*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1*

*УДК 512.5*

# КОНТРПРИМЕРЫ К РАНГОВОМУ АНАЛОГУ ТЕОРЕМЫ ШЕФЕРДА — ЛИДХЭМ–ГРИНА — МАККЭЙ О КОНЕЧНЫХ $p$–ГРУППАХ МАКСИМАЛЬНОЙ СТУПЕНИ НИЛЬПОТЕНТНОСТИ

**Е. И. Хухро**

**Аннотация.** По теореме Шеферда — Лидхэм-Грина — Маккэй о конечных $p$-группах максимальной ступени нильпотентности если конечная $p$-группа порядка $p^n$ имеет ступень нильпотентности $n-1$, то она обладает подгруппой ступени нильпотентности не выше 2 с индексом, ограниченным в терминах $p$. Построены контрпримеры к ранговому аналогу этой теоремы, которые дают отрицательное решение задачи 16.103 из «Коуровской тетради». Более того, показано, что не существует функций $r(p)$ и $l(p)$ таких, что любая 2-порожденная конечная $p$-группа, все факторы нижнего центрального ряда которой начиная со второго циклические, обязательно обладала бы нормальной подгруппой ступени разрешимости не выше $l(p)$ с фактор-группой ранга не выше $r(p)$. Требуемые примеры конечных $p$-групп строятся как фактор-группы нильпотентных групп без кручения, которые являются абстрактными 2-порожденными подгруппами нильпотентных делимых групп без кручения, находящихся в соответствии Мальцева с «укороченными» алгебрами Витта.

**Ключевые слова:** конечная $p$-группа, ступень нильпотентности, ступень разрешимости, нижний центральный ряд, ранг.

*Виктору Даниловичу Мазурову по случаю его 70-летия*

## § 1. Введение

Говорят, что конечная $p$-группа $P$ имеет *максимальную ступень нильпотентности*, если она порядка $p^n$ и максимальной возможной ступени нильпотентности $n-1$; это, очевидно, означает, что $|P/\gamma_2(P)| = p^2$ и $|\gamma_i(P)/\gamma_{i+1}(P)| = p$ для всех $i \geq 2$, где $\gamma_j(P)$ — члены нижнего центрального ряда. Теория $p$-групп максимальной ступени нильпотентности основана Блэкберном [1]. Алперин [2] доказал, что ступень разрешимости $p$-группы максимальной ступени нильпотентности ограничена в терминах только $p$. В определенном смысле наилучший результат получен (среди других результатов) независимо Шефердом [3] и Лидхэм-Грином и Маккэй [4]: $p$-группа максимальной ступени нильпотентности обладает подгруппой ступени нильпотентности не выше 2 (даже абелевой при $p = 2$) с индексом, ограниченным в терминах только $p$. Обобщением конечных $p$-групп максимальной ступени нильпотентности стали конечные $p$-группы данной ко-ступени нильпотентности, для которых были доказаны аналогичные результаты (Донкином, Кимингом, Лидхэм-Грином, Манном, Маккэй, Ньюманом, Плескеном, Шалевом, Зельмановым и др.). Параллельно рассматривались естественные обобщения в терминах про-$p$-групп, для которых также были получены некоторые окончательные результаты (в основном теми же авторами).

Автор поставил в «Коуровской тетради» [5] задачу 16.103 о справедливости рангового аналога теоремы Шеферда — Лидхэм-Грина — Маккэй: предположим, что в конечной 2-порожденной $p$-группе $P$ все факторы нижнего центрального ряда начиная со второго циклические; должна ли $P$ обладать нормальной подгруппой ступени нильпотентности не выше 2 с фактор-группой ранга, ограниченного в терминах только $p$?

Целью данной заметки является отрицательный ответ на этот вопрос. Более того, нельзя даже гарантировать наличие нормальной подгруппы ограниченной ступени разрешимости с фактор-группой ограниченного ранга.

**Теорема 1.** *Не существует функций $r(p)$ и $l(p)$ таких, что любая конечная 2-порожденная $p$-группа, все факторы нижнего центрального ряда которой начиная со второго циклические, обязательно обладала бы нормальной подгруппой ступени разрешимости не выше $l(p)$ с фактор-группой ранга не выше $r(p)$.*

Требуемые примеры конечных $p$-групп строятся как фактор-группы нильпотентных групп без кручения, которые являются абстрактными 2-порожденными подгруппами нильпотентных делимых групп без кручения, находящихся в соответствии Мальцева с «укороченными» алгебрами Витта.

Отметим, что «укороченные» алгебры Витта и ранее использовались [6, 7] для построения примеров $p$-групп максимального класса с неограниченной ступенью разрешимости, конечно, для разных значений $p$; при этом использовались алгебры в характеристике $p$ и соответствие Лазара, которое работает только для ступени нильпотентности не выше $p-1$. Наши же примеры «не ограничены» для любого фиксированного простого числа $p$, и потому их построение потребовало подхода через нильпотентные группы без кручения и соответствие Мальцева.

Интересно сравнить ситуацию с родственными проблемами о $p$-автоморфизмах конечных $p$-групп с малым числом неподвижных точек. Теория $p$-групп максимальной ступени нильпотентности почти эквивалентна теории конечных $p$-групп $G$, допускающих автоморфизм $\varphi$ порядка $p$, имеющий ровно $p$ неподвижных точек, $|C_G(\varphi)| = p$. Так называемый непокрытый случай $p$-групп данной ко-ступени нильпотентности в большой степени связан с конечными $p$-группами $G$, допускающими автоморфизм $\varphi$ порядка $p^n$ с $|C_G(\varphi)| = p$.

Теперь предположим, что конечная $p$-группа $G$ допускает автоморфизм $\varphi$ порядка $p^n$ с $|C_G(\varphi)| = p^m$. Для $|\varphi| = p$ Алперин [2] доказал, что у группы $G$ ступень разрешимости $(p, m)$-ограничена, а автор доказал в [8], что $G$ обладает подгруппой $(p, m)$-ограниченного индекса, у которой $p$-ограничена ступень нильпотентности (которую, как заметила Н. Ю Макаренко [9], можно даже оценить числом $h(p)$, где $h(p)$ — функция Хигмэна, ограничивающая ступень нильпотентности нильпотентных групп с автоморфизмом порядка $p$ без неподвижных точек).

Здесь и далее будем говорить для краткости, что некая величина, скажем, $(a, b, \dots)$-*ограничена*, если она ограничена сверху некоторой функцией, зависящей только от $a, b, \dots$.

В общем случае Шалев [10] показал, что у группы $G$ ступень разрешимости $(p, n, m)$-ограничена, а автор доказал в [11], что $G$ обладает подгруппой $(p, n, m)$-ограниченного индекса, у которой ступень разрешимости не выше $2k(p^n)$, где $k(p^n)$ — функция Крекнина, ограничивающая ступень разрешимости алгебры Ли с автоморфизмом порядка $p^n$ без неподвижных точек. В другом направлении для $|\varphi| = p$ Ю. Медведев [12] доказал, что $G$ обладает подгруппой $(p, m)$-ограниченного индекса, у которой ступень нильпотентности $m$-ограничена, а в общем случае Хайкин-Запирайн [13] показал, что $G$ обладает подгруппой $(p, n, m)$-ограниченного индекса, у которой ступень разрешимости $m$-ограничена.

