*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1*

*УДК 519.44/45*

# О ГРУППАХ ШУНКОВА, ДЕЙСТВУЮЩИХ СВОБОДНО НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

**А. И. Созутов**

**Аннотация.** Доказано существование локально конечной периодической части в группе Шункова ранга 1 с разрешимыми конечными подгруппами, в группе Шункова, действующей свободно на абелевой группе, и в группах аффинных преобразований почти-областей с конечными элементами.

**Ключевые слова:** условия конечности, конечный элемент, группа Шункова, регулярный автоморфизм, почти-область, почти-поле, точно дважды транзитивная группа.

*К семидесятилетию Виктора Даниловича Мазурова*

Любая пара инволюций в периодической группе порождает конечную подгруппу. Этот простой фундаментальный факт лежит в основе многих результатов о строении периодических и смешанных групп с инволюциями, из него выросло понятие сопряженно бипримитивно конечных групп [1], называемых *группами Шункова.* В последнее время активно и плодотворно изучаются группы автоморфизмов, порожденные элементами малых порядков [2–14], в некоторых из них выполняется то же условие конечности, что и в группах Шункова. В. Д. Мазуров обратил мое внимание на статью [14], в теореме 1 которой доказана локальная конечность бинарно конечной группы, действующей свободно на абелевой группе. В следствиях 2, 3 из [14] установлены локальная конечность почти-поля с бинарно конечной мультипликативной группой и бинарно конечной точно дважды транзитивной группой. Исследования в [14] опирались на результаты статей [4, 5, 9, 15]. В настоящей работе доказано, что результаты из [14] справедливы при более слабых ограничениях.

**Теорема 1.** *Группа Шункова ранга* 1 *с разрешимыми конечными подгруппами обладает локально конечной периодической частью.*

Теорема 2 является обобщением теорем 1 и 3 из [15] и теоремы 1 из [14].

**Теорема 2.** *Группа Шункова, действующая свободно на абелевой группе, обладает локально конечной периодической частью.*

Как известно [16–18], каждой точно дважды транзитивной группе $T$ соответствует почти-область $F = F(+,\cdot)$, для которой $T$ есть группа $T_2(F)$ аффинных преобразований $x \to a + bx$ ($b \neq 0$), и, наоборот, группа $T_2(F)$ аффинных преобразований $x \to a + bx$ ($b \neq 0$) каждой почти-области $F$ точно дважды

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00509–а).

транзитивна. Если $T_2(F)$ обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой, то почти-область $F$ является почти-полем. Следующая теорема обобщает теорему 2 из [17] и дает частичный ответ на вопросы 11.52, 12.48 В. Д. Мазурова из [19].

**Теорема 3.** *Если в группе $T_2(F)$ аффинных преобразований почти-области $F$ есть конечный элемент порядка $> 2$, то $T_2(F)$ обладает нормальной регулярной абелевой подгруппой и почти-область $F$ является почти-полем конечной характеристики.*

Мультипликативная группа почти-поля действует свободно на его аддитивной группе. Из теорем 2, 3 вытекает

**Следствие 1.** *Если группа $T_2(F)$ аффинных преобразований почти-области $F$ является группой Шункова и $\mathrm{Char}\, F \neq 2$, то $T_2(F)$ обладает локально конечной периодической частью и регулярной элементарной абелевой нормальной подгруппой, а почти-область $F$ является почти-полем конечной характеристики.*

Применяя следствие 3 из [14], получаем

**Следствие 2.** *Бесконечная периодическая точно дважды транзитивная группа Шункова $G$ локально конечна, и*

$$G \leq \mathrm{A\Gamma L}\,(1, F) := \{x \to a\alpha(x) + b \mid a, b \in F,\ a \neq 0,\ \alpha \in \mathrm{Aut}\, F\}$$

*для некоторого локально конечного поля $F$.*

## 1. Доказательство теоремы 1

Группа называется *бинарно конечной* (по [14] — 2-*конечной*), если любые два элемента в ней порождают конечную подгруппу. Напомним определения более слабых условий конечности. Неединичный элемент $a$ группы $G$ называется *конечным*, если в $G$ конечны все подгруппы вида $\langle a, a^g\rangle$. Так, в *слабо сопряженно бипримитивно конечной* группе по определению конечен каждый элемент простого порядка. Если в группе $G$ каждая секция по конечной подгруппе слабо сопряженно бипримитивно конечна, то $G$ называется *группой Шункова.* Несложно доказывается

**Предложение 1.1** [20]. *Класс групп Шункова замкнут относительно операций взятия подгрупп и гомоморфных образов по конечным, черниковским и центральным периодическим подгруппам.*

Группу, в которой все элементарные абелевы подгруппы циклические, называем *группой ранга* 1. Согласно теореме 12.5.2 из [21] конечная $p$-группа ранга 1 является либо циклической, либо (обобщенной) группой кватернионов (и $p = 2$). Хорошо известны следующие свойства конечных примарных групп ранга 1.

**Предложение 1.2.** *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *группа автоморфизмов циклической 2-группы порядка $> 2$ и обобщенной группы кватернионов порядка $\geq 16$ являются 2-группами;*

(2) *группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, Q$ группы кватернионов $Q$ порядка 8 содержит элемент порядка 3;*

(3) *любой $p'$-автоморфизм циклической $p$-группы действует свободно на ее подгруппе порядка $p$.*

Следующее фольклорное предложение легко доказывается при помощи нормализаторного процесса и упомянутой выше теоремы 12.5.2 из [21].

