*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1*

*УДК 512.5*

# ГРУППЫ, ЛЕЖАЩИЕ МЕЖДУ ГРУППАМИ ШЕВАЛЛЕ ТИПА $B_l, C_l, F_4, G_2$ НАД НЕСОВЕРШЕННЫМИ ПОЛЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2 И 3

**Я. Н. Нужин**

**Аннотация.** Описаны группы, лежащие между группами Шевалле типа $B_l$, $C_l$, $F_4$, $G_2$ над различными полями характеристик 2 и 3 в случае, когда большее поле является алгебраическим расширением меньшего несовершенного поля.

**Ключевые слова:** группа Шевалле, несовершенное поле, промежуточные подгруппы, ковер аддитивных подгрупп.

## 1. Введение

Далее $\Phi(K)$ — присоединенная группа Шевалле типа $\Phi$ над полем $K$, которая порождается своими корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}$, $r \in \Phi$. В [1] автор установил, что группы, лежащие между группами $\Phi(R)$ и $\Phi(K)$, исчерпываются группами $\Phi(P)$ или их расширениями при помощи диагональных автоморфизмов для промежуточных подполей $P$, $R \subseteq P \subseteq K$, в случае, когда $K$ — алгебраическое расширение поля $R$, содержащего более четырех элементов. При этом в исключительных характеристиках предполагалась совершенность поля $R$. Для $\Phi = B_l, C_l, F_4$ исключительной характеристикой является только 2, а для $\Phi = G_2$ — 2 и 3. Эти случаи рассматриваются ниже, и для них промежуточные подгруппы не определяются только одним промежуточным подполем. Первые примеры таких групп указаны в книге Р. Стейнберга [2, § 10, с. 144].

Пусть $K$ — несовершенное поле характеристики $p$. Множество $p$-х степеней его элементов $K^p$ является собственным подполем поля $K$. Пусть $p = 2$ при $\Phi = B_l$ $(l \geq 2)$, $C_l$ $(l \geq 2)$, $F_4$ и $p = 3$ при $\Phi = G_2$. Положим

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} K, & \text{если } r \text{ — короткий корень,} \\ K^p, & \text{если } r \text{ — длинный корень.} \end{cases}$$

Тогда набор $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ однозначно определяет подгруппу $\Phi(\mathfrak{A})$, порожденную корневыми подгруппами $x_r(\mathfrak{A}_r)$, т. е. она не содержит новых корневых элементов. Р. Стейнберг называет подгруппу $\Phi(\mathfrak{A})$ *непонятной* и отмечает, что она является простой группой.

В данной работе результаты формулируются в терминах ковров аддитивных подгрупп основного поля, в частности, подгруппа $\Phi(\mathfrak{A})$ из указанного выше примера определяется ковром $\mathfrak{A}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00968–а), а также Министерства образования и науки РФ (проект 2.1.1/4620).

## 2. Терминология и предварительные результаты

Группа Шевалле $\Phi(K)$ типа $\Phi$ над полем $K$ порождается корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}$, $r \in \Phi$. Подгруппы $x_r(K)$ абелевы, и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u). \tag{1}$$

Назовем *ковром типа* $\Phi$ *над* $K$ всякий набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ поля $K$ с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js} \quad \text{при } r, s, ir+js \in \Phi,\ i > 0,\ j > 0, \tag{2}$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \quad r, s, ir+js \in \Phi. \tag{3}$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ над $K$ определяет *ковровую* подгруппу $\Phi(\mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi\rangle$ группы $\Phi(K)$, где $\langle M\rangle$ — подгруппа, порожденная множеством $M$. Ковер $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ над кольцом $K$ называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $\Phi(\mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е. если $\Phi(\mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$.

Нам потребуются следующие естественные подгруппы группы Шевалле $\Phi(P)$ над произвольным подполем $P$ поля $K$:

унипотентная подгруппа $U(P) = \langle x_r(P) \mid r \in \Phi^+\rangle$,

мономиальная подгруппа $N(P) = \langle n_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in P^*\rangle$,

диагональная подгруппа $H(P) = \langle h_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in P^*\rangle$.

Здесь $\Phi^+$ — положительная система корней, $P^*$ — мультипликативная подгруппа поля $P$, $n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$, $h_r(t) = n_r(t)n_r(-1)$.