Эти общие результаты о $p$-автоморфизмах конечных $p$-групп имеют довольно тривиальные ранговые аналоги в том смысле, что если конечная $p$-группа $G$ допускает автоморфизм $\varphi$ порядка $p^n$ с $C_G(\varphi)$ ранга $m$, то ранг всей группы $G$ ограничен в терминах $p$, $n$ и $m$. Этот результат хорошо известен в фольклоре; доказательство основано на рассмотрении жордановой нормальной формы $\varphi$ как линейного преобразования любой $\varphi$-инвариантной элементарной абелевой секции. Так как число неподвижных точек в такой секции не больше $p^m$, число жордановых клеток не больше $m$. Поскольку размер каждой клетки не превосходит $p^n \times p^n$, ранг каждой такой секции не выше $mp^n$. Затем можно применить теорию мощных $p$-групп или тот факт, что ранг $p$-группы автоморфизмов абелевой $p$-группы ограничен в терминах ранга последней.

Тем не менее примеры в настоящей работе показывают, что нет рангового аналога исходной теоремы Шеферда — Лидхэм-Грина — Маккэй, которая соответствует случаю $|\varphi| = |C_G(\varphi)| = p$ в терминах автоморфизмов, нет даже с подгруппой $p$-ограниченного «ко-ранга» и $p$-ограниченной ступени разрешимости.

В § 1 напоминаем свойства соответствия Мальцева между делимыми нильпотентными группами без кручения и нильпотентными алгебрами Ли над $\mathbb{Q}$. В § 2 соответствие Мальцева применяется к «укороченным» алгебрам Витта, которые являются нильпотентными алгебрами Ли; эти алгебры и получающиеся группы $G$ рассматриваются для различных значений ступени нильпотентности. Затем в группах $G$ выбираются абстрактные 2-порожденные подгруппы $F$ таким образом, что все факторы нижнего центрального ряда групп $F$ начиная со второго бесконечные циклические. В § 3 показывается, что конечные $p$-группы, являющиеся фактор-группами групп $F$, доставляют требуемые примеры.

## § 2. Соответствие Мальцева

В этом параграфе напоминаем свойства соответствия Мальцева.

Пусть $L$ — нильпотентная алгебра Ли $L$ над $\mathbb{Q}$ (коротко $\mathbb{Q}$-алгебра). Будем обозначать лиевские коммутаторы (произведения) в $L$ круглыми скобками, чтобы отличать их от групповых коммутаторов, которые будут определяться на тех же элементах. Формула Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа определяет структуру $\mathbb{Q}$-степенно́й группы (т. е. делимой группы с однозначным извлечением корней, так что корректно определены рациональные степени элементов). Можно считать, что группа имеет то же подлежащее множество $G = L$, так что групповая операция определяется фиксированной формулой через операции алгебры Ли в $L$:

$$xy = x + y + \frac{1}{2}(x, y) + \frac{1}{12}((x, y), y) - \frac{1}{12}((x, y), x) - \frac{1}{24}(((x, y), x), y) + \cdots, \quad (1)$$

где коммутаторы справа — это лиевские коммутаторы в $L$, зависящие от $x$ и $y$. Коммутатор от двух элементов в $G$ также задается фиксированной формулой в терминах операций алгебры Ли в $L$:

$$[x, y] = (x, y) + \cdots , \tag{2}$$

где точки справа обозначают линейную комбинацию лиевских коммутаторов от $x$ и $y$ веса не меньше трех.

Лиевские операции в $L$ восстанавливаются по операциям $\mathbb{Q}$-степенной группы в $G$ с помощью обращений формул Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа (1), (2). Это соответствие между $G$ и $L$ известно как *соответствие Мальцева*. Известно, что это эквивалентность категорий нильпотентных $\mathbb{Q}$-алгебр Ли и нильпотентных $\mathbb{Q}$-степенных групп.

В частности, группа $G$ имеет ту же ступень нильпотентности, что и $L$; члены нижнего центрального ряда группы $G$ являются $\mathbb{Q}$-степенными подгруппами и совпадают как множества с соответствующими членами нижнего центрального ряда алгебры Ли $L$. Для любого $\alpha \in \mathbb{Q}$ степень $g^\alpha$ элемента $g \in G$ равна $\alpha g$ в $L$, и будем свободно писать $g^\alpha = \alpha g$ для $g \in G = L$ и $\alpha \in \mathbb{Q}$. Заметим, что $1 = 0$, где 1 — единичный элемент группы $G$, а 0 — нулевой элемент алгебры $L$. Для абстрактной подгруппы $S$ из $G$ (т. е. $S$ — подгруппа из $G$ как обыкновенной группы) через $\sqrt{S}$ обозначается множество всех корней из элементов подгруппы $S$; это $\mathbb{Q}$-степенная подгруппа, порожденная $S$; очевидно, $\sqrt{S} = \mathbb{Q}S$ с умножением на скаляры в $L$ справа.

Нам потребуются некоторые технические свойства соответствия Мальцева, которые также известны в фольклоре. Однако чтобы дать точные ссылки, удобно сослаться на некоторые леммы из [14].

Пусть $\mathscr{L}$ — свободная нильпотентная $\mathbb{Q}$-алгебра Ли ступени нильпотентности $c$ на свободных порождающих $x_1, x_2, \ldots$. Тогда $\mathbb{Q}$-степенная группа $\mathscr{G}$, находящаяся в соответствии Мальцева с $\mathscr{L}$, как описано выше, является свободной нильпотентной $\mathbb{Q}$-степенной группой ступени нильпотентности $c$ на свободных порождающих $x_1, x_2, \ldots$.

**Лемма 1** [14, лемма 1]. *Существует $c$-ограниченное натуральное число $d = d(c)$ такое, что любой элемент любой абстрактной подгруппы $\langle g_1, g_2, \ldots \rangle$ группы $\mathscr{G}$ равен линейной комбинации лиевских коммутаторов от $g_1, g_2, \ldots$ с рациональными коэффициентами, знаменатели которых делят $d$.* $\square$

(Здесь и далее «абстрактная» означает «порожденная как обыкновенная группа без извлечения корней», т. е. без дробных степеней.)

Пусть $\mathscr{L}_0$ — кольцо Ли ($\mathbb{Z}$-алгебра), порожденное элементами $x_1, x_2, \ldots$ (так что его аддитивная группа порождена коммутаторами от $x_1, x_2, \ldots$). Пусть $\mathscr{G}_0$ — абстрактная подгруппа группы $\mathscr{G}$, порожденная элементами $x_1, x_2, \ldots$. Тогда $\mathscr{G}_0$ является (абстрактной) свободной нильпотентной группой ступени нильпотентности $c$ на свободных порождающих $x_1, x_2, \ldots$. Лемма 1 в действительности эквивалентна включению $\mathscr{G}_0 \subseteq d^{-1}\mathscr{L}_0$.

**Лемма 2** [14, лемма 2]. *Существует $c$-ограниченное натуральное число $D = D(c)$ такое, что для любого натурального $k$ подгруппа $\mathscr{G}_0^k$, порожденная всеми $k$-ми степенями элементов группы $\mathscr{G}_0$, содержится в $D^{-1}k\mathscr{L}_0$.* $\square$

Хотя эти леммы сформулированы в терминах свободных нильпотентных $\mathbb{Q}$-алгебр Ли и $\mathbb{Q}$-степенных групп, можно применить их следствия к другим ситуациям, где применяется соответствие Мальцева.