**Предложение 1.3.** *Бесконечная $p$-группа Шункова ранга 1 является либо квазициклической (локально циклической), либо обобщенной группой кватернионов и $p = 2$.*

Группа обладает периодической частью, если все ее элементы конечных порядков составляют подгруппу. Так, в мультипликативной группе любого (коммутативного) поля элементы конечных порядков составляют подгруппу — периодическую часть. Группы Шункова в отличие от бинарно конечных групп не обязаны быть периодическими, более того, известен пример 3-ступенно разрешимой группы Шункова [22], не обладающей периодической частью, все элементы конечных порядков которой 2-элементы.

**Предложение 1.4** [15, лемма 10]. *Группа Шункова с локально циклическими силовскими подгруппами обладает локально конечной периодической частью.*

Пусть группа $G$ — контрпример к теореме 1. Непосредственно из предложения 1.4 следует

**Предложение 1.5.** *Среди 2-подгрупп группы $G$ есть группа кватернионов.*

**Предложение 1.6.** *В $G$ есть элементы конечных нечетных порядков.*

Доказательство. Предположим, что каждый элемент конечного порядка из $G$ является 2-элементом, и пусть $K$, $M$ — различные максимальные 2-подгруппы из $G$. Понятно, что $1 \neq O_2(G) \leq D_1 = K \cap M$. Выберем элементы $a \in N_M(D) \setminus D$, $b \in N_K(D) \setminus D$, квадраты которых принадлежат $D$, и рассмотрим подгруппу $L = \langle a, b, D\rangle$. Ввиду условий $L$ — конечная 2-подгруппа, и если $L$ — циклическая группа, то $L = \langle a\rangle = \langle b\rangle$, что невозможно. Значит, $L$ — группа кватернионов. Пусть $N$ — максимальная 2-подгруппа из $G$, содержащая подгруппу $L$. Так как $L \nleq K$, $L \nleq M$, $L \cap M \neq D$ и $L \cap K \neq D$, то $D$ — собственная подгруппа пересечения $K \cap N$. Из этого заключаем, что подгруппа $K$ и любая максимальная 2-подгруппа группы $G$ бесконечны и среди максимальных 2-подгрупп группы $G$ найдется подгруппа $M \neq K$ с пересечением $D = K \cap M$ порядка $\geq 16$. Группа $\langle K, M\rangle$, очевидно, не обладает периодической частью, и без ограничения общности можем считать $G = \langle K, M\rangle$. Поскольку $D$ либо (локально) циклическая группа, либо группа кватернионов, $D$ содержит характеристическую циклическую подгруппу $\langle c\rangle$ порядка $\geq 8$, нормальную в $K$ и $M$. Следовательно, подгруппа $\langle c\rangle$ нормальна в $G$, и ввиду свойств групп кватернионов $c^b = c^{-1}$ для любого элемента $b$ порядка 4 из $G \setminus \langle c\rangle$. Значит, подгруппа $V = C_G(a)$ содержит единственную подгруппу порядка 4, любая конечная подгруппа в $V$ циклическая, и в силу предложения 1.4 $C$ обладает периодической частью $C \simeq C_{2^\infty}$. Теперь нетрудно убедиться, что любой 2-элемент $b$ из $G \setminus C$ имеет порядок 4, при этом подгруппа $Q = C \cdot \langle b\rangle$ — обобщенная группа кватернионов и периодическая часть группы $G$. Полученное противоречие означает, что $\pi(G) \neq \{2\}$.

**Предложение 1.7.** *Если конечная разрешимая группа $L$ ранга 1 порождена элементами простого порядка $p \neq 2$, то $L$ — группа одного из типов:*

*(1) $L = \langle a\rangle$ — циклическая группа порядка $p$;*

*(2) $L = \langle b\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с циклическим ядром $\langle b\rangle$ и дополнением $\langle a\rangle$, $(|b|, |a|) = 1$ и $|a| = p$;*

(3) $L = Q \rtimes H$, *где* $H$ — $2'$*-группа типа* 1 *или* 2 *предложения,* $Q$ — *группа кватернионов порядка* 8 *с инволюцией* $z$*, принадлежащей центру* $Z(L)$*, и* $\overline{L} = L/\langle z\rangle$ — *группа Фробениуса с абелевым ядром и дополнением* $\langle\bar{a}\rangle$ *порядка* $p = 3$.