Утверждение следующей леммы впервые появилось в [3] и является частным случаем теоремы 3 из [4].

**Лемма 2.1.** *Пусть подгруппа $M$ группы $U(K)$ нормализуется группой $H(R)$ для некоторого подполя $R$ поля $K$, причем $|R| > 4$. Тогда если*

$$x_{r_1}(t_1)x_{r_2}(t_1)\dots x_{r_k}(t_k) \in M,$$

*где $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k$, то $x_{r_i}(t_i) \in M$, $i = 1, 2, \dots, k$.*

Из определений ковровой подгруппы и замкнутого ковра, а также леммы 2.1 вытекает

**Лемма 2.2.** *Пусть подгруппа $M$ группы $\Phi(K)$ нормализуется группой $H(R)$ для некоторого подполя $R$ поля $K$, причем $|R| > 4$. Тогда ее подгруппа, порожденная пересечениями $M \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$, является ковровой и определяется замкнутым ковром $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$.*

## 3. Группы, лежащие между группами Шевалле типа $B_l$, $C_l$, $F_4$

Над полями характеристики 2 группы Шевалле типа $B_l$ и $C_l$ изоморфны. Поэтому далее рассматриваются только типы $B_l$, $F_4$.

**Теорема 3.1.** *Пусть $K$ — алгебраическое расширение несовершенного поля $R$ характеристики 2 и $M$ — группа, лежащая между группами Шевалле $\Phi(R)$ и $\Phi(K)$ типа $\Phi = B_l, F_4$. Тогда $M$ является произведением ковровой подгруппы $\Phi(\mathfrak{A})$ на некоторую диагональную подгруппу $H_M$, нормализующую $\Phi(\mathfrak{A})$. Ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ является замкнутым, и*

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ — короткий корень,} \\ Q, & \text{если } r \text{ — длинный корень,} \end{cases}$$

*для некоторых аддитивных подгрупп $P$ и $Q$ поля $K$ с условиями*

$$R \subseteq P^2 \subseteq Q \subseteq P \subseteq K.$$

*Более того, если $\Phi = B_l$ и $l \geq 3$, то $Q$ — поле, а если $\Phi = F_4$, то обе аддитивные подгруппы $P$ и $Q$ являются полями и $H_M$ — единичная подгруппа.*

Доказательство. Пусть группа $M$ лежит между группами Шевалле $\Phi(R)$ и $\Phi(K)$ и аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$ поля $K$ определяются пересечениями $M \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$. В силу леммы 2.2 (она применима, так как поле $R$ бесконечно) набор $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ является замкнутым ковром и определяет ковровую подгруппу $\Phi(\mathfrak{A})$. По условию теоремы мономиальная подгруппа $N(R)$ лежит в $M$ и действует сопряжениями транзитивно на корневых подгруппах одинаковой длины. Поэтому $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_s$, если $|r| = |s|$. Переобозначим $\mathfrak{A}_r$ через $P$ для короткого и через $Q$ для длинного корней $r$.

Пусть $r, s, r+s, 2r+s \in \Phi$. Тогда для любых $t \in P$ и $u \in Q$ в силу коммутаторной формулы Шевалле

$$[x_r(t), x_s(u)] = x_{r+s}(tu)x_{2r+s}(t^2u). \tag{4}$$

По лемме 2.1 каждый из сомножителей в правой части равенства (4) лежит в ковровой подгруппе $\Phi(\mathfrak{A})$. Поэтому в силу (4) получаем включения $PQ \subseteq P$, $P^2Q \subseteq Q$, в частности, $P^2 \subseteq Q \subseteq P$, так как $1 \in Q \cap P$.

В системе корней $B_l$ при $l \geq 3$ существуют длинные корни $r, s$, для которых

$$[x_r(t), x_s(u)] = x_{r+s}(tu). \tag{5}$$

Поэтому из (5) следует, что $Q$ является кольцом, а в силу алгебраичности расширения $K/R$ — полем.

В системе корней $F_4$ существуют пара длинных корней $r, s$ и пара коротких корней $r, s$, для которых выполняется равенство (5). Поэтому из (5) следует, что $P$ и $Q$ являются кольцами, а в силу алгебраичности расширения $K/R$ — полями.