## § 3. Группы без кручения

В этом параграфе строим $\mathbb{Q}$-степенные группы без кручения, находящиеся в соответствии Мальцева с некоторыми нильпотентными $\mathbb{Q}$-алгебрами Ли. Затем выбираем абстрактные 2-порожденные подгруппы, у которых циклические факторы нижнего центрального ряда начиная со второго.

Для $n \geq 3$ пусть $L = L(n)$ — «укороченная» алгебра Витта над $\mathbb{Q}$, которая является алгеброй Ли с базисом $e_1, \dots, e_n$ и структурными константами

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} (i-j)e_{i+j} & \text{при } i+j \leq n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3}$$

Заметим, что любой лиевский коммутатор от $e_i$ является кратным $e_s$, где $s$ — сумма индексов всех элементов, входящих в коммутатор с учетом кратностей, например, $(e_2, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{k-2}) = (k-2)!e_k$. Здесь и далее простые (лево-нормированные) коммутаторы обозначаются как

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) = (\dots((a_1, a_2), a_3), \dots, a_k).$$

Очевидно, что $L$ — нильпотентная алгебра Ли ступени нильпотентности $n-1$ с членами нижнего центрального ряда $\gamma_i(L) = \langle e_{i+1}, \dots, e_n \rangle$ при $i \geq 2$. Из структурных констант следует, что $L/\gamma_i(L) \cong L(i)$ для каждого $i = 3, 4, \dots$, причем образы элементов $e_1, \dots, e_i$ играют роль базиса в определении алгебры $L(i)$.

Пусть $G = G(n)$ — нильпотентная группа в соответствии Мальцева с $L = L(n)$. Как описано в § 2, считаем, что $G$ имеет то же подлежащее множество $G = L$ с групповыми операциями, определенными в терминах операций алгебры Ли $L$ формулами Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа (1) и (2) для произведений и коммутаторов. Заметим, что $G/\gamma_i(G) \cong G(i)$ для каждого $i = 3, 4, \dots$ в соответствии с вышеупомянутым свойством алгебры $L$.

**Лемма 3.** *Любой (сложный) групповой коммутатор от элементов $e_i^{c_i}$, $c_i \in \mathbb{Q}$, равен линейной комбинации лиевских коммутаторов от тех же элементов $e_i^{c_i} = c_i e_i$, каждый из которых имеет не меньшую кратность вхождения каждого элемента $c_j e_j$, что и исходный групповой коммутатор.*

Доказательство. Это следует непосредственно из повторного применения коммутаторной формулы (2). $\square$

Каждый элемент из $L$ (а значит, и из $G$) является линейной комбинацией базисных элементов $e_i$. Первый, с наименьшим индексом, член с ненулевым коэффициентом назовем *ведущим членом*: если $g = c_i e_i + c_{i+1} e_{i+1} + \cdots$ при $c_i \neq 0$, то ведущий член элемента $g$ равен $c_i e_i$. В записи $g = c_i e_i + \cdots$ всегда имеем в виду, что $c_i e_i$ — ведущий член элемента $g$.

**Лемма 4.** *Если $g = c_i e_i + \cdots$ и $h = d_j e_j + \cdots$ при $i \neq j$, то*

$$[g, h] = \begin{cases} (i-j)c_i d_j e_{i+j} + \cdots, & \textit{если } i+j \leq n, \\ 1 = 0, & \textit{если } i+j > n. \end{cases}$$

Доказательство. Результат непосредственно следует из структурных констант (3) и коммутаторной формулы (2). $\square$

Рассмотрим некоторые абстрактные 2-порожденные подгруппы группы $G$.

**Предложение 1.** *Существует $n$-ограниченное натуральное число $M(n)$ такое, что для любого натурального $M$, делящегося на $M(n)$, группа $F = F(M)$, порожденная как абстрактная группа элементами $e_1$ и $e_2^M$, обладает следующими свойствами:*

(а) *факторы $\gamma_i(F)/\gamma_{i+1}(F)$ бесконечные циклические для всех $i \geq 2$;*

(б) *$\gamma_i(F) = F \cap \gamma_i(G)$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$;*

(в) *$\gamma_i(F)/\gamma_{i+1}(F)$ порождается образом элемента $\big[e_2^M, \underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{i-1}\big]$ для каждого $i \geq 2$.*

(На самом деле для каждого $n$ нам понадобится только одно $M(n)$, но в доказательстве предложения индукцией по $n$ удобно иметь формально более сильное утверждение с делимостью.)

Доказательство. В силу леммы 4 и формул структурных констант (3)

$$\big[e_2^M, \underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{i-1}\big] = (Me_2, \underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{i-1}) + \cdots = M(i-1)!e_{i+1} + \cdots,$$

откуда ясно, что $\mathbb{Q}$-линейная оболочка этих элементов вместе с $e_1$ и $e_2^M = Me_2$ совпадает с $L$. Другими словами, $\sqrt{F} = G$ является пополнением Мальцева группы $F$. Отсюда следует, что $\sqrt{\gamma_i(F)} = \gamma_i(G)$. Поэтому $\sqrt{\gamma_i(F)}/\sqrt{\gamma_{i+1}(F)} \cong \mathbb{Q}$ при $i \geq 2$. Так как $\gamma_i(F)$ конечно порождены, п. (а) будет доказан, если покажем, что $\gamma_i(F)/\gamma_{i+1}(F)$ не имеет кручения при $i \geq 2$. Поскольку $G/\gamma_{i+1}(G)$ не имеют кручения, достаточно доказать п. (б), т. е. $\gamma_i(F) = F \cap \gamma_i(G)$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Воспользуемся индукцией, одновременно доказывая п. (в) и строя требуемое натуральное число $M(n)$ в ходе рассуждений. Ключевая лемма рассматривает $\gamma_{n-1}(F)$.

**Лемма 5.** *Существует $n$-ограниченное натуральное число $N(n)$ такое, что для любого натурального $N$, делящегося на $N(n)$, группа $F$, порожденная как абстрактная группа элементами $e_1$ и $e_2^N$, не имеет кручения в фактор-группе $F/\gamma_{n-1}(F)$ и, более того, $\gamma_{n-1}(F) = F \cap \gamma_{n-1}(G) = \big\langle \big[e_2^N, \underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{n-2}\big] \big\rangle$.*

Доказательство. Так как группа $G/\gamma_{n-1}(G)$ не имеет кручения, нам нужно доказать только второе утверждение. Из структурных констант (3) и леммы 3 ясно, что

$$\gamma_{n-1}(F) = \big\langle \big[e_2^N, \underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{n-2}\big] \big\rangle = \langle (n-2)!Ne_n \rangle$$

(где угловые скобки обозначают подгруппы, порожденные как абстрактные группы). Поскольку $\sqrt{\gamma_{n-1}(F)} = \gamma_{n-1}(G) = \mathbb{Q}\langle e_n \rangle$, также ясно, что нужно просто найти такое $N(n)$, что для любого $N$, делящегося на $N(n)$, выполняется следующее: для любого элемента $\alpha e_n \in F$ коэффициент $\alpha$ является целым числом, делящимся на $(n-2)!N$.