Доказательство. Пусть $|a| = p$ и $L = \langle a^L\rangle$ — минимальный контрпример. В силу условий $L = F \rtimes \langle a\rangle$, где $F = O_{p'}(L)$, и в $L$ есть нормальная подгруппа $T \leq F$ простого порядка $q \neq p$. Поскольку $a^L$ содержится в подгруппе $[a, F] \rtimes \langle a\rangle$, то $[a, F] = F$, и если подгруппа $F$ абелева, то она циклическая и $L$ — группа Фробениуса с ядром $F$ вопреки предположению. Из теорем 9.4.3, 12.5.2 в [21] выводим, что $2 \in \pi(F)$ и силовская 2-подгруппа $Q$ в $F$ есть группа кватернионов. Если $F = Q$ — 2-группа, то по предложению 1.2 $F$ — группа кватернионов порядка 8, $|a| = 3$ и $L$ не контрпример. Итак, $F$ не абелева и не 2-группа. Если $q \neq 2$ и $C_L(T)$ содержит элемент порядка $p$, то $a^L \subseteq C_L(T)$ и $T \leq Z(L)$. Но тогда силовская $q$-подгруппа $S$ содержится в $Z(L)$ и в силу теоремы 14.3.1 из [21] $L = S \times O_{q'}(L)$, что невозможно. Следовательно, подгруппа $\langle a\rangle$ действует на подгруппе $T$ свободно. Поскольку все условия предложения выполняются для фактор-группы $\overline{L} = L/T$, то $\overline{L}$ — группа типа 3 и $|a| = 3$. Понятно, что инволюция $z$ из $Q$ не может инвертировать $T$ и подгруппа $\langle z, T\rangle$ нормальна в $L$. Значит, $\langle z\rangle = Z(L)$, а фактор-группа $L/Z(L)$ — группа Фробениуса. Но тогда $L$ — группа типа 3; противоречие. Таким образом, $q = 2$, и $T = \langle z\rangle$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в $L$. Обозначим через $V$ прообраз минимального нормального делителя из $L/T$. Из доказанного выше следует, что $V$ — 2-группа. Если $V$ — циклическая группа, то каждый элемент порядка 4 из $Q \setminus V$ инвертирует $V$, а из равенства $L = \langle a^L\rangle$ следует $V \leq Z(L)$; противоречие. Значит, $V$ — группа кватернионов, и по предложению 1.2 $|V| = 8$, $|a| = 3$. Но тогда $L/V$ — группа ранга 1, $L/V$ — $2'$-группа типа 2 предложения и $L/T$ — группа Фробениуса с абелевым ядром. Значит, $L$ — группа типа 3; окончательное противоречие. Рассмотрев все случаи, приходим к выводу, что предложение верно.

**Предложение 1.8** [15, лемма 5]. *Пусть* $X$ — *группа ранга* 1, $a$ — *элемент простого порядка* $p \neq 2$ *из* $X$ *и все подгруппы* $L_g = \langle a, a^g\rangle$ *в* $X$ *конечны и не содержат группы кватернионов. Тогда либо* $X = N_X(\langle a\rangle)$*, либо* $X = F \rtimes N_X(\langle a\rangle)$ *и* $F \rtimes \langle a\rangle$ — *группа Фробениуса с периодическим локально циклическим ядром* $F$*, в частности,* $\langle a^G\rangle$ — *локально конечная группа.*

Обозначим через $R$ локально конечный радикал группы $G$.

**Предложение 1.9.** *Если* $P$ — *бесконечная силовская* $p$*-подгруппа из* $R$ *и* $p > 3$*, то* $P$ *нормальна в* $G$ *и* $p \notin \pi(G/R)$.

Доказательство. Предположим противное, и пусть $\langle c\rangle$ — максимальная нормальная в $G$ $p$-подгруппа, содержащаяся в $R$. Понятно, что $\langle c\rangle \leq P$, и поскольку по предложению 1.1 $G/\langle c\rangle$ есть группа Шункова и ранг фактор-группы $G/\langle c\rangle$, очевидно, равен 1, можно считать, что $c = 1$. Пусть $a$ — элемент порядка $p$ из $P$. По условиям теоремы все подгруппы $L_g = \langle a, a^g\rangle$ конечны и разрешимы, и по предложению 1.7 для $g \in G \setminus N_G(\langle a\rangle)$ подгруппы $L_g$ суть группы Фробениуса с циклическим ядром $F_g$ и дополнением $\langle a\rangle$. По предложению 1.8 $G = F \rtimes N_G(\langle a\rangle)$ и $F \rtimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с периодическим локально циклическим ядром $F$. Но квазициклическая группа $P$ действовать свободно на локально конечной локально циклической группе не может. Следовательно, $P$ нормальна в $G$. Далее, если в $G/R$ есть $p$-элемент, то в $G \setminus P$ есть $p$-элемент $b$

и $p$-подгруппа $P \cdot \langle b \rangle$. Однако это противоречит теореме 12.5.2 из [21]. Предложение доказано.

**Предложение 1.10.** *Пусть $p \in \pi(G)$, $p > 3$ и $a$ — $p$-элемент из $G$ такой, что $\langle a^G \rangle \neq \langle a \rangle$. Тогда $\langle a^G \rangle \leq R$, $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$ и $q-1$ делится на $p$ для каждого $q \in \pi(F)$.*

Доказательство. Пусть $a$ — $p$-элемент наименьшего порядка из $G$, для которого предложение неверно. Тогда нормальное замыкание $T$ элемента $a^p$ либо совпадает с $\langle a^p \rangle$, либо равно $F_1 \leftthreetimes \langle a^p \rangle \leq R$, $G = F_1 \leftthreetimes N_G(\langle a^p \rangle)$, и ввиду предложения 1.2 $p$ делит $q-1$ для каждого $q \in \pi(F_1)$. Понятно, что фактор-группа $\overline{G} = G/T$ имеет ранг 1, все ее подгруппы $\langle \bar{a}, \bar{a}^{\bar{g}} \rangle$ конечны и разрешимы, при этом $\overline{G} \neq N_{\overline{G}}(\langle \bar{a} \rangle)$. По предложениям 1.7, 1.8 $\overline{G} = \overline{F} \leftthreetimes N_{\overline{G}}(\langle \bar{a} \rangle)$, $\overline{F} \leftthreetimes \langle \bar{a} \rangle$ — группа Фробениуса с локально конечным локально циклическим ядром $\overline{F}$ и дополнением $\langle \bar{a} \rangle$. В частности, $p$ делит $q-1$ для любого $q \in \pi(\overline{F})$, и случай $T = 1$ сразу приводит к противоречию. Пусть $T = \langle a^p \rangle$ и $F$ — полный прообраз подгруппы $\overline{F}$ в $G$. В этом случае ясно, что $T \leq Z(F)$ и $F = T \times O_{p'}(F)$. Поэтому $\langle a^G \rangle = O_{p'}(F) \leftthreetimes \langle a \rangle \leq R$, что снова противоречит предположению. Пусть, наконец $T = F_1 \leftthreetimes \langle a^p \rangle$. Как и выше, заключаем, что $F/F_1 = \langle a^p F_1 \rangle / F_1 \times O_{p'}(F/F_1)$ и $G = O_{p'}(F) \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$ не контрпример. Следовательно, доказываемое предложение верно.