Остается показать, что $M = \Phi(\mathfrak{A})H_M$ для некоторой диагональной подгруппы $H_M$, нормализующей группу $\Phi(\mathfrak{A})$.

Любой элемент $g$ из группы Шевалле над полем имеет каноническое представление в виде

$$g = uvnh, \quad \text{где } u \in U,\ v \in V,\ n \in N,\ h \in H.$$

Почти дословно так же, как в [1, с. 535, 536], можно показать, что сомножители $u, v, n$ элемента $g \in M$ лежат в подгруппе $\Phi(\mathfrak{A})$, а диагональный элемент $h$ нормализует ее.

Пусть $\Phi = F_4$. Покажем, что если диагональный элемент нормализует подгруппу $\Phi(\mathfrak{A})$, то он лежит в $\Phi(\mathfrak{A})$.

Зафиксируем базу $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ системы корней $\Phi$, где первые два корня длинные, а другие два короткие и сумма $r_2 + r_3$ является корнем. Любой диагональный элемент $h$ из $\Phi(K)$ представляется в виде

$$h = h_{r_1}(t_1)h_{r_2}(t_2)h_{r_3}(t_3)h_{r_4}(t_4), \quad t_i \in K^*.$$

Из соотношений $hx_{r_i}(1)h^{-1} = x_{r_i}\big(t_1^{k_1}t_2^{k_2}t_3^{k_3}t_4^{k_4}\big)$, где $k_j = A_{r_i,r_j} = 2(r_j, r_i)/(r_i, r_i)$, и соотношения

$$hx_{r_1+r_2+r_3+r_4}(1)h^{-1} = x_{r_1+r_2+r_3+r_4}\big(t_1^{q_1}t_2^{q_2}t_3^{q_3}t_4^{q_4}\big),$$

где $q_j = \sum\limits_{s=1}^{4} A_{r_j,r_s}$, следуют соответственно включения

$$t_1^2t_2^{-1} \in Q, \tag{6}$$

$$t_1^{-1}t_2^2t_3^{-2} \in Q, \tag{7}$$

$$t_2^{-1}t_3^2t_4^{-1} \in P, \tag{8}$$

$$t_3^{-1}t_4^2 \in P, \tag{9}$$

$$t_1t_3^{-1}t_4 \in P. \tag{10}$$

Из (9) и (10) последовательно получаем

$$t_1t_4^{-1} \in P, \tag{11}$$

$$t_1^{-2}t_3 \in P, \tag{12}$$

из (8) и (9) —

$$t_2^{-1}t_3t_4 \in P, \tag{13}$$

из (6) и (12) —

$$t_2^{-1}t_3 \in P, \tag{14}$$

из (13) и (14) —

$$t_4 \in P, \tag{15}$$

из (11) и (15) —

$$t_1 \in P, \tag{16}$$

из (12) и (16) —

$$t_3 \in P, \tag{17}$$

из (14) и (17) —

$$t_2 \in P. \tag{18}$$

Так как $P^2 \subseteq Q$, из (7) и (18) имеем

$$t_1 \in Q, \tag{19}$$

наконец, из (6) и (19) —

$$t_2 \in Q. \tag{20}$$

Таким образом, $t_1, t_2 \in Q$ и $t_3, t_4 \in P$. Это и означает, что $h \in \Phi(\mathfrak{A})$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что остается неясным, являются ли в случае $\Phi = B_l$ аддитивные подгруппы $P$ и $Q$ из теоремы 3.1 полями.

## 4. Группы, лежащие между группами Шевалле типа $G_2$

**Теорема 4.1.** *Пусть $K$ — алгебраическое расширение несовершенного поля $R$ характеристики 2 или 3 и $M$ — группа, лежащая между группами Шевалле $\Phi(R)$ и $\Phi(K)$ типа $\Phi = G_2$. Тогда*

(а) *если* $\operatorname{char} K = 2$, *то $M = \Phi(P)$ для некоторого промежуточного подполя $P$, $R \subseteq P \subseteq K$;*

(б) *если* $\operatorname{char} K = 3$, *то для некоторых промежуточных подполей $P$ и $Q$ с условиями $R \subseteq P^3 \subseteq Q \subseteq P \subseteq K$ группа $M$ совпадает с подгруппой $\Phi(P,Q)$, порожденной множествами корневых элементов $x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$, где*

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ — короткий корень,} \\ Q, & \text{если } r \text{ — длинный корень.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$ поля $K$ определяются пересечениями $M \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$. Как и в доказательстве теоремы 3.1, набор $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ является замкнутым ковром и определяет ковровую подгруппу $\Phi(\mathfrak{A})$, причем $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_s$, если $|r| = |s|$. Положим $\mathfrak{A}_r = P$ для короткого корня $r$ и $\mathfrak{A}_r = Q$ для длинного корня $r$.