В силу обычных рассуждений собирательного процесса такой элемент $\alpha e_n \in F$ является произведением (целых) степеней (базисных) коммутаторов от порождающих $e_1$ и $e_2^N$ в некотором порядке, согласованном с возрастанием веса:

$$\alpha e_n = e_1^{k_1} \big(e_2^N\big)^{k_2} \big[e_2^N, e_1\big]^{k_3} \big[e_2^N, e_1, e_1\big]^{k_4} \big[e_2^N, e_1, e_2^N\big]^{k_5} \cdots \big[e_2^N, e_1, \ldots, e_1\big]^{k_z}, \quad (4)$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$.

Преобразуем правую часть в линейную комбинацию лиевских коммутаторов от $e_1$ и $e_2^N = Ne_2$. Сначала разложим (сложные) групповые коммутаторы многократным использованием коммутаторной формулы (2), а затем применим формулу произведения (1). В результате правая часть (4) становится линейной комбинацией лиевских коммутаторов от $e_2^N = Ne_2$ и $e_1$,

$$\alpha e_n = k_1 e_1 + k_2 N e_2 + \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i (Ne_2, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{i}) + \sum_i \mu_i \varkappa_i, \tag{5}$$

где кроме «линейной части» $k_1 e_1 + k_2 e_2$ мы также выделили коммутаторы $(Ne_2, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{i})$ с ровно одним вхождением $Ne_2$, в то время как $\varkappa_i$ — это другие лиевские коммутаторы от $Ne_2$ и $e_1$, содержащие не меньше двух вхождений $Ne_2$. Нам не важно, собраны ли коэффициенты при $\varkappa_i$, коль скоро это разложение возникло из применения формул для коммутаторов и произведений к правой части (4) — как вскоре увидим, с $\varkappa_i$ легко справиться.

Заметим, что в данный момент держим коэффициент $N$ при $e_2$ «внутри» лиевских коммутаторов, рассматривая и групповые коммутаторы в (4), и лиевские коммутаторы в (5) как коммутаторы от этих двух элементов $e_2^N = Ne_2$ и $e_1$.

Разумеется, каждый лиевский коммутатор в (5) равен кратному одного из базисных элементов $e_i$ в силу структурных констант (3), где индекс $i$ равен сумме индексов всех вхождений коммутатора, например, $(Ne_2, e_1, e_1, e_1, Ne_2) = 18N^2 e_7$. После приведения подобных в получающейся линейной комбинации элементов $e_1, \dots, e_n$ все коэффициенты при $e_i$ для $i < n$ должны, конечно, стать нулевыми, а коэффициент при $e_n$ должен стать равен $\alpha$. Значит, все члены в (5) с суммами индексов меньше $n$ должны сократиться.

Сразу заметим, что, когда формулы структурных констант (3) применяются к правой части (5), вклад в коэффициенты при $e_1$ и $e_2$ равен $k_1 e_1 + k_2 N e_2$. Поскольку в нашем построении $n \geq 3$, должны выполняться $k_1 = 0$ и $k_2 = 0$.

Наша задача — показать, что после применения формул структурных констант и приведения подобных (в результате чего должно получиться кратное элемента $e_n$) возникающий коэффициент $\alpha$ при $e_n$ будет целым числом, делящимся на $(n-2)!N$, как только $N$ делится на некоторое натуральное $N(n)$, которое определим в ходе доказательства. Проделаем это шаг за шагом, анализируя по отдельности коэффициенты $\lambda_i$ и $\mu_i$, из которых $\lambda_i$ доставят больше трудностей, а с $\mu_i$ разобраться легче.

Следует иметь в виду, что коэффициенты при лиевских коммутаторах в (5) являются, вообще говоря, рациональными, а не целыми числами. Однако знаменатели этих коэффициентов ограничены. Этот факт не вполне очевиден, поскольку формулы для произведений и коммутаторов (1), (2) применяются многократно; здесь мы выведем его из леммы 1, сформулированной для свободных нильпотентных $\mathbb{Q}$-алгебр Ли и $\mathbb{Q}$-степенных групп.

**Лемма 6.** *Существует $n$-ограниченное натуральное число $d = d(n)$ такое, что любой элемент любой абстрактной подгруппы $\langle g_1, g_2, \dots \rangle$ группы $G$ равен линейной комбинации лиевских коммутаторов от $g_1, g_2, \dots$ с рациональными коэффициентами, знаменатели которых делят $d$.*

Доказательство. Применим лемму 1 к абстрактной подгруппе $\mathscr{G}_0$ группы $\mathscr{G}$, порожденной элементами $x_1, x_2, \dots$ при $c = n-1$. Эта подгруппа является абстрактной свободной нильпотентной группой ступени нильпотентности $n-1$. Число $d = d(n)$, которое дает лемма 1, имеет требуемое свойство ввиду гомоморфизма алгебры $\mathscr{L}$ в $L$, продолжающего отображение $x_i \to g_i$, который является также гомоморфизмом группы $\mathscr{G}$ в $G$. $\square$

Пусть $\varkappa = \varkappa_i$ — один из лиевских коммутаторов от $Ne_2$ и $e_1$ в (5) по крайней мере с двумя вхождениями $Ne_2$. По лемме 6 коэффициент $\mu = \mu_i$ при $\varkappa$ равен $a/d$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}$. В самом деле, это слагаемое $\mu\varkappa$ появилось в разложении правой части (4), элемента абстрактной группы, порожденной $Ne_2$ и $e_1$.

Используя линейность коммутатора $\varkappa$ и два вхождения элемента $Ne_2$ в него, видим, что

$$\mu\varkappa = \frac{bN^2}{d} e_s \quad \text{для некоторого } b \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

где $s$ — сумма индексов всех вхождений из $\varkappa$, потому что структурные константы — целые числа. В частности, если $N$ делится на $(n-2)!d$, то после применения формул структурных констант все вклады коммутаторов $\varkappa_i$ в коэффициент при $e_n$ будут целыми числами, делящимися на $(n-2)!N$, что и требовалось.

Остается рассмотреть коэффициент $\lambda_{n-2}$ при лиевском коммутаторе $(Ne_2, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{n-2})$, вклад в который дает не только степень такого же группового коммутатора $\big[e_2^N, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{n-2}\big]$ в (4) (которая, конечно, не вызывает проблем, так как она дает вклад $(n-2)!Nk_ze_n$), но также «хвосты» других степеней групповых коммутаторов. Здесь *хвостом* степени группового коммутатора некоторого веса мы называем линейную комбинацию лиевских коммутаторов большего веса, возникающую в разложении путем многократного применения коммутаторной формулы (2). Подберемся к $\lambda_{n-2}$ по индукции, анализируя свойства всех $\lambda_i$ из (5).

Изменяя обозначения, будем считать, что $s_m$ — целый показатель степени коммутатора $\big[e_2^N, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{m}\big]$ в (4), так что $\big[e_2^N, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{m}\big]^{s_m}$ — соответствующий множитель в (4).

**Лемма 7.** *Коэффициент $\lambda_m$ при коммутаторе $(Ne_2, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{m})$ в правой части* (5) *равен сумме $s_m$ и коэффициентов при этом коммутаторе в хвостах сомножителей $\big[e_2^N, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{i}\big]^{s_i}$ при $i < m$.*

Доказательство. Когда коммутаторная формула (2) (многократно) применяется к каждому сомножителю в (4), по лемме 3 только коммутаторы $\big[e_2^N, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{j}\big]^{s_i}$ при $i \leq m$ имеют в своих разложениях $(Ne_2, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{m})$. По той же лемме соответствующий член в разложении $\big[e_2^N, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{m}\big]^{s_m}$ равен $s_m(Ne_2, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{m})$.