Обозначим через $\pi'$ множество $\pi(G) \setminus \{2,3\}$.

**Предложение 1.11.** *Имеет место равенство $O_{\pi'}(R) = O_{\pi'}(G)$, при этом $\pi(G/O_{\pi'}(G)) = \{2,3\}$ и фактор-группа $G/O_{\pi'}(G)$ является группой Шункова ранга* 1.

Доказательство. Пусть $p \in \pi(G)$ и $p > 3$. В силу предложения 1.10 каждый $p$-элемент группы $G$ содержится в $O_{\pi'}(R)$, следовательно, $O_{\pi'}(G) = O_{\pi'}(R)$ и ввиду предложений 1.6, 1.9 $\pi(G/O_{\pi'}(G)) = \{2,3\}$. Пусть $\overline{L}$ — конечная подгруппа в $\overline{G} = G/O_{\pi'}(G)$. По теореме Шмидта ее полный прообраз $L$ в $G$ локально конечен и $L = MO_{\pi'}(G)$ для подходящей конечной подгруппы $M$ из $G$. Поскольку $M$ разрешима, в силу теорем Силова и Холла [21] $M = O_{\pi'}(M) \leftthreetimes H$, где $H$ — холловская $\{2,3\}$-подгруппа из $M$. Если $K$ — любая холловская $\{2,3\}$-подгруппа из $L$, то она конечна и сопряжена с $H$ в конечной разрешимой подгруппе $\langle H, K \rangle \leq L$. По обобщенной лемме Фраттини $N_G(L) = O_{\pi'}(G) N_G(H)$ и $N_G(L)/O_{\pi'}(G) \simeq N_G(H)/(N_G(H) \cap O_{\pi'}(G))$. Если $\bar{a}, \bar{a}^{\bar{g}}$ — элементы простого порядка $p$ из $N_{\overline{G}}(\overline{L})/\overline{L}$, то $p \in \{2,3\}$ и $\bar{a}, \bar{a}^{\bar{g}}, \bar{g}$ являются образами подходящих элементов $a, a^g, g \in N_G(H)$, причем $a^p \in H$. По условиям теоремы подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из $G$ конечна, значит, конечна и подгруппа $\langle \bar{a}, \bar{a}^{\bar{g}} \rangle$ из фактор-группы $N_{\overline{G}}(\overline{L}/\overline{L})$. Следовательно, $\overline{G}$ является группой Шункова. Поскольку примарные подгруппы из $\overline{G}$ изоморфны соответствующим примарным подгруппам группы $G$, ранг группы $\overline{G}$ равен 1.

Завершим доказательство теоремы 1. Ввиду предложения 1.11 считаем, что $\pi(G) = \{2,3\}$. Пусть $P$ — максимальная нормальная в $G$ 3-подгруппа. В силу предложений 1.3, 1.1 $G/P$ является группой Шункова ранга 1 и контрпримером к теореме. Поэтому считаем, что $P = 1$. Пусть $a$ — элемент порядка 3 из $G$. Тогда $N_G(\langle a \rangle) \neq G$ и для любого $g \in G \setminus N_G(\langle a \rangle)$ подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ есть группа типа (3) предложения 1.7, более конкретно, $L_g = Q \leftthreetimes \langle a \rangle$, где $Q$ — группа кватернионов порядка 8 с инволюцией $z$. Если в $G$ инволюция $z$ единственная, то в силу теоремы Шункова [23] $F = \bigcup\limits_{g \in G} Q_g$ — нормальная в $G$ подгруппа и

$F/\langle z\rangle$ — группа периода 2. Но тогда $F$ локально конечна, $F = Q$ и в $G/Q$ силовские 2-подгруппы циклические порядка $\leq 2$. По предложению 1.4 $G/Q$ обладает локально конечной периодической частью и $G$ не является контрпримером к теореме.

Пусть инволюция $z$ в $G$ не одна. Тогда $C_G(z) \neq G$ и для любой инволюции $t \in G$ произведение $tz$ является 3-элементом. Пусть $t$ — инволюция, выбранная за пределами подгруппы $N_G(\langle a\rangle)$. Тогда, взяв в качестве элемента $g$ инволюцию $t$, последовательно получим $L_g = L_t$, $t \in N_G(L_t)$, $tz = zt$, $z = t$ и $L_t = \langle a\rangle$; противоречие. Значит, все инволюции из $G$ содержатся в подгруппе $N_G(\langle a\rangle)$, а поскольку их попарные произведения имеют нечетные порядки, все они сопряжены в $N_G(\langle a\rangle)$. Из $za = az$ заключаем, что все инволюции из $G$ содержатся в $C_G(a)$. Однако в качестве элемента $a$ изначально мы могли взять элемент, инвертируемый некоторой инволюцией из $G$; окончательное противоречие. Следовательно, контрпримера к теореме 1 не существует, и теорема доказана.

