что невозможно. Второе утверждение леммы теперь очевидно.

Лемма 7. *G локально конечна, и выполнен п.* (3) *теоремы.*

Доказательство. Локальная конечность G вытекает из леммы 6 и Ф.1. Покажем, что силовская 3-подгруппа R из G нормальна. По Ф.6 и лемме 4 можно считать, что R — нециклическая нильпотентная группа, поэтому для любого $r \in R$ существует элемент $s \in R$ такой, что $A = \langle r, s\rangle$ — нециклическая абелева группа. Покажем, что нормальное замыкание N группы A является 3-группой.

Если $n \in N$, то $n = a_1^{g_1} \cdots a_m^{g_m}$, где $a_1, \dots, a_m \in A$, $g_1, \dots, g_m \in G$. Так как $K = \langle A, g_1, \dots, g_m\rangle$ — конечная $\{2, 3\}$-группа без элементов порядка 6, силовская 3-подгруппа S которой нециклическая, то $S \trianglelefteq K$, откуда вытекает, что n является 3-элементом. Таким образом, нормальное замыкание любого элемента из R является 3-группой, поэтому R нормальна в G. Так как $\langle t\rangle$ действует свободно на R, то R абелева и $r^t = r^{-1}$ для любого $r \in R$. Если теперь $g \in G$, то для $u = t^g$ также выполняется равенство $r^u = r^{-1}$ для всех $r \in R$, поэтому tu централизует R. Отсюда $tu \in R$, $u = tr$ для некоторого $r \in R$ и $u^t = r^{-1}tr^2 = tr^3 = t$. Это дает равенство $t^{gr} = t$. Другими словами, $G = C_G(t)R$. По лемме 6 выполнен п. (3) теоремы. Лемма доказана.

Она завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Burnside W.* On an unsettled question in the theory of discontinuous groups // Quart. J. Pure Appl. Math. 1902. V. 37. P. 230–238.
2. *Neumann B. H.* Groups whose elements have bounded orders // J. London Math. Soc. 1937. V. 12. P. 195–198.
3. *Журтов А. Х., Мазуров В. Д.* Локальная конечность некоторых групп с заданными порядками элементов // Владикавк. мат. журн. 2009. Т. 11, № 4. С. 11–15.
4. *Мазуров В. Д.* О группах периода 24 // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 6. С. 766–781.
5. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.
6. *Журтов А. Х.* О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 329–338.
7. *Neumann B. H.* Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed // Arch. Math. 1956. V. 7. P. 1–5.
8. *Санов И. Н.* Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. 1940. Т. 55. С. 166–170.
9. *Лыткина Д. В.* Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4 // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 353–358.

10. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verl., 1979.
11. *GAP*: Groups, algorithms, and programming, http://www/gap-system.org.

Статья поступила 8 октября 2012 г.

Enrico Jabara (Джабара Энрико)
Dipartimento di Filosofia e beni culturali,
Universita di Ca 'Foscari,
Dorsoduro 3825/E, 30123 Venezia, Italy
jabara@unive.it

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский гос. университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com