Так как $k_1 = k_2 = 0$, имеем дело только с коммутаторами от $x_1$ и $Ne_2 = e_2^N$, которые все включают $e_2$, так что любой коммутатор от таких коммутаторов включает не менее двух вхождений $Ne_2$. Поэтому последующее применение формулы произведения (1), очевидно, только суммирует вклады в коэффициент при $(Ne_2, \underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{m})$. $\square$

Покажем, что эти показатели $s_m$ должны «почти делиться» на $N$, так как только тогда будут возможны сокращения, необходимые для того, чтобы коэффициенты при $e_{m+2}$ для $m+2<n$ стали равны нулю после применения формул структурных констант.

**Лемма 8.** *При $m+2<n$ показатель $s_m$ можно записать в виде*

$$s_m = \frac{u_m N}{m! d^{m-3}} \quad \text{для некоторого } u_m \in \mathbb{Z},$$

*где $d$ — натуральное число из леммы* 6.

(Конечно, $s_m$ — целые числа, но нам нужно, чтобы сомножитель $N$ появился в числителе дроби со знаменателем, ограниченным в терминах $n$.)

Доказательство. Так как $k_1 = k_2 = 0$, вклад в коэффициент при $e_3$ после применения формул структурных констант (3) к (5) дает только ведущий член сомножителя $\left[e_2^N, e_1\right]^{k_3}$ в (4), и этот вклад равен $Nk_3e_3$. Здесь и далее многократно применяем леммы 3 и 4 без особых ссылок. Поэтому также $s_1 = k_3 = 0$ (если только не выполнено $n \le 3$, когда нечего доказывать о $s_1$).

Получается, что после применения формул структурных констант к правой части (5) вклад в коэффициент при $e_4$ дает только ведущий член сомножителя $\left[e_2^N, e_1, e_1\right]^{k_4}$ в (4), и этот вклад равен $2k_4Ne_4$. По лемме 7 есть еще и вклад от хвоста коммутатора $\left[e_2^N, e_1\right]^{s_1}$, но уже известно, что $s_1 = 0$. Поэтому $s_2 = k_4 = 0$ (если только не выполнено $n \le 4$, когда нечего доказывать о $s_2$).

Ситуация становится иной начиная с коэффициента при $e_5$. После применения формул структурных констант к правой части (5) коэффициент при $e_5$ равен сумме $3!s_3N$, что равно вкладу от слагаемого $s_3(Ne_2, e_1, e_1, e_1)$, ведущего члена сомножителя $\left[e_2^N, e_1, e_1, e_1\right]^{s_3}$ в (4), и единственного другого вклада от слагаемого $k_5(Ne_2, e_1, Ne_2) = k_5N^2(e_2, e_1, e_2) = k_5N^2e_5$, возникающего как ведущий член сомножителя $\left[e_2^N, e_1, e_2^N\right]^{k_5}$ в (4). (По лемме 7 нужно бы еще рассматривать хвосты коммутаторов $\left[e_2^N, e_1\right]^{s_1}$ и $\left[e_2^N, e_1, e_1\right]^{s_2}$, но уже знаем, что $s_1 = s_2 = 0$.) Таким образом, в предположении, что $n > 5$, должно выполняться равенство $3!s_3N + k_5N^2 = 0$, откуда

$$s_3 = \frac{-k_5N}{3!} = \frac{u_3N}{3!d^{3-3}} \tag{7}$$

при $u_3 = -k_5 \in \mathbb{Z}$, как и требуется.

Сделаем еще один шаг, до того как доказывать шаг индукции по $m$. После применения формул структурных констант к правой части (5) коэффициент при $e_6$ равен сумме $\lambda_4 4!N$ и коэффициентов, получающихся из некоторых лиевских коммутаторов по крайней мере с двумя вхождениями $Ne_2$. Последние вместе взятые дают вклад $b_4N^2/d$ при $b_4 \in \mathbb{Z}$ в силу (6). По лемме 7 имеем $\lambda_4 = s_4 + c_{43}s_3$, где $c_{43}(Ne_2, e_1, e_1, e_1, e_1)$ — слагаемое в хвосте коммутатора $\left[e_2^N, e_1, e_1, e_1\right]$ (а $s_3$ — показатель степени в сомножителе $\left[e_2^N, e_1, e_1, e_1\right]^{s_3}$ из (4)). По лемме 6 $c_{43} = t_{43}/d$ для $t_{43} \in \mathbb{Z}$. Предполагая, что $n > 6$, имеем нулевой коэффициент при $e_6$. Значит, используя предыдущую формулу (7), получаем

$$(s_4 + c_{43}s_3)4!N + \frac{b_4N^2}{d} = \left(s_4 + \frac{t_{43}u_3N}{3!d}\right)4!N + \frac{b_4N^2}{d} = 0,$$

откуда

$$s_4 = -\frac{b_4 N}{4!d} - \frac{t_{43} u_3 N}{3!d} = \frac{u_4 N}{4!d}$$

при $u_4 \in \mathbb{Z}$, что и требуется.

Докажем шаг индукции по $m$. После применения формул структурных констант к правой части (5) коэффициент при $e_{m+2}$ равен сумме $\lambda_m m!N$ и коэффициентов, получающихся из некоторых лиевских коммутаторов не менее чем с двумя вхождениями $Ne_2$. Последние дают вклад $b_m N^2/d$ для $b_m \in \mathbb{Z}$ в силу (6).

По лемме 7

$$\lambda_m = s_m + \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi} s_i,$$

где $c_{mi}(Ne_2, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{m})$ — слагаемое в хвосте коммутатора $\bigl[e_2^N, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{i}\bigr]$ (а $s_i$ — показатель степени сомножителя $\bigl[e_2^N, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{i}\bigr]^{s_i}$ из (4)). По лемме 6 имеем $c_{mi} = t_{mi}/d$ при $t_{mi} \in \mathbb{Z}$, а по предположению индукции $s_i = u_i N/i!d^{i-3}$ при $u_i \in \mathbb{Z}$. Так как коэффициент при $e_{m+2}$ в левой части (5) нулевой (если только не $m+2=n$, когда доказывать нечего), должно выполняться

$$\left(s_m + \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi} s_i\right) m!N + \frac{b_m N^2}{d} = \left(s_m + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{t_{mi} u_i N}{i!d^{i-2}}\right) m!N + \frac{b_m N^2}{d} = 0,$$

откуда

$$s_m = -\frac{b_m N}{m!d} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{t_{mi} u_i N}{i!d^{i-2}} = \frac{u_m N}{m!d^{m-3}}$$

при $u_m \in \mathbb{Z}$, что и требуется. $\square$

Теперь завершим доказательство леммы 5. Мы уже видели, что если $N$ делится на $(n-2)!d$, то $(n-2)!N$ делит вклад в коэффициент при $e_n$ от слагаемых $\mu_j \varkappa_j$ из (5), где лиевские коммутаторы $\varkappa_i$ имеют не менее двух вхождений $Ne_2$.