## 2. Доказательство теоремы 2

Группа $G$ *действует свободно* на группе $A$, если для $a \in A$, $g \in G$ равенство $a^g = a$ имеет место только тогда, когда хотя бы один из элементов $a, g$ единичен. Этот термин, предложенный В. Д. Мазуровым, не имеет других толкований в отличие от используемых ранее «группы регулярных автоморфизмов абелевой группы» и «группы, действующей без неподвижных точек на абелевой группе». Строение конечных групп, свободно действующих на абелевых группах, хорошо известно (см., например, [24, 25]), оно такое же, как у неинвариантных множителей в конечных группах Фробениуса. Согласно теоремам из [25, с. 635] имеют место следующие предложения.

**Предложение 2.1.** *Разрешимая конечная группа $G$, свободно действующая на абелевой группе, является группой одного из следующих типов:*

(1) *$G$ — циклическая группа;*

(2) *$G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $(|a|, |b|) = 1$, $\langle a\rangle = G'$ и все элементы простых порядков из $\langle b\rangle$ лежат в центре $G$;*

(3) *$G = H \leftthreetimes Q$, где $H$ — группа нечетного порядка одного из типов 1, 2, $Q$ — (обобщенная) группа кватернионов с инволюцией $t$, принадлежащей центру $G$;*

(4) *$G = Q \leftthreetimes H$, где $H$ — группа нечетного порядка одного из типов 1, 2, $Q$ — группа кватернионов 8-го порядка;*

(5) *$G$ содержит подгруппу индекса 2 типа 4 и силовская 2-подгруппа из $G$ есть обобщенная группа кватернионов порядка 16.*

**Предложение 2.2.** *Неразрешимая конечная группа $G$, свободно действующая на абелевой группе, содержит в качестве подгруппы индекса $\leq 2$ подгруппу $K = L \times H$, где $L \simeq SL(2, 5)$, $H$ — группа одного из типов 1, 2 предложения 2.1, порядок которой взаимно прост с 30.*

**Предложение 2.3** [15, теорема 1]. *Слабо сопряженно бипримитивно конечная группа $G$ тогда и только тогда свободно действует на абелевой группе, когда ее подгруппа $\Omega_1(G)$, порожденная всеми элементами простых порядков, есть группа одного из типов:*

(1) *$\Omega_1(G)$ — локально циклическая группа;*

(2) *$\Omega_1(G) = C \times S$, где $S \simeq SL_2(3)$, $C$ — локально циклическая $\{2, 3\}'$-группа;*

(3) $\Omega_1(G) = C \times S$, *где* $S \simeq SL_2(5)$, $C$ — *локально циклическая* $\{2,3,5\}'$-*группа.*

Пусть $G$ — контрпример к теореме 2.

**Предложение 2.4.** *Подгруппа* $O_2(G)$ *конечна и является циклической группой* $\langle z \rangle$ *порядка* 2.

Доказательство. Если подгруппа $O_2(G)$ бесконечна, то в силу предложения 1.3 она либо квазициклическая, либо обобщенная группа кватернионов. В первом случае силовские 2-подгруппы в фактор-группе $G/O_2(G)$, очевидно, имеют порядок 2, а во втором — тривиальны. По предложению 1.1 $G/O_2(G)$ есть группа Шункова, и ввиду предложения 1.4 $G/O_2(G)$ обладает локально конечной периодической частью $\overline{T}$. Но тогда полный прообраз $T$ подгруппы $\overline{T}$, очевидно, является периодической частью группы $G$ и локально конечен по теореме Шмидта, что противоречит выбору группы $G$. Значит, подгруппа $O_2(G)$ конечна.

Если $O_2(G)$ — группа кватернионов, то любая силовская 2-подгруппа $Q$ в $G$ содержит $O_2(G)$ и является группой кватернионов и $[Q : O_2(G)] \leq 2$. Как и выше, применяя предложения 1.1, 1.4 и теорему Шмидта, приходим к противоречию. Следовательно, $O_2(G) = \langle z \rangle$ — циклическая группа. Если $|z| \neq 2$, то ввиду предложения 2.3 каждый элемент порядка 4 из $G$ инвертирует $\langle z \rangle$ и в $C_G(z)$ силовские 2-подгруппы (локально) циклические. По предложению 1.4 $C_G(z)$ обладает локально конечной периодической частью $T_1$. Понятно, что $T_1$ нормальна в $G$, и легко показать, что фактор-группа $\overline{G} = G/T_1$ является группой Шункова с (локально) циклическими силовскими подгруппами. Применяя предложения 1.1, 1.4 и теорему Шмидта, приходим к противоречию. Значит, $|O_2(G)| = 2$, и предложение доказано.

**Предложение 2.5.** *Подгруппа* $\Omega_1(G)$ *локально циклическая.*

Доказательство. Из предложения 2.4 следует, что $\Omega_1(G)$ не является группой типа (2) из предложения 2.3. Пусть $\Omega_1(G) = C \times S$ — группа типа (3) из предложения 2.3 и $Q$ — силовская 2-подгруппа из $S$. По лемме Фраттини $G = S \cdot N_G(Q)$. Поскольку $G_1 = N_G(Q)$ — группа Шункова и $\Omega_1(G_1)$ — группа типа 2 из предложения 2.3, ввиду предложения 2.4 $G_1$ обладает локально конечной периодической частью $T_1$. По теореме Шмидта подгруппа $T = ST_1$ локально конечна и содержит все элементы конечного порядка из $G$, что противоречит выбору $G$. Следовательно, $\Omega_1(G)$ — локально циклическая группа.