Пусть $\{a, b\}$ — база системы корней типа $G_2$. Тогда

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u)x_{3a+b}(\pm t^3u)x_{3a+2b}(\pm t^3u^2), \tag{21}$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu)x_{3a+b}(\pm 3t^2u)x_{3a+2b}(\pm 3tu^2), \tag{22}$$

$$[x_a(t), x_{2a+b}(u)] = x_{3a+b}(\pm 3tu), \tag{23}$$

$$[x_b(t), x_{3a+b}(u)] = x_{3a+2b}(\pm tu). \tag{24}$$

В силу (21)

$$PQ \subseteq P, \tag{25}$$

$$P^3Q \subseteq Q, \tag{26}$$

в частности, так как $1 \in Q \cap P$, то

$$P^3 \subseteq Q \subseteq P. \tag{27}$$

Ввиду (22)

$$2PP \subseteq P, \tag{28}$$

$$3P^2P \subseteq Q. \tag{29}$$

С учетом (24)

$$QQ \subseteq Q. \tag{30}$$

Из (30) следует, что $Q$ является кольцом, а в силу алгебраичности расширения $K/R$ — полем.

(а) Пусть $\operatorname{char} K = 2$. Согласно (27) и (29) $P = Q$. Так же, как и в [1], устанавливается, что $M = \Phi(P)H_M$ для некоторой диагональной подгруппы $H_M$, нормализующей группу $\Phi(P)$. Для $\Phi = G_2$ в силу [5, лемма 4] диагональный элемент, нормализующий подгруппу $\Phi(P)$, лежит в этой подгруппе. Таким образом, $M = \Phi(P)$.

(б) Пусть $\operatorname{char} K = 3$. В силу (28) $P$ — поле. Так же, как и в [1], устанавливается, что $M = \Phi(P,Q)H_M$, для некоторой диагональной подгруппы $H_M$, нормализующей группу $\Phi(P, Q)$. Покажем, что если диагональный элемент нормализует подгруппу $\Phi(P, Q)$, то он лежит в $\Phi(P, Q)$.

Любой диагональный $h$ элемент из $\Phi(K)$ представляется в виде

$$h = h_a(t_a)h_b(t_b), \quad t_a, t_b \in K^*.$$

Из соотношений

$$hx_a(1)h^{-1} = x_a\big(t_a^2 t_b^{-1}\big), \quad hx_b(1)h^{-1} = x_b(t_a^{-3}t_b^2), \quad hx_{3a+2b}(1)h^{-1} = x_{3a+2b}(t_b)$$

получаем соответственно включения

$$t_a^2 t_b^{-1} \in P, \tag{31}$$

$$t_a^{-3} t_b^2 \in Q, \tag{32}$$

$$t_b \in Q. \tag{33}$$

Из (31) и (32) следует, что $t_a \in P$. Отсюда $h \in \Phi(P, Q)$. Теорема доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Нужин Я. Н.* О группах, лежащих между группами лиева типа над различными полями // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 526–541.
2. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
3. *Suzuki K.* On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings // Tohoku Math. J. 1976. V. 29, N 1. P. 57–66.
4. *Левчук В. М.* Параболические подгруппы некототорых $ABA$-групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 4. С. 509–525.
5. *Нужин Я. Н., Якушевич А. В.* Промежуточные подгруппы групп Шевалле над полем частных кольца главных идеалов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 347–358.


*Статья поступила 29 октября 2012 г.*

Нужин Яков Нифантьевич
Сибирский федеральный университет, Институт фундаментальной подготовки,
ул. Киренского, 26, Красноярск 660074
nuzhin2008@rambler.ru