Остается рассмотреть $\lambda_{n-2}$. По лемме 7

$$\lambda_{n-2} = s_{n-2} + \sum_{i=1}^{n-3} c_i s_i,$$

где $c_i(Ne_2, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{m})$ — слагаемое в хвосте коммутатора $\bigl[e_2^N, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{i}\bigr]$ (а $s_i$ — показатель степени в сомножителе $\bigl[e_2^N, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{i}\bigr]^{s_i}$ из (4)). По лемме 6 имеем $c_i = t_i/d$ при $t_i \in \mathbb{Z}$, а по лемме 8 будет $s_i = u_i N/i!d^{i-3}$ при $u_i \in \mathbb{Z}$. Значит,

$$\lambda_{n-2}(Ne_2, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{n-2}) = \left(s_{n-2} + \sum_{i=1}^{n-3} c_i s_i\right)(n-2)!Ne_n$$

$$= \left(s_{n-2} + \sum_{i=1}^{n-3} \frac{t_i u_i N}{i!d^{i-2}}\right)(n-2)!Ne_n = \left(s_{n-2}(n-2)!N + \frac{uN}{(n-3)!d^{n-5}}(n-2)!N\right)e_n,$$

где $u \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что этот вклад в коэффициент при $e_n$ будет делиться на $(n-2)!N$, если $N$ делится на $(n-3)!d^{n-5}$. Итак, коль скоро $N$ делится на $(n-3)!d^{n-5}$ и на $(n-2)!d$, коэффициент $\alpha$ в (5) делится на $(n-2)!N$, что и требуется. $\square$

Чтобы завершить доказательство предложения 1, положим $M(n)$ равным произведению чисел $N(3), N(4), \dots, N(n)$, которые дает лемма 5. Воспользуемся индукцией по $n$, чтобы доказать, что это число $M(n)$ обладает требуемыми свойствами. Пусть $M$ — любое натуральное число, делящееся на $M(n)$.

В базисе индукции при $n = 3$ все три утверждения следуют из леммы 5.

При $n > 3$ фактор-группа $\mathbb{Q}$-степенной группы $G$ по $\gamma_{n-1}(G) = \mathbb{Q}e_n$ изоморфна $G(n-1)$ и находится в соответствии Мальцева с $L(n-1) \cong L(n)/\gamma_i(L(n)) = L(n)/\mathbb{Q}e_n$. Пусть черта обозначает образы в $G/\gamma_{n-1}(G)$. Так как $M$ также делится на $M(n-1)$, по индукции абстрактная группа $\overline{F} = \left\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2^M \right\rangle$ имеет бесконечные циклические факторы нижнего центрального ряда начиная со второго. Эти факторы изоморфны факторам нижнего центрального ряда $\gamma_i(F)/\gamma_{i+1}(F)$ группы $F$ при $i = 1, \dots, n-2$, так как $F \cap \gamma_{n-1}(G) = \gamma_{n-1}(F)$ по лемме 5. Вдобавок $\gamma_{n-1}(F)$ также бесконечная циклическая по той же лемме. Таким образом, п. (а) доказан.

Далее, по индукции $\gamma_i(\overline{F}) = \overline{F} \cap \gamma_i(\overline{G})$, что эквивалентно равенству

$$\gamma_i(F)\gamma_{n-1}(G) = (F \cap \gamma_i(G))\gamma_{n-1}(G), \tag{8}$$

потому что $\gamma_i(G) \geq \gamma_{n-1}(G)$. Поскольку $F \cap \gamma_{n-1}(G) = \gamma_{n-1}(F)$ по лемме 5, отсюда следует, что $\gamma_i(F) = F \cap \gamma_i(G)$. В самом деле, нужно только доказать, что $\gamma_i(F) \geq F \cap \gamma_i(G)$. Для любого $f \in F \cap \gamma_i(G)$ в силу (8) найдутся $z \in \gamma_{n-1}(G)$ и $g \in \gamma_i(F)$ такие, что $gz = f$, откуда $z = g^{-1}f \in F \cap \gamma_{n-1}(G) = \gamma_{n-1}(F) \leq \gamma_i(F)$ по лемме 5, так что $f = gz \in \gamma_i(F)$. Это доказывает п. (б).

Наконец, п. (в) следует из п. (б), предположения индукции для $\gamma_i(F)/\gamma_{i+1}(F)$ при $2 \leq i < n-1$ и из леммы 5 для $\gamma_{n-1}(F)$. $\square$

## § 4. Конечные $p$-группы

В § 3 доказано, что в $\mathbb{Q}$-степенной группе $G = G(n)$ абстрактная подгруппа $F = \left\langle e_1, e_2^M \right\rangle$ для любого $M$, делящегося на некоторое $n$-ограниченное число $M(n)$, является 2-порожденной нильпотентной группой без кручения ступени нильпотентности $n-1$ с циклическими факторами нижнего центрального ряда начиная со второго. В этом параграфе для любого данного простого числа $p$ рассматриваются конечные $p$-группы, являющиеся фактор-группами этих групп $F$ (для различных $n$). Эти фактор-группы образуют семейство требуемых примеров 2-порожденных конечных $p$-групп с циклическими факторами нижнего центрального ряда начиная со второго, в которых нет подгрупп $p$-ограниченной ступени разрешимости с фактор-группой $p$-ограниченного ранга.

В дальнейшем для данного $n$ мы выбираем натуральное $M = M(n)$, удовлетворяющее предложению 1. Легко также добиться, чтобы $M(n)$ делилось на $M(i)$ для всех $i \leq n$, например, полагая $M(n) = \prod\limits_{i=3}^{n} N(i)$ для $N(i)$, которые дает лемма 5. Тогда $M(n)$ будет также удовлетворять предложению 1 применительно к фактор-группе $G/\gamma_i(G)$, отождествляемой с группой $G(i)$, для любого $i \leq n$.

В качестве фактор-групп группы $F$, которые являются требуемыми конечными $p$-группами, возьмем группы $P = P(k) = F/F^{p^k}$ для натуральных $k$, которые будут выбираться достаточно большими в доказательствах. Так как $F$ порождается двумя элементами и имеет циклические факторы нижнего центрального ряда начиная со второго, такими же свойствами обладают группы $P$.

Будем использовать алгебру Ли $L$ для контроля подгрупп и секций группы $P$ и группы $F$, которая, напомним, есть абстрактная подгруппа $\mathbb{Q}$-степенной группы $G$, находящейся в соответствии Мальцева с $\mathbb{Q}$-алгеброй Ли $L$. Например, секцию группы $P$ можно рассматривать как секцию $Q/R$ абстрактной группы $G$, и если $R$ содержится как подмножество в некотором подмножестве $S \subseteq L$ и удается показать в $L$, что $Q \not\subseteq S$, то можно заключить, что $Q/R \neq 1$ в $P$, даже если, скажем, $S$ не содержится в $F$.

Удобно также ввести кольцо Ли ($\mathbb{Z}$-алгебру) $L_0$, порожденное базисными элементами $e_1, \dots, e_n$. В частности, так как все структурные константы (3) — целые числа, аддитивная группа $L_0$ является свободной абелевой группой ранга $n$ с базисом $e_1, \dots, e_n$.