Закончим доказательство теоремы 2. Из предложений 2.5, 2.3 и 2.2 следует, что все конечные подгруппы группы $G$ разрешимы, и согласно теореме 1 контрпримера к теореме 2 не существует. Теорема доказана.

## 3. Доказательство теоремы 3 и следствий

Группа $G$ подстановок множества $\Omega$ называется *точно дважды транзитивной*, если $|\Omega| \geq 3$ и любые две упорядоченные пары различных элементов множества $\Omega$ можно перевести друг в друга с помощью единственного элемента из $G$. В частности, в $G$ только единичная подстановка оставляет на месте две точки. На протяжении многих лет исследование точно дважды транзитивных групп велось в рамках теории почти-областей с использованием техники вычислений в этих алгебраических системах (см. монографию [16]). В. Д. Мазуров [17, 18] дал прямое теоретико-групповое доказательство некоторых ключевых результатов и постановкой вопросов 11.52, 12.48 в «Коуровской тетради» [19] привлек интерес автора к этой области исследований.

Пусть $T = T_2(F)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Поскольку $T$ точно дважды транзитивна на $F$ из [16, предложение V.1.2], отвлечемся от алгебраической структуры множества $F$ и определения элементов $t \in T$ как аффинных преобразований и сосредоточим внимание на точно дважды транзитивном действии $T$ на $F$ как группы подстановок. Результат действия подстановки $t \in T$ на элемент (точку) $\gamma \in F$ обозначаем через $\gamma^t$. Докажем несколько хорошо известных свойств группы $T$. Пусть $T_\alpha$ — стабилизатор точки $\alpha \in F$ и $t \in T \setminus T_\alpha$. Поскольку $\beta = \alpha^t \neq \alpha$, то $T_\alpha \cap T_\alpha^t = T_\alpha \cap T_\beta = 1$ и верно следующее утверждение.

**Предложение 3.1.** *$(T, T_\alpha)$ — пара Фробениуса, т. е. $T_\alpha \cap T_\alpha^t = 1$ для любого $t \in T \setminus T_\alpha$.*

В силу 2-транзитивности в $T$ есть подстановка $t$, переводящая упорядоченную пару $(\beta, \gamma)$ точек из $F$ в пару $(\gamma, \beta)$. Так как $t^2 \in T_\beta \cap T_\gamma$, по предложению 1.1 $t^2 = 1$ и инволюция $t$ однозначно определяется циклом $(\gamma, \beta)$. Из 2-транзитивности $T$ следует

**Предложение 3.2.** *Множество $J$ инволюций в $T$ непусто, и все инволюции сопряжены в $T$.*

Множество $J \setminus T_\alpha$, очевидно, также непусто и состоит из инволюций, содержащих цикл вида $(\alpha, \beta)$. Так как $T_\alpha$ транзитивна на $F \setminus \{\alpha\}$ и $(\alpha, \beta)^h = (\alpha, \beta^h)$ для $h \in T_\alpha$, справедливо

**Предложение 3.3.** *$T_\alpha$ действует сопряжениями транзитивно на множестве $J \setminus T_\alpha$.*

Пусть в $T_\beta$ $(\beta \neq \alpha)$ есть две инволюции $v$ и $s$. Тогда по предложению 3.3 $v = s^h$ для подходящего $h \in T_\alpha$ и по предложению 3.1 $h \in T_\beta$, $T_\alpha = T_\beta$; противоречие. Значит, верно следующее

**Предложение 3.4.** *Если в $T_\alpha$ есть инволюция $j$, то она единственна в $T_\alpha$, любая инволюция в $T$ однозначно определена точкой из $F$, которую она оставляет на месте, и $T$ действует сопряжениями на множестве $J$ всех своих инволюций точно дважды транзитивно.*

**Предложение 3.5.** *Произведение двух различных инволюций из $T$ является регулярной подстановкой. Если в $T_\alpha$ нет инволюций, то $T \setminus T_\alpha = T_\alpha J$ и $J \cap T_\alpha k = \{k\}$ для любой инволюции $k \in J$.*

Доказательство. Если $1 \neq kv \in T_\alpha$ для $k, v \in J$, то $kv \in T_\alpha \cap T_\alpha^k \cap T_\alpha^v$ и по предложению 3.1 $k, v \in T_\alpha$ вопреки предложению 3.4. Значит, $kv$ — регулярная подстановка. Далее, для любой точки $\beta \in F$ существует точно одна инволюция $k \in J$, переводящая $\alpha$ в $\beta$. Это доказывает вторую часть предложения.

Для произвольной инволюции $v \in J$ через $N_v^*$ обозначим множество всех строго вещественных относительно $v$ элементов из $T \setminus T_\beta$, где $v \in T_\beta$, и положим $N_v = N_v^* \cup \{1\}$.

**Предложение 3.6.** *Если в $T_\alpha$ есть инволюция $j$, то $T = T_\alpha J = T_\alpha N_v$ для любых $\alpha \in F$, $v \in J$, при этом для любого $x \in T$ имеют место равенства $|J \cap T_\alpha x| = |N_v \cap T_\alpha x| = 1$.*

Доказательство. Ввиду предложения 3.3 для любого $\beta \in F$ есть единственная инволюция $t \in J$ со свойством $\alpha^t = \beta$, значит, $T_\alpha J = T$, и поскольку

$N_v = Jv$, то $T = T_\alpha N_v$. Понятно, что $|J \cap T_\alpha x| = |N_v \cap T_\alpha x| = 1$ для любого $x \in T$.

**Предложение 3.7.** *Пусть в $T_\alpha$ есть инволюция, $k, v \in J$ и $k \neq v$. Тогда $kv \neq vk$, $k^t = v$ для однозначно определенной инволюции $t = t(v,k)$ из $J$ и все элементы из $J^2 \setminus \{1\}$ сопряжены в $T$.*

Доказательство. В силу предложения 3.4 $\{k\} = J \cap T_\beta$, $\{v\} = J \cap T_\gamma$ для подходящих различных $\beta, \gamma \in F$. Поэтому ввиду предложения 3.1 $kv \neq vk$, а искомая сопрягающая инволюция $t \in T$ однозначно определяется своим циклом $(\beta, \gamma)$. Если $r, s \in J$ и $s \neq r$, то в силу предложения 3.4 в $T$ есть такой элемент $g$, что $k^g = r$, $v^g = s$. Отсюда $(kv)^g = rs$, и предложение доказано.

Итак, если в $T_\alpha$ есть инволюция, то ввиду предложения 3.7 и свойств групп диэдра все неединичные элементы $vk \in J^2$ имеют один и тот же порядок: либо бесконечный, либо равный простому числу $p \neq 2$. В первом случае по определению (см., например, [16]) почти-область $F$ и группа $T$ имеют характеристику 0, во втором — $\mathrm{Char}\, F = \mathrm{Char}\, T = p$, если же в $T_\alpha$ нет инволюций, то $\mathrm{Char}\, F = \mathrm{Char}\, T = 2$.

Приступим к доказательству теоремы. По ее условиям в $T$ есть конечный элемент $a$ и $|a| > 2$. Так как для $k \in J$ подгруппа $\langle a, a^k \rangle$ конечна и $k \in N_T(L)$, справедливо

**Предложение 3.8.** *Для каждой инволюции $k \in T$ и любого $b \in a^G$ подгруппа $L_k = \langle b, k \rangle$ конечна.*

**Предложение 3.9.** *Если подстановка $a$ регулярна, то $T_\alpha$ содержит инволюцию, $a^T = N_k^*$ для любой инволюции $k$, $|a| = \mathrm{Char}\, T = p$ и $N_k$ — абелева нормальная подгруппа в $T$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in F$, $\beta = \alpha^a$ и $k$ — инволюция из $T$ такая, что $\alpha^k = \beta$, $\beta^k = \alpha$. Тогда $ak \in T_\alpha$ и по теореме Фробениуса $L_k$ — группа Фробениуса с дополнением $T_\alpha \cap L_k$ и ядром, содержащим элемент $a$. Поскольку $L_k$ порождена инволюцией $k$ и элементом $a$, заключаем, что $L_k = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle k \rangle$ и $T_\alpha$ содержит инволюцию. Но тогда ввиду предложений 3.7, 3.8 и теоремы Фробениуса $a \in N_v$ для любой инволюции $v \in J$, $|a| = \mathrm{Char}\, T$ — простое нечетное число и $N_v^* = N_k^* = a^T$. Если $b, c \in a^T$, то $b = tv$, $c = vs$ для подходящих инволюций $t, s$ и $bc \in N_s = N_k$. Значит, $N_k = N_v$ — подгруппа, инвертируемая каждой инволюцией из $T$. Это доказывает предложение.

**Предложение 3.10.** *Если $\mathrm{Char}\, T = 2$, то $A = J \cup \{1\}$ — абелева нормальная подгруппа группы $T$.*

Доказательство. Согласно предложению 3.9 элемент $a$ стабилизирует некоторую точку $\alpha \in F$ и $|a|$ — нечетное число. По предложению 3.8 и теореме Фробениуса для любой инволюции $k \in J$ и любого элемента $b$ простого порядка $p$ из $\langle a \rangle$ подгруппа $L = \langle b, k \rangle$ является конечной группой Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle b \rangle$ и ядром, содержащим $k$. По основной теореме из [26] объединение всех ядер групп $L_g = \langle b, b^g \rangle$ является нормальной в $T$ подгруппой $F_p$ и $G = F_p \leftthreetimes T_\alpha$. В силу предложения 3.5 $F_p = J \cup \{1\}$ и как группа периода 2 подгруппа $J \cup \{1\}$ абелева. Предложение доказано.

Завершим доказательство теоремы 3. Согласно предложениям 3.9, 3.10 осталось рассмотреть случай, когда $a \in T_\alpha$ для некоторой точки $\alpha \in F$ и $T_\alpha$ содержит инволюцию $j$. Если в $\langle a \rangle$ есть элемент $b$ нечетного простого порядка, то по основной теореме из [26] объединение всех ядер групп $L_g = \langle b, b^g \rangle$ является нормальной в $T$ периодической подгруппой $F_p$ и $T = F_p \leftthreetimes T_\alpha$. По предложению 3.4 $j$ — единственная инволюция в $T_\alpha$ и $T_\alpha = C_T(j)$. Значит, $N_j \subseteq F_p$, и в силу предложения 3.6 $F_p = N_j$. Поскольку $j$ по определению инвертирует $N_j$ и $J = jN_j$, то $N_j$ — абелева регулярная нормальная в $T$ подгруппа, и теорема доказана.