**Лемма 9.** *Существует $n$-ограниченное натуральное число $D = D(n)$ такое, что для любого натурального $k$ подгруппа $F^k$, порожденная всеми $k$-ми степенями элементов группы $F$, содержится в $D^{-1}kL_0$.*

Доказательство. Этот факт следует из леммы 2 для свободных нильпотентных $\mathbb{Q}$-алгебры Ли $\mathscr{L}$ и $\mathbb{Q}$-степенной группы $\mathscr{G}$ со ступенью нильпотентности $c = n - 1$. Напомним, что $\mathscr{G}_0$ — абстрактная свободная нильпотентная группа ступени нильпотентности $n - 1$ на свободных порождающих $x_1, x_2, \dots$. Пусть $D = D(n)$ — число, которое дает лемма 2, так что

$$\mathscr{G}_0^k \subseteq D^{-1}k\mathscr{L}_0 \tag{9}$$

для любого натурального $k$. Отображение $x_1 \to e_1$, $x_2 \to e_2^M = Me_2$, $x_i \to 1 = 0$ при $i \geq 3$ продолжается до гомоморфизма группы $\mathscr{G}_0$ на $F$, группы $\mathscr{G}$ в $G$, кольца Ли $\mathscr{L}_0$ в $L_0$ и алгебры Ли $\mathscr{L}$ в $L$, и все эти гомоморфизмы согласованы на общих частях областей определения. Применяя эти гомоморфизмы к (9), получаем $F^k \subseteq D^{-1}kL_0$, что и требуется. (На самом деле образ кольца $\mathscr{L}_0$ под действием этого гомоморфизма несколько меньше, чем $L_0$, но используем $L_0$ для простоты.) $\square$

Нам удобнее следствие леммы 9 в терминах делимости на данное простое число $p$. Пусть $\mathbb{Q}_{p'}$ обозначает кольцо всех рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с $p$.

**Лемма 10.** *Существует $n$-ограниченное натуральное число $\varepsilon = \varepsilon(n)$ такое, что для любого натурального $k$ подгруппа $F^{p^k}$, порожденная всеми $p^k$-ми степенями элементов группы $F$, содержится в $p^{k-\varepsilon}\mathbb{Q}_{p'}L_0$.* $\square$

Для облегчения обозначений введем элементы $g_i = [e_2^M, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{i-2}]$ для $i \geq 3$. Ведущий член элемента $g_i$ в терминах $L$ равен $M(e_2, \underbrace{e_1, \dots, e_1}_{i-2}) = (i-2)!Me_i$. По предложению 1 образ элемента $g_i$ порождает $\gamma_{i-1}(F)/\gamma_i(F)$.

**Предложение 2.** *Пусть $s$ — натуральное число такое, что $s \leq n/2$.*

(a) *Секция $\gamma_s(F)/\gamma_{2s}(F)$ является свободной абелевой группой ранга $s$, свободно порожденной образами элементов $g_{s+1}, \dots, g_{2s}$.*

(б) *Существует $s$-ограниченное натуральное число $k_0(s)$ такое, что для любого натурального $k \geq k_0(s)$ секция $\gamma_s(P)/\gamma_{2s}(P)$ группы $P = F/F^{p^k}$ является абелевой $p$-группой ранга в точности $s$, порожденной образами элементов $g_{s+1}, \ldots, g_{2s}$.*

Доказательство. (а) Так как $\gamma_{2s}(F) = F \cap \gamma_{2s}(G)$ по предложению 1, можно считать, что $\gamma_{2s}(G) = 1$, что эквивалентно $\gamma_{2s}(L) = 0$ или $n = 2s$. Тогда элементы $g_{s+1}, \ldots, g_{2s}$, очевидно, перестановочны по лемме 4. Рассматривая ведущие члены элементов $g_i = (i-2)!Me_i + \cdots$, видим, что матрица размера $s \times s$ из коэффициентов элементов $g_{s+1}, \ldots, g_{2s}$ относительно базиса $e_{s+1}, \ldots, e_{2s}$ треугольная с ненулевыми элементами по диагонали. Значит, элементы $g_{s+1}, \ldots, g_{2s}$ линейно независимы (в $L$, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{Q}$). Это, в свою очередь, означает, что аддитивная подгруппа из $L$, порожденная $g_{s+1}, \ldots, g_{2s}$, свободная абелева на этих свободных порождающих. Остается воспользоваться тем, что для перестановочных элементов групповое умножение в $G$ совпадает со сложением в $L$ (см. (1)).

(б) Так как наша секция

$$\gamma_s(P)/\gamma_{2s}(P) = \gamma_s(F)F^{p^k}/\gamma_{2s}(F)F^{p^k} \cong \gamma_s(F)/(\gamma_s(F) \cap \gamma_{2s}(F)F^{p^k})$$

абелева в силу (а), достаточно доказать, что ее образ в $G/\gamma_{2s}(G)$ имеет нужное свойство. Поэтому можно считать, что $\gamma_{2s}(G) = 1$, что эквивалентно $\gamma_{2s}(L) = 0$ или $n = 2s$. Тогда наша секция становится изоморфной $\gamma_s(F)/(\gamma_s(F) \cap F^{p^k})$, так как $\gamma_{2s}(F) = F \cap \gamma_{2s}(G)$ по предложению 1. В силу п. (а) $\gamma_s(F) = \langle g_{s+1} \rangle \times \cdots \times \langle g_{2s} \rangle$ свободная абелева. Утверждение будет доказано, если показать, что $\gamma_s(F) \cap F^{p^k} \leq \gamma_s(F)^p$. Как видно из доказательства п. (а), элементы $g_{s+1}, \ldots, g_{2s}$ образуют базис векторного подпространства $\gamma_s(L)$ из $L$, которое натянуто на $e_{s+1}, \ldots, e_{2s}$. Кроме того, элементы $g_{s+1}, \ldots, g_{2s}$ выражаются через $e_{s+1}, \ldots, e_{2s}$ некоторыми формулами, зависящими только от $n = 2s$. Поэтому найдется $s$-ограниченное натуральное $m = m(s)$ такое, что

$$p^m E \subseteq \mathbb{Q}_{p'} \gamma_s(F)^p, \tag{10}$$

где $E$ — аддитивная подгруппа из $L$, порожденная $e_{s+1}, \ldots, e_{2s}$.

С другой стороны, по лемме 10 имеем $F^{p^k} \subseteq p^{k-\varepsilon}\mathbb{Q}_{p'}L_0$, откуда по предложению 1(б)

$$F^{p^k} \cap \gamma_s(F) = F^{p^k} \cap \gamma_s(G) = F^{p^k} \cap \gamma_s(L) \subseteq p^{k-\varepsilon}\mathbb{Q}_{p'}L_0 \cap \gamma_s(L) = p^{k-\varepsilon}\mathbb{Q}_{p'}E.$$

Сочетая это с (10), получаем, что если $k - \varepsilon \geq m$, т. е. $k \geq \varepsilon + m$, то

$$F^{p^k} \cap \gamma_s(F) \subseteq p^{k-\varepsilon}\mathbb{Q}_{p'}E \subseteq p^m \mathbb{Q}_{p'}E \subseteq \mathbb{Q}_{p'}\gamma_s(F)^p.$$

Тогда на самом деле $F^{p^k} \cap \gamma_s(F) \leq \gamma_s(F)^p$, что и требуется, так как конечная $p$-группа $\gamma_s(F)/\gamma_s(F)^p$ не имеет нетривиальных $p'$-элементов. □

Покажем, что группы $P$ для разных $n$ и $k$ дают требуемые примеры, путем использования их в доказательстве основной теоремы.

Доказательство теоремы. Рассуждаем от противного: предположим, что существуют функции $r(p)$ и $l(p)$ такие, что любая конечная 2-порожденная $p$-группа, у которой все факторы нижнего центрального ряда начиная со второго циклические, обязательно содержит нормальную подгруппу ступени разрешимости не выше $l(p)$ с фактор-группой ранга не выше $r(p)$.

Предположим, что $n$ и $s \leq n/2$ достаточно велики, так что $s \geq r(p)+1$. Предположим также, что $k$ достаточно велико в смысле предложения 2(б). Нам известно, что группы $P = F/F^{p^k}$, построенные выше, являются 2-порожденными конечными $p$-группами с циклическими факторами нижнего центрального ряда начиная со второго. По предположению группа $P$ имеет нормальную подгруппу $H$ такую, что $P/H$ имеет ранг не выше $r(p) < s$. По предложению 2 $\gamma_{s+1}(P)/\gamma_{2s}(P)$ — абелева $p$-группа ранга $s$, порожденная образами $\bar{g}_{s+1}, \dots, \bar{g}_{2s}$ элементов $g_{s+1}, \dots, g_{2s}$. Значит, образ подгруппы $H$ в $P/\gamma_{2s}(P)$ должен содержать по крайней мере один элемент вне подгруппы Фраттини группы $\gamma_s(P)/\gamma_{2s}(P)$. Отсюда следует, что $H$ накрывает хотя бы один из циклических факторов $\gamma_t(P)/\gamma_{t+1}(P)$ при $s \leq t \leq 2s-1$. В самом деле, выберем минимальное $t$ такое, что $s \leq t \leq 2s-1$ и

$$\bar{g}_{t+1}^{\alpha_{t+1}} \bar{g}_{t+2}^{\alpha_{t+2}} \cdots \in H\gamma_{2s}(P)/\gamma_{2s}(P) \quad \text{для } p \nmid \alpha_{t+1}.$$

Тогда $\bar{g}_{t+1} \in H\gamma_{t+1}(P)/\gamma_{2s}(P)$, и так как $\gamma_t(P)/\gamma_{t+1}(P)$ порождается образом элемента $g_{t+1}$ по предложению 1(в), получаем $\gamma_t(P) \leq H\gamma_{t+1}(P)$. Отсюда следует, что $\gamma_t(P) \leq H$, поскольку $H$ — нормальная подгруппа нильпотентной группы $P$. Но ступень разрешимости подгруппы $\gamma_t(P)$ можно сделать больше, чем $l(p)$, путем подходящего выбора $n$, $t$ и $k$, что приведет к противоречию.

Будем использовать стандартные коммутаторные слова, определяющие разрешимость данной ступени: $\delta_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ и по индукции

$$\delta_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_{2^{i+1}}) = [\delta_i(x_1, \dots, x_{2^i}), \, \delta_i(x_{2^i+1}, \dots, x_{2^{i+1}})].$$

По предположению подгруппа $H$ разрешима ступени не выше $l(p)$, что эквивалентно равенству $\delta_{l(p)}(h_1, \dots, h_{2^{l(p)}}) = 1$ для любых $h_i \in H$.

С другой стороны, в $F$ элементы $g_i$ имеют ведущие члены $(i-2)!Me_i$. По лемме 4 если $n$ достаточно велико, то значение коммутатора $\delta_{l(p)}(g_t, g_{t+1}, \dots, g_{t+2^{l(p)}-1})$ будет иметь ведущий член $\zeta e_w$ при $e_w \neq 0$, где индекс $w$ есть сумма индексов $w = \sum\limits_{i=t}^{i=t+2^{l(p)}-1} i$, а коэффициент $\zeta$ равен произведению коэффициентов $(i-2)!M(n)$, $i = t, t+1, \dots, t+2^{l(p)}-1$, умноженному на те разности индексов, которые возникают в силу структурных констант (3). Все эти разности индексов ненулевые, потому что индексы ведущих членов подкоммутаторов, возникающих в индуктивном вычислении коммутатора $\delta_{l(p)}(g_t, g_{t+1}, \dots, g_{t+2^{l(p)}-1})$, все различны. Ясно, что коэффициент $\zeta = \zeta(n, t, l(p))$ — натуральное число, ограниченное в терминах $n$, $t$ и $l(p)$.

Если вдобавок к условию $k \geq k_0(s)$ из предложения 2(б) число $k$ также настолько велико, что $p^{k-\varepsilon}$ не делит коэффициент $\zeta$, то образ коммутатора $\delta_{l(p)}(g_t, g_{t+1}, \dots, g_{t+2^{l(p)}-1}) = \zeta e_w + \cdots$ нетривиален в $P = F/F^{p^k}$, так как $F^{p^k} \subseteq p^{k-\varepsilon}\mathbb{Q}_{p'}L_0$ по лемме 10.

В результате приходим к противоречию, если

- $n/2 \geq s > r(p)$,
- $n \geq \sum\limits_{i=2s}^{i=2s+2^{l(p)}-1} i \geq \sum\limits_{i=t}^{i=t+2^{l(p)}-1} i$ для любого $t \leq 2s$,
- $k$ достаточно велико в смысле предложения 2(б), т. е. $k \geq k_0(s)$, и $p^{k-\varepsilon(n)}$ не делит коэффициент $\zeta(n, t, l(p))$.

Ясно, что эти условия можно удовлетворить одновременно: сначала выбрать $s = r(p)+1$, затем $n \geq \sum\limits_{i=2s}^{i=2s+2^{l(p)}-1} i$ (что также влечет $n \geq 2s$) и, наконец, достаточно большое $k$. $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Blackburn N.* On a special class of $p$-groups // Acta Math. 1958. V. 100. P. 45–92.
**2.** *Alperin J. L.* Automorphisms of solvable groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 175–180.
**3.** *Shepherd R.* $p$-Groups of maximal class: Ph. D. Thesis. Univ. of Chicago, 1971.
**4.** *Leedham-Green C. R., McKay S.* On $p$-groups of maximal class. I // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1976. V. 27. P. 297–311.
**5.** *Нерешенные задачи теории групп.* Коуровская тетрадь. 16-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СОРАН, 2006.
**6.** *Панферов Б. А.* Нильпотентные группы с факторами нижнего центрального ряда минимальных рангов // Алгебра и логика. 1980. Т. 19. С. 701–706.
**7.** *Kovács L. G., Leedham-Green C. R.* Some normally monomial $p$-groups of maximal class and large derived length // Quart. J. Math. (2). 1986. V. 37. P. 49–54.
**8.** *Хухро Е. И.* Конечные $p$-группы, допускающие автоморфизм порядка $p$ с малым числом неподвижных точек // Мат. заметки. 1985. Т. 38. С. 652–657.
**9.** *Макаренко Н. Ю.* О почти регулярных автоморфизмах простого порядка // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 5. С. 206–208.
**10.** *Shalev A.* On almost fixed point free automorphisms // J. Algebra. 1993. V. 157. P. 271–282.
**11.** *Хухро Е. И.* Конечные $p$-группы, допускающие $p$-автоморфизм с малым числом неподвижных точек // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 12. С. 53–64.
**12.** *Medvedev Yu.* $p$-Divided Lie rings and $p$-groups // J. London Math. Soc. (2). 1999. V. 59. P. 787–798.
**13.** *Jaikin-Zapirain A.* On almost regular automorphisms of finite $p$-groups // Adv. Math. 2000. V. 153. P. 391–402.
**14.** *Хайкин-Запирайн А., Хухро Е. И.* О связи между нильпотентными группами и кольцами Ли // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1203–1218.

*Статья поступила 8 октября 2012 г.*

Хухро Евгений Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`khukhro@yahoo.co.uk`