Пусть в $\langle a \rangle$ нет элементов нечетного порядка. Тогда $a$ — 2-элемент и тройка $(T, T_\alpha, a)$ удовлетворяет все условиям основной теоремы из [27]. По этой теореме в $T$ есть периодическое нормальное дополнение к подгруппе $T_\alpha$. Как показано выше, в этом случае $T$ обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой, а почти-область $F$ является почти-полем конечной нечетной характеристики. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Согласно [16, V.1.2] группа $T = T_2(F)$ точно дважды транзитивна на $F$. Так как $\operatorname{Char} T \neq 2$, стабилизатор $T_\alpha$ точки $\alpha \in F$ содержит инволюцию и по предложению 3.2 все инволюции в $T$ сопряжены. Поскольку $T$ — группа Шункова, элемент $kv$ имеет конечный порядок для любых различных инволюций $k, v \in T$. По предложению 3.7 $|kv| = p$ — простое нечетное число, и по определению групп Шункова $a = kv$ — конечный элемент группы $T$. Согласно теореме 3 $A = \langle a^T \rangle$ — регулярная элементарная абелева $p$-подгруппа в $T$, $T = A \leftthreetimes T_\alpha$ и $F$ является почти-полем характеристики $p$. По определению $T_\alpha$ — группа Шункова, и по теореме 2 $T_\alpha$ обладает локально конечной периодической частью $V$. Очевидно, что $A \leftthreetimes V$ — периодическая часть группы $T$, и следствие доказано.

Доказательство следствия 2. По [16, V.2.1] $G$ есть группа $T_2(F)$ аффинных преобразований подходящей почти-области $F$. Согласно следствию 3 из [14] достаточно доказать локальную конечность группы $G$. В случае $\operatorname{Char} F \neq 2$ это утверждение вытекает из следствия 1. Пусть $\operatorname{Char} F = 2$. Очевидно, что $G$ не 2-группа, и в силу периодичности $G$ содержит элемент $a$ нечетного простого порядка. По определению групп Шункова элемент $a$ конечен в $G$. По теореме 3 почти-область $F$ является почти-полем (характеристики 2) и группа $G = T_2(F)$ обладает регулярной элементарной абелевой 2-подгруппой $A$. В силу теоремы 2 и теоремы Шмидта $G$ локально конечна, и следствие доказано.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Шунков В. П.* Об одном классе $p$-групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 484–496.
2. *Mazurov V.* A new proof of Zassenhaus theorem on finite groups of fixed-point-free automorphisms // J. Algebra. 2003. V. 263, N 1. P. 1–7.
3. *Журтов А. Х.* О группах Фробениуса, содержащих элемент порядка 3 // Владикавк. мат. журн. 2000. Т. 2, № 2. С. 19–25.
4. *Журтов А. Х.* О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 329–338.
5. *Журтов А. Х.* О квадратичных автоморфизмах абелевых групп // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 320–328.
6. *Мазуров В. Д., Чуркин В. А.* О группе, свободно действующей на абелевой группе // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 888–891.
7. *Мазуров В. Д., Чуркин В. А.* О свободном действии группы на абелевой группе // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 600–608.
8. *Журтов А. Х.* Группы Фробениуса, порожденные двумя элементами порядка 3 // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 533–537.
9. *Журтов А. Х.* О группе, действующей локально свободно на абелевой группе // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 343–346.

**10.** *Журтов А. Х., Мазуров В. Д.* О группах Фробениуса, порожденных квадратичными элементами // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 3. С. 271–292.
**11.** *Мазуров В. Д.* Обобщение теоремы Цассенхауза // Владикавк. мат. журн. 2008. Т. 10, № 1. С. 40–52.
**12.** *Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.* О периодических группах, порожденных парой почти квадратичных автоморфизмов абелевой группы // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 599–603.
**13.** *Лыткина Д. В.* О периодических группах, действующих свободно на абелевой группе // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 379–387.
**14.** *Grundhöfer T., Jabara E.* Fixed-point-free 2-finite automorphism groups // Arch. Math. 2011. V. 97. P. 219–223.
**15.** *Созутов А. И.* О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 893-901.
**16.** *Wähling H.* Theorie der Fastkörper. Essen: Thalen Verl., 1987.
**17.** *Мазуров В. Д.* О дважды транзитивных группах подстановок // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 4. С. 102–104.
**18.** *Мазуров В. Д.* О точно дважды транзитивных группах // Вопросы алгебры и логики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. С. 233–236.
**19.** *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. 17-е изд. Новосибирск: Ин-т математики, 2012.
**20.** *Остыловский А. Н., Шунков В. П.* О локальной конечности одного класса групп с условием минимальности для подгрупп // Исследования по теории групп. Красноярск: ИФ СО АН СССР, 1975. С. 32–48.
**21.** *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
**22.** *Череп А. А.* О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 518–521.
**23.** *Шунков В. П.* Об одном признаке непростоты групп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 5. С. 491–522.
**24.** *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
**25.** *Старостин А. И.* О группах Фробениуса // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, № 5. С. 629–639.
**26.** *Созутов А. И., Шунков В. П.* Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Мат. сб. 1976. Т. 100, № 4. С. 495–506.
**27.** *Попов А. М., Созутов А. И.* О группах с $H$-фробениусовым элементом четного порядка // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 70–80.

*Статья поступила 11 октября 2012 г.*

Созутов Анатолий Ильич
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041;
Сибирский гос. аэрокосмический университет,
пр. Газеты Красноярский рабочий, 31, Красноярск 660037
sozutov_ai@mail.ru